3. Πλήρεις μετρικοί χώροι

3.1. Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{Q}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $\emptyset \neq G \subseteq X$ ανοικτό ώστε η $f|_G$ να είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Γράφουμε $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $F_n = f^{-1}(\{q_n\}) = \{x \in X : f(x) = q_n\}$. Αφού η f είναι συνεχής και το $\{q_n\}$ είναι κλειστό (ως μονοσύνολο), κάθε F_n είναι κλειστό υποσύνολο του X. Παρατηρούμε ότι

$$X = f^{-1}(\mathbb{Q}) = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{q_n\}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\{q_n\}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Ο (X,d) είναι πλήρης, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $(F_{n_0})^\circ \neq \emptyset$ (από τη δεύτερη μορφή του θεωρήματος του Baire). Θέτουμε $G = (F_{n_0})^\circ$. Τότε, το G είναι μη κενό, ανοικτό, και $f(x) = n_0$ για κάθε $x \in G$. Δηλαδή, η $f|_G$ είναι σταθερή.

3.2. Έστω (G_n) ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Υπόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο: υποθέτουμε ότι το G είναι αριθμήσιμο, οπότε γράφεται στη μορφή $G = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $U_k = \mathbb{R} \setminus \{a_k\}$. Παρατηρήστε ότι κάθε U_k είναι ανοικτό και πυκνό, και ότι

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}(\mathbb{R} \setminus \{a_k\}) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty}\{a_k\} = \mathbb{R} \setminus G.$$

Τότε,

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) = (\mathbb{R} \setminus G) \cap G = \emptyset,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού κάθε αριθμήσιμη τομή ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι πυκνό G_δ (άρα, μη κενό) σύνολο, από το θεώρημα του Baire.

3.3. Στο $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ θεωρούμε τη μετρική

$$d(x,y) = |x-y| + \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

Δείξτε ότι η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική και ότι ο (X,d) είναι πλήρης.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $x_n, x \neq 0$ και $|x_n - x| \to 0$ τότε $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$ (ως προς την $|\cdot|$) άρα

$$d(x_n,x) = |x_n - x| + \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| \to 0.$$

Αντίστροφα, αφού $|x_n - x| \leq d(x_n,x)$, αν $d(x_n,x) \to 0$ έχουμε ότι $|x_n - x| \to 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι $d(x_n,x) \to 0$ αν και μόνο αν $|x_n - x| \to 0$, δηλαδή η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική.

Για την πληρότητα: έστω (x_n) βασική ακολουθία ως προς την d. Για το τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ για κάθε $n,m \geq n_0$, άρα

$$|x_n - x_m| \leq d(x_n,x_m) < \varepsilon$$

για κάθε $n,m \geq n_0$. Δηλαδή, η (x_n) είναι βασική ως προς την συνήθη μετρική. Άρα, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $|x_n - x| \to 0$. Παράλληλα, αφού

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| \leq d(x_n,x_m) < \varepsilon$$

για κάθε $n,m \geq n_0$, έχουμε ότι η $(1/x_n)$ είναι επίσης βασική ως προς την συνήθη μετρική, άρα φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|x_n| \leq M$ για κάθε n. Αυτό δείχνει ότι $x \neq 0$: αν είχαμε $|x_n - 0| \to 0$ τότε θα είχαμε $\frac{1}{|x_n|} \to \infty$ και η $(1/x_n)$ δεν θα ήταν φραγμένη.

Είδαμε λοιπόν ότι $x_n \to x \neq 0$ ως προς την $|\cdot|$. Τότε, $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$ ως προς την $|\cdot|$, και

$$d(x_n, x) = |x_n - x| + \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| \to 0.$$

Δηλαδή, κάθε d-βασική ακολουθία (x_n) είναι συγκλίνουσα, άρα ο (X, d) είναι πλήρης.

3.4. Έστω d μετρική στο $\mathbb{Q}$ η οποία είναι ισοδύναμη με την συνήθη μετρική. Αποδείξτε ότι ο $(\mathbb{Q}, d)$ δεν είναι πλήρης.

Υπόδειξη. Γράφουμε το $\mathbb{Q}$ στη μορφή $\mathbb{Q} = \{q_k : k \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $G_k = \mathbb{Q} \setminus \{q_k\}$. Αφού η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική, κάθε G_k είναι ανοικτό και πυκνό ως προς την d (διότι είναι ανοικτό και πυκνό στον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ – εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Αν ο $(\mathbb{Q}, d)$ ήταν πλήρης, θα είχαμε ότι η τομή $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ είναι d-πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{Q}$, από το θεώρημα του Baire. Όμως, $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \emptyset$ και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

3.5. Σωστό ή λάθος; Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, και αν

$$F_m = f^{-1}([-m, m]) = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq m\},$$

τότε τουλάχιστον ένα F_m περιέχει διάστημα.

Υπόδειξη. Σωστό. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Αφού η f είναι συνεχής, το $F_m = f^{-1}([-m.m])$ είναι κλειστό σύνολο (αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου).

Παρατηρούμε ότι $\mathbb{R} = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $m_x \in \mathbb{N}$ ώστε $|f(x)| \leq m_x$, και τότε $x \in F_{m_x} \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$.

Αφού ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι πλήρης, εφαρμόζοντας τη δεύτερη μορφή του θεωρήματος του Baire συμπεραίνουμε ότι υπάρχει m ώστε το F_m να έχει μη κενό εσωτερικό (τότε, το F_m περιέχει διάστημα).

3.6. Έστω (X, d), (Y, σ) μετρικοί χώροι και έστω $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $y \in Y$ ορίζουμε

$$A_y = \{x \in X : f(x) = y\} = f^{-1}(\{y\}).$$

Δείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε για κάθε $y, y' \in f(X)$ με $y \neq y'$, ισχύει $\mathrm{dist}(A_y, A_{y'}) > 0$.

(β) Αν ο (X, d) είναι πλήρης και ο Y είναι αριθμήσιμος, υπάρχει $y \in Y$ ώστε $(A_y)^\circ \neq \emptyset$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $y, y' \in f(X)$ με $y \neq y'$ και $\mathrm{dist}(A_y, A_{y'}) = 0$. Τότε, μπορούμε να βρούμε $x_n \in A_y$ και $x_n' \in A_{y'}$ με $d(x_n, x_n') \to 0$. Αφού η f είναιθ ομοιόμορφα συνεχής, έπεται ότι $\sigma(f(x_n), f(x_n')) \to 0$. Όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f(x_n) = y$ διότι $x_n \in A_y$ και $f(x_n') = y'$ διότι $x_n' \in A_{y'}$. Άρα, $\sigma(f(x_n), f(x_n')) = \sigma(y, y')$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\sigma(y, y') = 0$, δηλαδή $y = y'$. Αυτό είναι άτοπο.

(β) Έστω ότι $Y = \{y_k : k \in \mathbb{N}\}$. Κάθε $A_k = f^{-1}(\{y_k\})$ είναι κλειστό υποσύνολο του (X, d) διότι η f είναι συνεχής και το $\{y_k\}$ κλειστό. Αφού ο (X, d) είναι πλήρης και

$$X = f^{-1}(Y) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(\{y_k\}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

το ζητούμενο έπεται από τη δεύτερη μορφή του θεωρήματος του Baire.

3.7. Έστω $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ άπειρο αριθμήσιμο σύνολο και έστω d μετρική στο X ώστε ο (X, d) να είναι πλήρης. Δείξτε ότι ο (X, d) έχει μεμονωμένο σημείο.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι κάθε x_n είναι σημείο συσσώρευσης του X. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $G_n = X \setminus \{x_n\}$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X (ισχύει $x_n \in \overline{G_n}$, άρα $\overline{G_n} = X$ – εξηγήστε γιατί). Από το θεώρημα του Baire η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό G_δ σύνολο. Όμως,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \{x_n\}) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\} = X \setminus X = \emptyset,$$

το οποίο είναι άτοπο.

3.8. Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής, επί και $d(x, y) \leq \sigma(f(x), f(y))$ για κάθε $x, y \in X$. Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για τις ακόλουθες προτάσεις:

(i) Αν ο (X, d) είναι πλήρης τότε ο (Y, σ) είναι πλήρης.

(ii) Αν ο (Y, σ) είναι πλήρης τότε ο (X, d) είναι πλήρης.

Υπόδειξη. (i) *Σωστό.* Έστω (y_n) βασική στον Y. Αφού η f είναι επί, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in X$ ώστε $f(x_n) = y_n$. Από την υπόθεση,

$$d(x_n, x_m) \leq \sigma(f(x_n), f(x_m)) = \sigma(y_n, y_m),$$

που αποδεικνύει ότι η (x_n) είναι βασική στον X. Αφού ο X είναι πλήρης, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{d} x$. Εφόσον η f είναι συνεχής έπεται ότι $y_n = f(x_n) \to f(x) \in Y$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο (Y, σ) είναι πλήρης.

(ii) *Λάθος.* Αν θεωρήσουμε τους $X = (-\pi/2, \pi/2)$ και $Y = \mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική και την συνάρτηση $f : X \to Y$ με $f(x) = \tan x$, τότε έχουμε $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ για κάθε $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$ (χρησιμοποιήστε το θεώρημα μέσης τιμής και το γεγονός ότι $|f'| \geq 1$ στο $\mathbb{R}$) και η f είναι συνεχής και επί. Παρατηρήστε ότι ο Y είναι πλήρης, ενώ ο X δεν είναι πλήρης.

3.9. Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $f_n : X \to \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \ldots$ συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι: είτε υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $f_n(x_0) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή υπάρχουν $\emptyset \neq G \subseteq X$ ανοικτό και $k \in \mathbb{N}$ ώστε $f_k(x) = 0$ για κάθε $x \in G$.

Υπόδειξη. Αν δεν ισχύει η πρώτη περίπτωση, τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι: αν $Z_n = \{x \in X : f_n(x) = 0\} = f_n^{-1}(\{0\})$, τότε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. Παρατηρήστε ότι κάθε Z_n είναι κλειστό, οπότε από το θεώρημα του Baire υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}(Z_k) \neq \emptyset$. Θέτουμε $G = \mathrm{int}(Z_k)$ και παρατηρούμε ότι G είναι ανοικτό στον X και $f_k|_G = 0$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

3.10. Έστω $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών. Θεωρούμε την $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με

$$d(m, n) = 1 + \frac{1}{m + n}$$

αν $m \neq n$ και $d(m, n) = 0$ αν $m = n$.

(α) Δείξτε ότι η d είναι μετρική.

(β) Δείξτε ότι ο $(\mathbb{N}, d)$ είναι πλήρης.

(γ) Δείξτε ότι: στον $(\mathbb{N}, d)$ υπάρχει φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες που η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

Υπόδειξη. (α) Αρκεί να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα στην περίπτωση όπου οι m, n, k είναι διαφορετικοί ανά δυο. Σε αυτήν την περίπτωση εύκολα έχουμε,

$$d(n, m) + d(m, k) > 2 > 1 + \frac{1}{n + k} = d(n, k).$$

(β) Έστω $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ βασική ακολουθία στον $(\mathbb{N}, d)$. Τότε, υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $i, j \geq i_0$ να έχουμε $d(n_i, n_j) < 1/2$. Αναγκαστικά, $n_i = n_j$. Αλλιώς, θα είχαμε

$$d(n_i, n_j) < 1/2 \Longleftrightarrow n_i + n_j < 2,$$

το οποίο είναι αδύνατο αφού για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ έχουμε $m + n \geq 2$. Έπεται ότι η (n_i) είναι τελικά σταθερή, άρα συγκλίνει.

(γ) Θέτουμε $r_n = 1 + \frac{1}{2n}$ και θεωρούμε τις κλειστές μπάλες $B_n := \hat{B}_d(n, r_n)$. Παρατηρήστε ότι $B_n = \{n, n + 1, \ldots\}$, οπότε $B_n \supseteq B_{n+1}$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$.