2. Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

2.1. Έστω $(X,d),(Y,\sigma)$ μετρικοί χώροι και $f:X\to Y$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:
(α) Η συνάρτηση $g:X\times Y\to\mathbb{R}$ με $g(x,y)=\sigma(f(x),y)$ είναι συνεχής.
(β) Το σύνολο $A=\{(x,y)\in X\times Y : f(x)\in B_\sigma(y,1)\}$ είναι ανοικτό.

Υπόδειξη. (α) Έστω $(x_n,y_n)\to(x,y)$ στον $X\times Y$. Τότε, $x_n\to x$ και $y_n\to y$ (στον $X\times Y$ εννοείται ότι έχουμε μια μετρική γινόμενο). Αφού η f είναι συνεχής και $x_n\to x$, έχουμε $f(x_n)\to f(x)$. Έπεται ότι, στον Y,

$$\sigma(f(x_n),y_n)\to\sigma(f(x),y),$$

δηλαδή $g(x_n,y_n)\to g(x,y)$. Από την αρχή της μεταφοράς, η g είναι συνεχής.
(β) Παρατηρήστε ότι

$$A=\{(x,y):\sigma(f(x),y)<1\}=\{(x,y):g(x,y)<1\}=g^{-1}((-\infty,1)).$$

Αφού η g είναι συνεχής, το A είναι ανοικτό ως αντίστροφη εικόνα του ανοικτού συνόλου $(-\infty,1)$.

2.2. Έστω $f:(X,d)\to\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $a,b\in\mathbb{R}$ τα σύνολα $\{x\in X : f(x)<a\}$ και $\{x\in X : f(x)>b\}$ είναι ανοικτά.

Υπόδειξη. Αν η f είναι συνεχής τότε για κάθε $a,b\in\mathbb{R}$ τα σύνολα $\{x\in X : f(x)<a\}=f^{-1}((-\infty,a))$ και $\{x\in X : f(x)>b\}=f^{-1}((b,\infty))$ είναι ανοικτά σύνολα ως αντίστροφες εικόνες ανοικτών ημιευθειών.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση: θεωρούμε τυχόν $x_0\in X$ και $\varepsilon>0$, και θα δείξουμε ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε $f(B(x_0,\delta))\subseteq(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση με $a=f(x_0)+\varepsilon$ και $b=f(x_0)-\varepsilon$, έχουμε ότι το σύνολο

$$A=\{x\in X : f(x)\in(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)\}=\{x\in X : f(x)<f(x_0)+\varepsilon\}\cap\{x\in X : f(x_0)-\varepsilon<f(x)\}$$

είναι ανοικτό σύνολο, και $x_0\in A$, άρα υπάρχει $\delta>0$ ώστε $B(x,\delta)\subseteq A$.

2.3. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $f:X\to X$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f\circ f=f$. Δείξτε ότι το σύνολο $f(X)$ είναι κλειστό.

Υπόδειξη. Έστω (y_n) ακολουθία στο $f(X)$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $y\in X$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $x_n\in X$ ώστε $y_n=f(x_n)$. Αφού η f είναι συνεχής και $f\circ f=f$, έχουμε

$$f(y_n)=f(f(x_n))=(f\circ f)(x_n)=f(x_n)=y_n.$$

Πάλι από την συνέχεια της f, αφού $y_n\to y$ έχουμε $y_n=f(y_n)\to f(y)$. Δηλαδή, $f(y)=y$. Άρα, $y\in f(X)$.

2.4. Έστω $f,g:(X,d)\to(Y,\sigma)$ συνεχείς συναρτήσεις και έστω $x\in X$ ώστε $f(x)\neq g(x)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $r>0$ ώστε: για κάθε $y,z\in B(x,r)$ ισχύει $f(y)\neq g(z)$.

Υπόδειξη. Αφού $f(x)\neq g(x)$, υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε

$$(*)\qquad B(f(x),\varepsilon)\cap B(g(x),\varepsilon)=\emptyset.$$

Από την συνέχεια της f και της g στο x μπορούμε να βρούμε $r_1>0$ ώστε $f(B(x,r_1))\subseteq B(f(x),\varepsilon)$ και $r_2>0$ ώστε $g(B(x,r_2))\subseteq B(g(x),\varepsilon)$. Θέτουμε $r=\min\{r_1,r_2\}>0$. Τότε, αν $y,z\in B(x,r)$ έχουμε $f(y)\in B(f(x),\varepsilon)$ και $g(z)\in B(g(x),\varepsilon)$ και από την $(*)$ έπεται ότι $f(y)\neq g(z)$.

2.5. Θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Q}$ με την συνήθη μετρική.

(α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ με την ιδιότητα $\bigcap_{n=1}^\infty G_n=\emptyset$.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f:(\mathbb{N},|\cdot|)\to(\mathbb{Q},|\cdot|)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Εξετάστε αν οι $(\mathbb{N},|\cdot|)$ και $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ είναι ομοιομορφικοί.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $G_n = \mathbb{Q}\setminus\{q_n\}$. Κάθε G_n είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ (εξηγήστε γιατί) και $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$.

(β) Επιλέγουμε $\delta = 1/2$. Τότε, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ έχουμε: αν $m, n \in \mathbb{N}$ και $|m - n| < 1/2$, τότε $m = n$, άρα $f(m) = f(n)$ και έπεται ότι $|f(m) - f(n)| = 0 < \varepsilon$.

(γ) Έστω $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ συνεχής, 1-1 και επί. Θεωρούμε την $q_n = \frac{1}{n} \to 0$. Τότε, $g(q_n) \to g(0)$. Αφού η $(g(q_n))$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία φυσικών, είναι τελικά σταθερή και ίση με το όριό της $g(0)$. Όμως τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $g(1/n) = g(q_n) = g(0)$ για κάθε $n \geq n_0$, και αφού η g είναι 1-1 συμπεραίνουμε ότι $1/n = 0$ για κάθε $n \geq n_0$, άτοπο. Αφού δεν υπάρχει $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ συνεχής, 1-1 και επί, δεν υπάρχει ομοιομορφισμός $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.

2.6. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:

(α) Αν οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς, τότε η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη και η g είναι συνεχής, τότε η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Αν η f είναι συνεχής και φραγμένη και η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Υπόδειξη. (α) Σωστό: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, βρίσκουμε $\eta > 0$ ώστε «για κάθε $u, v \in \mathbb{R}$ με $|u - v| < \eta$ ισχύει $|g(u) - g(v)| < \varepsilon$». Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε «για κάθε $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(y)| < \eta$». Τότε, αν $d(x, y) < \delta$, θεωρώντας τα $u = f(x)$ και $v = f(y)$ που ικανοποιούν την $|u - v| < \eta$, συμπεραίνουμε ότι $|g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$.

(β) Σωστό: η εικόνα $f(X)$ του X είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα περιέχεται σε κάποιο κλειστό διάστημα $[-M, M]$. Η $\tilde{g} = g|_{[-M,M]}$ (ο περιορισμός της g στο $[-M, M]$) είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση ως συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα. Από το (α) η σύνθεση $\tilde{g} \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Όμως, $g \circ f = \tilde{g} \circ f$ διότι $f(X) \subseteq [-M, M]$ (εξηγήστε).

(γ) Λάθος: αν ίσχυε, θεωρώντας την $g_0(x) = x$, η οποία είναι ομοιόμορφα συνεχής, θα είχαμε ότι κάθε συνεχής και φραγμένη $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, διότι $f = g0 \circ f$. Αυτό δεν ισχύει: π.χ. η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \cos(x^2)$ είναι συνεχής και φραγμένη αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2.7. Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:

(α) Αν $K \subseteq X$ είναι συμπαγές, τότε το $f(K) \subseteq Y$ είναι συμπαγές.

(β) Αν $K \subseteq X$ είναι φραγμένο, τότε το $f(K) \subseteq Y$ είναι φραγμένο.

(γ) Αν $K \subseteq X$ είναι φραγμένο και η f είναι συνάρτηση Lipschitz, τότε το $f(K) \subseteq Y$ είναι φραγμένο.

Υπόδειξη. (α) Σωστό: θεώρημα στο Κεφάλαιο 6 (δίνονται εκεί δύο διαφορετικές αποδείξεις).

(β) Λάθος: η ταυτοτική απεικόνιση $I : (\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι συνεχής και το $\mathbb{R}$ είναι φραγμένο ως προς την δ, όμως το $I(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένο με τη συνήθη μετρική.

(γ) Σωστό: η απόδειξη δίνεται στο Κεφάλαιο 4 (στην παράγραφο για τις συναρτήσεις Lipschitz).

2.8. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Είναι το σύνολο $K = \{(f(x), g(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ απαραίτητα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$;

Υπόδειξη. Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ και $g(x) = 0$ τότε βλέπουμε ότι για $x_n = n$ έχουμε ότι η $z_n := (f(x_n), g(x_n)) = (f(x_n), 0)$ είναι ακολουθία του K, η οποία συγκλίνει στο $(0, 0)$. Όμως, $(0, 0) \notin K$.

2.9. Έστω F_1, F_2 ξένα κλειστά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, d). Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $g : X \to \mathbb{R}$ φραγμένες συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει φραγμένη συνεχής συνάρτηση $h : X \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $h \equiv f$ στο F_1 και $h \equiv g$ στο F_2.

Υπόδειξη. Από το λήμμα του Urysohn υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\phi : X \to [0, 1]$ ώστε $\phi|_{F_1} = 0$ και $\phi|_{F_2} = 1$. Θεωρούμε την συνάρτηση $h : X \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) := (1 - \phi(x))f(x) + \phi(x)g(x),\ x \in X.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η h έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

2.10. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής, 1-1 συνάρτηση $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Για κάθε $t \in [0, 1]$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_t : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f_t(x) = f(t, x)$. Αφού η f είναι συνεχής και 1-1, το ίδιο ισχύει για την f_t. Άρα, η εικόνα $I_t = f_t([0, 1])$ της f_t είναι ένα κλειστό διάστημα $I_t = [a_t, b_t]$, με $a_t < b_t$.

Τα διαστήματα I_t, $0 \leq t \leq 1$, είναι ξένα (αν υπήρχε κάποιο $z \in I_t \cap I_s$, όπου $t \neq s$, τότε θα είχαμε $z = f(t, x) = f(s, y)$ για κάποια $x, y \in [0, 1]$, το οποίο είναι άτοπο διότι η f είναι 1-1). Όμως, είναι υπεραριθμήσιμα το πλήθος και αυτό οδηγεί σε άτοπο: επιλέγουμε ρητό $q_t \in I_t$ και η απεικόνιση $t \mapsto q_t$ είναι 1-1, το οποίο είναι άτοπο αφού το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.