Πραγματική Ανάλυση (2014–15)

1. Τοπολογία μετρικών χώρων

1.1. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{1/n : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{0\}$ εφοδιασμένο με την συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$. Να βρεθούν όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $(A, |\cdot|)$.

Υπόδειξη. Κάθε $B \subseteq A$ με $0 \notin B$, είναι ανοικτό: γράφεται ως ένωση μονοσυνόλων $\{1/n\}$, καθένα από τα οποία είναι ανοικτό σύνολο (για μια εξήγηση, δείτε την Άσκηση 1.3 (ε) παρακάτω). Μένει λοιπόν να εξετάσουμε ποιά σύνολα $C \subseteq A$ με $0 \in C$ είναι ανοικτά.

Αν C είναι ένα τέτοιο σύνολο, το $0 \in C^{\circ}$ άρα περιέχει όλους τελικά τους $1/n$ (διότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap A \subseteq C$ και ισχύει $0 < 1/n < \varepsilon$ τελικά). Άρα, θα πρέπει το $A \setminus C$ να είναι πεπερασμένο. Αντίστροφα, κάθε $C \subseteq A$ με $0 \in C$ και $A \setminus C$ πεπερασμένο είναι ανοικτό, διότι το συμπλήρωμά του (δηλαδή, το $A \setminus C$) είναι κλειστό ως πεπερασμένο σύνολο.

1.2. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq B \subseteq X$. Δείξτε ότι: αν το A είναι πυκνό στο B και το B είναι πυκνό στο X τότε το A είναι πυκνό στο X.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τυχόν $x \in X$ και τυχόν $\varepsilon > 0$. Αφού το B είναι πυκνό στο X υπάρχει $b \in B$ ώστε $d(b, x) < \varepsilon/2$, και αφού το A είναι πυκνό στο B υπάρχει $a \in A$ ώστε $d(a, b) < \varepsilon/2$. Από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι $d(a, x) < \varepsilon$.

1.3. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική. Εξετάστε αν υπάρχει $E \subseteq \mathbb{R}$, διαφορετικό από το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$, το οποίο να έχει την εξής ιδιότητα (για καθεμία ξεχωριστά δώστε παράδειγμα με αιτιολόγηση ή αποδείξτε ότι τέτοιο σύνολο δεν μπορεί να υπάρχει):

(α) Το E είναι άπειρο σύνολο αλλά δεν έχει σημεία συσσώρευσης.

(β) Το E έχει άπειρα σημεία συσσώρευσης αλλά δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο.

(γ) Το E είναι ανοικτό αλλά δεν έχει σημεία συσσώρευσης.

(δ) Το E είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(ε) Το E είναι φραγμένο και έχει άπειρα μεμονωμένα σημεία (δηλαδή, το $E \setminus E'$ είναι άπειρο σύνολο).

Υπόδειξη. (α) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $\mathbb{Z}$: για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ ισχύει $B(m, 1/2) \cap (\mathbb{Z} \setminus \{m\}) = \emptyset$. Αν $x \notin \mathbb{Z}$ τότε, ακόμα ισχυρότερα, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

(β) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $E = \left\{m + \frac{1}{2n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$. Κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι σημείο συσσώρευσης του E: η ακολουθία $b_n = m + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει στο m και όλοι οι όροι της είναι διάφοροι του m. Το E δεν περιέχει διάστημα (διότι δεν περιέχει άρρητους) άρα δεν έχει εσωτερικά σημεία.

(γ) Δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο: ως ανοικτό και μη κενό, θα περιείχε κάποιο ανοικτό διάστημα (a, b), και κάθε $x \in (a, b)$ θα ήταν σημείο συσσώρευσης του E (εξηγήστε γιατί).

(δ) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Εξηγήστε γιατί είναι πυκνό.

(ε) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $E = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Περιέχεται στο $[0, 1]$ και το μοναδικό σημείο συσσώρευσής του είναι το 0. Εξηγήστε γιατί: το λεπτό σημείο είναι ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $\frac{1}{n}$ είναι μεμονωμένο σημείο του E, αφού (π.χ. για $n \geq 2$) αν πάρουμε $\varepsilon_n = \frac{1}{n(n+1)} = \min\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right\} > 0$ τότε το μοναδικό σημείο του E στο $(1/n - \varepsilon_n, 1/n + \varepsilon_n)$ είναι το $1/n$.

1.4. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Αν το A είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και το F είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $A \setminus F$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(ii) Αν τα D_1, D_2 είναι πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τότε το $D_1 \cap D_2$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(iii) Αν τα C_1, C_2 είναι πυκνά και G_δ υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τότε το $C_1 \cap C_2$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. (i) Σωστό: Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A (διότι, αν τα μόνα σημεία του A ήταν τα $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$ τότε στο $(x-\varepsilon, a_1)$ δεν θα υπήρχε σημείο του A, και αυτό είναι άτοπο αφού το A είναι πυκνό). Αφού το $A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ είναι άπειρο και το F είναι πεπερασμένο, έχουμε $(A \setminus F) \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \supseteq [A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)] \setminus F \neq \emptyset$.

(ii) Λάθος: το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, όμως η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

(iii) Σωστό: από το θεώρημα Baire. Αν $C_1 = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$ και $C_2 = \bigcap_{m=1}^\infty V_m$, όπου τα U_n, V_m είναι ανοικτά σύνολα, τότε κάθε U_n και κάθε V_m είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (διότι $U_n \subseteq C_1$ και $V_m \supseteq C_2$). Ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, άρα το $C_1 \cap C_2 = (\bigcap_{n=1} U_n) \cap (\bigcap_{m=1}^\infty V_m)$ είναι πυκνό G_δ-σύνολο, ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών πυκνών συνόλων.

1.5. Έστω (X,d) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στον X και $x \in X$. Θέτουμε $A = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$. Αποδείξτε ότι:

(i) Αν $x \in A'$, τότε υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \to x$.

(ii) Αν η (x_n) είναι βασική, τότε το A' περιέχει το πολύ ένα σημείο.

(iii) Αν η (x_n) είναι βασική και $A' \neq \emptyset$, τότε η (x_n) είναι συγκλίνουσα.

Υπόδειξη. (i) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A στην $B(x,\varepsilon)$. Συνεπώς, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) στην $B(x,\varepsilon)$. Έτσι, παίρνοντας $\varepsilon = 1, 1/2, \ldots$ βρίσκουμε (διαδοχικά) $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $d(x, x_{k_n}) < \frac{1}{n}$ (στο n-οστό βήμα, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι άπειροι $x_s \in B(x, 1/n)$, άρα και κάποιος x_{k_n} με δείκτη $k_n > k_{n-1}$). Η (x_{k_n}) που ορίζεται έτσι είναι υπακολουθία της (x_n) και συγκλίνει στο x.

(ii) και (iii) μαζί: Έστω x σημείο συσσώρευσης του A. Από το προηγούμενο ερώτημα, η (x_n) έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο x. Αφού η (x_n) είναι βασική, έπεται ότι $x_n \to x$ (θεωρία). Αυτό αποδεικνύει και το (ii): αν το A είχε δύο σημεία συσσώρευσης $x \neq y$, τότε θα είχαμε $x_n \to x$ και $x_n \to y$, άτοπο.

1.6. Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε η $B(x, \varepsilon_x)$ να είναι πεπερασμένο σύνολο. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο του X είναι ανοικτό σύνολο.

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι: για κάθε $x \in X$ το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι ανοικτό σύνολο. Τότε, κάθε $A \subseteq X$ γράφεται ως ένωση ανοικτών συνόλων, $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$, άρα είναι ανοικτό σύνολο.

Έστω λοιπόν $x \in X$. Από την υπόθεση υπάρχει ε_x ώστε $B(x, \varepsilon_x) = \{x\}$ ή $B(x, \varepsilon_x) = \{x, x_1, \ldots, x_N\}$, όπου $x_1, \ldots, x_N \neq x$. Στην δεύτερη περίπτωση, επιλέγουμε

$$0 < \delta < \min\{d(x, x_1), \ldots, d(x, x_N)\}.$$

Τότε, $B(x, \delta) = \{x\}$ (εξηγήστε γιατί). Σε κάθε περίπτωση, το $\{x\}$ είναι ανοικτή μπάλα κατάλληλης ακτίνας, άρα ανοικτό σύνολο.

1.7. Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):

(α) Αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του X τότε για κάθε πυκνό υποσύνολο D του X ισχύει $x_0 \in D$.

(β) Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X με $d(x_n, x_m) \geq 1$ για κάθε $n \neq m$ στο $\mathbb{N}$, τότε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Υπόδειξη. (α) Σωστό. Αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του X, τότε το $\{x_0\}$ είναι ανοικτό σύνολο. Τότε, για κάθε πυκνό υποσύνολο D του X ισχύει $D \cap \{x_0\} \neq \emptyset$, άρα $x_0 \in D$ (ένα πυκνό σύνολο τέμνει κάθε ανοικτό υποσύνολο).

(β) Σωστό. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία (y_m) σημείων του A είναι βασική, άρα υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(y_m, y_{m_0}) < 1/2$ για κάθε $m \geq m_0$. Αφού οι y_m, y_{m_0} είναι όροι της (x_n), αναγκαστικά έχουμε $y_m = y_{m_0}$, δηλαδή η (y_m) είναι τελικά σταθερή και συγκλίνει στο $y_{m_0} \in A$.

1.8. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^m$ με την Ευκλείδεια μετρική. Αποδείξτε ότι: αν A είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και αν $x, y \in A^\circ$ τότε $\|x-y\|_2 < \mathrm{diam}(A)$.

Ισχύει το αντίστοιχο αποτέλεσμα σε *κάθε μετρικό χώρο*;

Υπόδειξη. Αν το A έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία τότε έχει κενό εσωτερικό και το ζητούμενο ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο (δεν υπάρχουν $x, y \in A^\circ$). Υποθέτουμε λοιπόν ότι το A έχει άπειρα (το «τουλάχιστον δύο» θα έφτανε) σημεία, οπότε $\mathrm{diam}(A) > 0$.

Έστω $x, y \in A^\circ$. Μπορούμε να υποθέσουε ότι $x \neq y$, αλλιώς $\|x-y\|_2 = 0 < \mathrm{diam}(A)$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(y,\delta) \subseteq A$. Το $z = y + \frac{\delta}{2}\frac{y-x}{\|y-x\|_2}$ ανήκει στην $B(y,\delta)$ διότι $\|z-y\|_2 = \frac{\delta}{2} < \delta$. Επίσης,

$$\mathrm{diam}(A) \geq \|z-x\| = \left\| \left(\|y-x\|_2 + \frac{\delta}{2} \right) \frac{y-x}{\|y-x\|_2} \right\| = \|y-x\|_2 + \frac{\delta}{2} > \|y-x\|_2.$$

Σημείωση. Δεν ισχύει το ίδιο σε κάθε μετρικό χώρο: αν πάρουμε ένα σύνολο X με τουλάχιστον δύο σημεία, και αν θεωρήσουμε την διακριτή μετρική σε αυτό και $A = X$, τότε για οποιαδήποτε δύο σημεία $x \neq y$ στο $A^\circ = A = X$ έχουμε $\delta(x,y) = 1 = \mathrm{diam}(A)$.

1.9. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω A ανοικτό υποσύνολο του X. Αν $x \in A$ και (x_n) είναι ακολουθία στον X ώστε $x_n \to x$, αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$B\big(x_n, \frac{1}{n}\big) \subseteq A.$$

Υπόδειξη. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq A$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε (α) $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ και (β) για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $B\big(x_n, \frac{1}{n}\big) \subseteq A$.

Έστω $z \in B(x_n, 1/n)$. Τότε,

$$d(z,x) \leq d(z,x_n) + d(x_n,x) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα, $z \in B(x,\varepsilon) \Longrightarrow z \in A$.

1.10. Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Έστω $m \geq 2$ και $y_1, \ldots, y_m$ διαφορετικά ανά δύο σημεία του X. Δείξτε ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο ανοικτά σύνολα $G_1, \ldots, G_m \subseteq X$ ώστε $y_i \in G_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$.

Υπόδειξη. Αν θεωρήσουμε τις ανοικτές μπάλες $G_i = B(y_i, \delta)$, όπου

$$0 < \delta < \min\left\{ \frac{d(y_i, y_j)}{2} : i \neq j \right\},$$

τότε αυτές είναι ξένες.