Πραγματική Ανάλυση (2014–15)

1. Τοπολογία μετρικών χώρων

1.1. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{1/n : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{0\}$ εφοδιασμένο με την συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$. Να βρεθούν όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $(A, |\cdot|)$.

Υπόδειξη. Κάθε $B \subseteq A$ με $0 \notin B$, είναι ανοικτό: γράφεται ως ένωση μονοσυνόλων $\{1/n\}$, καθένα από τα οποία είναι ανοικτό σύνολο (για μια εξήγηση, δείτε την Άσκηση 1.3 (ε) παρακάτω). Μένει λοιπόν να εξετάσουμε ποιά σύνολα $C \subseteq A$ με $0 \in C$ είναι ανοικτά.

Αν C είναι ένα τέτοιο σύνολο, το $0 \in C^\circ$ άρα περιέχει όλους τελικά τους $1/n$ (διότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap A \subseteq C$ και ισχύει $0 < 1/n < \varepsilon$ τελικά). Άρα, θα πρέπει το $A \setminus C$ να είναι πεπερασμένο. Αντίστροφα, κάθε $C \subseteq A$ με $0 \in C$ και $A \setminus C$ πεπερασμένο είναι ανοικτό, διότι το συμπλήρωμά του (δηλαδή, το $A \setminus C$) είναι κλειστό ως πεπερασμένο σύνολο.

1.2. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq B \subseteq X$. Δείξτε ότι: αν το A είναι πυκνό στο B και το B είναι πυκνό στο X τότε το A είναι πυκνό στο X.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τυχόν $x \in X$ και τυχόν $\varepsilon > 0$. Αφού το B είναι πυκνό στο X υπάρχει $b \in B$ ώστε $d(b, x) < \varepsilon/2$, και αφού το A είναι πυκνό στο B υπάρχει $a \in A$ ώστε $d(a, b) < \varepsilon/2$. Από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι $d(a, x) < \varepsilon$.

1.3. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική. Εξετάστε αν υπάρχει $E \subseteq \mathbb{R}$, διαφορετικό από το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$, το οποίο να έχει την εξής ιδιότητα (για καθεμία ξεχωριστά δώστε παράδειγμα με αιτιολόγηση ή αποδείξτε ότι τέτοιο σύνολο δεν μπορεί να υπάρχει):

(α) Το E είναι άπειρο σύνολο αλλά δεν έχει σημεία συσσώρευσης.

(β) Το E έχει άπειρα σημεία συσσώρευσης αλλά δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο.

(γ) Το E είναι ανοικτό αλλά δεν έχει σημεία συσσώρευσης.

(δ) Το E είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(ε) Το E είναι φραγμένο και έχει άπειρα μεμονωμένα σημεία (δηλαδή, το $E \setminus E'$ είναι άπειρο σύνολο).

Υπόδειξη. (α) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $\mathbb{Z}$: για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ ισχύει $B(m, 1/2) \cap (\mathbb{Z} \setminus \{m\}) = \emptyset$. Αν $x \notin \mathbb{Z}$ τότε, ακόμα ισχυρότερα, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

(β) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $E = \left\{m + \frac{1}{2n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$. Κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι σημείο συσσώρευσης του E: η ακολουθία $b_n = m + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει στο m και όλοι οι όροι της είναι διάφοροι του m. Το E δεν περιέχει διάστημα (διότι δεν περιέχει άρρητους) άρα δεν έχει εσωτερικά σημεία.

(γ) Δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο: ως ανοικτό και μη κενό, θα περιείχε κάποιο ανοικτό διάστημα (a, b), και κάθε $x \in (a, b)$ θα ήταν σημείο συσσώρευσης του E (εξηγήστε γιατί).

(δ) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Εξηγήστε γιατί είναι πυκνό.

(ε) Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $E = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Περιέχεται στο $[0, 1]$ και το μοναδικό σημείο συσσώρευσής του είναι το 0. Εξηγήστε γιατί: το λεπτό σημείο είναι ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $\frac{1}{n}$ είναι μεμονωμένο σημείο του E, αφού (π.χ. για $n \geq 2$) αν πάρουμε $\varepsilon_n = \frac{1}{n(n+1)} = \min\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right\} > 0$ τότε το μοναδικό σημείο του E στο $(1/n - \varepsilon_n, 1/n + \varepsilon_n)$ είναι το $1/n$.

1.4. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Αν το A είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και το F είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $A \setminus F$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(ii) Αν τα D_1, D_2 είναι πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τότε το $D_1 \cap D_2$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(iii) Αν τα C_1, C_2 είναι πυκνά και G_δ υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τότε το $C_1 \cap C_2$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. (i) Σωστό: Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A (διότι, αν τα μόνα σημεία του A ήταν τα $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$ τότε στο $(x-\varepsilon, a_1)$ δεν θα υπήρχε σημείο του A, και αυτό είναι άτοπο αφού το A είναι πυκνό). Αφού το $A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ είναι άπειρο και το F είναι πεπερασμένο, έχουμε $(A \setminus F) \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \supseteq [A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)] \setminus F \neq \emptyset$.

(ii) Λάθος: το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, όμως η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

(iii) Σωστό: από το θεώρημα Baire. Αν $C_1 = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$ και $C_2 = \bigcap_{m=1}^\infty V_m$, όπου τα U_n, V_m είναι ανοικτά σύνολα, τότε κάθε U_n και κάθε V_m είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (διότι $U_n \subseteq C_1$ και $V_m \supseteq C_2$). Ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, άρα το $C_1 \cap C_2 = (\bigcap_{n=1} U_n) \cap (\bigcap_{m=1}^\infty V_m)$ είναι πυκνό G_δ-σύνολο, ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών πυκνών συνόλων.

1.5. Έστω (X, d) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στον X και $x \in X$. Θέτουμε $A = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$. Αποδείξτε ότι:

(i) Αν $x \in A'$, τότε υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \to x$.

(ii) Αν η (x_n) είναι βασική, τότε το A' περιέχει το πολύ ένα σημείο.

(iii) Αν η (x_n) είναι βασική και $A' \neq \emptyset$, τότε η (x_n) είναι συγκλίνουσα.

Υπόδειξη. (i) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A στην $B(x, \varepsilon)$. Συνεπώς, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) στην $B(x, \varepsilon)$. Έτσι, παίρνοντας $\varepsilon = 1, 1/2, \ldots$ βρίσκουμε (διαδοχικά) $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $d(x, x_{k_n}) < \frac{1}{n}$ (στο n-οστό βήμα, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι άπειροι $x_s \in B(x, 1/n)$, άρα και κάποιος x_{k_n} με δείκτη $k_n > k_{n-1}$). Η (x_{k_n}) που ορίζεται έτσι είναι υπακολουθία της (x_n) και συγκλίνει στο x.

(ii) και (iii) μαζί: Έστω x σημείο συσσώρευσης του A. Από το προηγούμενο ερώτημα, η (x_n) έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο x. Αφού η (x_n) είναι βασική, έπεται ότι $x_n \to x$ (θεωρία). Αυτό αποδεικνύει και το (ii): αν το A είχε δύο σημεία συσσώρευσης $x \neq y$, τότε θα είχαμε $x_n \to x$ και $x_n \to y$, άτοπο.

1.6. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε η $B(x, \varepsilon_x)$ να είναι πεπερασμένο σύνολο. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο του X είναι ανοικτό σύνολο.

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι: για κάθε $x \in X$ το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι ανοικτό σύνολο. Τότε, κάθε $A \subseteq X$ γράφεται ως ένωση ανοικτών συνόλων, $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$, άρα είναι ανοικτό σύνολο.

Έστω λοιπόν $x \in X$. Από την υπόθεση υπάρχει ε_x ώστε $B(x, \varepsilon_x) = \{x\}$ ή $B(x, \varepsilon_x) = \{x, x_1, \ldots, x_N\}$, όπου $x_1, \ldots, x_N \neq x$. Στην δεύτερη περίπτωση, επιλέγουμε

$$0 < \delta < \min\{d(x, x_1), \ldots, d(x, x_N)\}.$$

Τότε, $B(x, \delta) = \{x\}$ (εξηγήστε γιατί). Σε κάθε περίπτωση, το $\{x\}$ είναι ανοικτή μπάλα κατάλληλης ακτίνας, άρα ανοικτό σύνολο.

1.7. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):

(α) Αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του X τότε για κάθε πυκνό υποσύνολο D του X ισχύει $x_0 \in D$.

(β) Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X με $d(x_n, x_m) \geq 1$ για κάθε $n \neq m$ στο $\mathbb{N}$, τότε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Υπόδειξη. (α) Σωστό. Αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του X, τότε το $\{x_0\}$ είναι ανοικτό σύνολο. Τότε, για κάθε πυκνό υποσύνολο D του X ισχύει $D \cap \{x_0\} \neq \emptyset$, άρα $x_0 \in D$ (ένα πυκνό σύνολο τέμνει κάθε ανοικτό υποσύνολο).

(β) Σωστό. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία (y_m) σημείων του A είναι βασική, άρα υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(y_m, y_{m_0}) < 1/2$ για κάθε $m \geq m_0$. Αφού οι y_m, y_{m_0} είναι όροι της (x_n), αναγκαστικά έχουμε $y_m = y_{m_0}$, δηλαδή η (y_m) είναι τελικά σταθερή και συγκλίνει στο $y_{m_0} \in A$.

1.8. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^m$ με την Ευκλείδεια μετρική. Αποδείξτε ότι: αν A είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και αν $x,y \in A^\circ$ τότε $\|x-y\|_2 < \mathrm{diam}(A)$.

Ισχύει το αντίστοιχο αποτέλεσμα σε *κάθε μετρικό χώρο*;

Υπόδειξη. Αν το A έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία τότε έχει κενό εσωτερικό και το ζητούμενο ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο (δεν υπάρχουν $x,y \in A^\circ$). Υποθέτουμε λοιπόν ότι το A έχει άπειρα (το «τουλάχιστον δύο» θα έφτανε) σημεία, οπότε $\mathrm{diam}(A) > 0$.

Έστω $x,y \in A^\circ$. Μπορούμε να υποθέσουε ότι $x \neq y$, αλλιώς $\|x-y\|_2 = 0 < \mathrm{diam}(A)$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(y,\delta) \subseteq A$. Το $z = y + \frac{\delta}{2}\frac{y-x}{\|y-x\|_2}$ ανήκει στην $B(y,\delta)$ διότι $\|z-y\|_2 = \frac{\delta}{2} < \delta$. Επίσης,

$$\mathrm{diam}(A) \geq \|z-x\| = \left\| \left(\|y-x\|_2 + \frac{\delta}{2} \right) \frac{y-x}{\|y-x\|_2} \right\| = \|y-x\|_2 + \frac{\delta}{2} > \|y-x\|_2.$$

Σημείωση. Δεν ισχύει το ίδιο σε κάθε μετρικό χώρο: αν πάρουμε ένα σύνολο X με τουλάχιστον δύο σημεία, και αν θεωρήσουμε την διακριτή μετρική σε αυτό και $A = X$, τότε για οποιαδήποτε δύο σημεία $x \neq y$ στο $A^\circ = A = X$ έχουμε $\delta(x,y) = 1 = \mathrm{diam}(A)$.

1.9. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω A ανοικτό υποσύνολο του X. Αν $x \in A$ και (x_n) είναι ακολουθία στον X ώστε $x_n \to x$, αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$B\big(x_n, \frac{1}{n}\big) \subseteq A.$$

Υπόδειξη. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq A$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε (α) $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ και (β) για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $B\big(x_n, \frac{1}{n}\big) \subseteq A$.

Έστω $z \in B(x_n, 1/n)$. Τότε,

$$d(z,x) \leq d(z,x_n) + d(x_n,x) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα, $z \in B(x,\varepsilon) \Longrightarrow z \in A$.

1.10. Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Έστω $m \geq 2$ και $y_1,\ldots,y_m$ διαφορετικά ανά δύο σημεία του X. Δείξτε ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο ανοικτά σύνολα $G_1,\ldots,G_m \subseteq X$ ώστε $y_i \in G_i$ για κάθε $i = 1,\ldots,m$.

Υπόδειξη. Αν θεωρήσουμε τις ανοικτές μπάλες $G_i = B(y_i,\delta)$, όπου

$$0 < \delta < \min\left\{ \frac{d(y_i,y_j)}{2} : i \neq j \right\},$$

τότε αυτές είναι ξένες.

2. Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

2.1. Έστω $(X,d),(Y,\sigma)$ μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

(α) Η συνάρτηση $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ με $g(x,y) = \sigma(f(x),y)$ είναι συνεχής.

(β) Το σύνολο $A = \{(x,y) \in X \times Y : f(x) \in B_\sigma(y,1)\}$ είναι ανοικτό.

Υπόδειξη. (α) Έστω $(x_n,y_n) \to (x,y)$ στον $X \times Y$. Τότε, $x_n \to x$ και $y_n \to y$ (στον $X \times Y$ εννοείται ότι έχουμε μια μετρική γινόμενο). Αφού η f είναι συνεχής και $x_n \to x$, έχουμε $f(x_n) \to f(x)$. Έπεται ότι, στον Y,

$$\sigma(f(x_n),y_n) \to \sigma(f(x),y),$$

δηλαδή $g(x_n,y_n) \to g(x,y)$. Από την αρχή της μεταφοράς, η g είναι συνεχής.

(β) Παρατηρήστε ότι

$$A = \{(x,y) : \sigma(f(x),y) < 1\} = \{(x,y) : g(x,y) < 1\} = g^{-1}((-\infty,1)).$$

Αφού η g είναι συνεχής, το A είναι ανοικτό ως αντίστροφη εικόνα του ανοικτού συνόλου $(-\infty,1)$.

2.2. Έστω $f : (X, d) \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ τα σύνολα $\{x \in X : f(x) < a\}$ και $\{x \in X : f(x) > b\}$ είναι ανοικτά.

Υπόδειξη. Αν η f είναι συνεχής τότε για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ τα σύνολα $\{x \in X : f(x) < a\} = f^{-1}((-\infty, a))$ και $\{x \in X : f(x) > b\} = f^{-1}((b, \infty))$ είναι ανοικτά σύνολα ως αντίστροφες εικόνες ανοικτών ημιευθειών.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση: θεωρούμε τυχόν $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$, και θα δείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(B(x_0, \delta)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση με $a = f(x_0) + \varepsilon$ και $b = f(x_0) - \varepsilon$, έχουμε ότι το σύνολο

$$A = \{x \in X : f(x) \in (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)\} = \{x \in X : f(x) < f(x_0)+\varepsilon\} \cap \{x \in X : f(x_0)-\varepsilon < f(x)\}$$

είναι ανοικτό σύνολο, και $x_0 \in A$, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x, \delta) \subseteq A$.

2.3. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $f : X \to X$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f \circ f = f$. Δείξτε ότι το σύνολο $f(X)$ είναι κλειστό.

Υπόδειξη. Έστω (y_n) ακολουθία στο $f(X)$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $y \in X$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in X$ ώστε $y_n = f(x_n)$. Αφού η f είναι συνεχής και $f \circ f = f$, έχουμε

$$f(y_n) = f(f(x_n)) = (f \circ f)(x_n) = f(x_n) = y_n.$$

Πάλι από την συνέχεια της f, αφού $y_n \to y$ έχουμε $y_n = f(y_n) \to f(y)$. Δηλαδή, $f(y) = y$. Άρα, $y \in f(X)$.

2.4. Έστω $f, g : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχείς συναρτήσεις και έστω $x \in X$ ώστε $f(x) \neq g(x)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $r > 0$ ώστε: για κάθε $y, z \in B(x, r)$ ισχύει $f(y) \neq g(z)$.

Υπόδειξη. Αφού $f(x) \neq g(x)$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε

$$(*) \qquad B(f(x), \varepsilon) \cap B(g(x), \varepsilon) = \emptyset.$$

Από την συνέχεια της f και της g στο x μπορούμε να βρούμε $r_1 > 0$ ώστε $f(B(x, r_1)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$ και $r_2 > 0$ ώστε $g(B(x, r_2)) \subseteq B(g(x), \varepsilon)$. Θέτουμε $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$. Τότε, αν $y, z \in B(x, r)$ έχουμε $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ και $g(z) \in B(g(x), \varepsilon)$ και από την $(*)$ έπεται ότι $f(y) \neq g(z)$.

2.5. Θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Q}$ με την συνήθη μετρική.

(α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ με την ιδιότητα $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : (\mathbb{N}, |\cdot|) \to (\mathbb{Q}, |\cdot|)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Εξετάστε αν οι $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ και $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ είναι ομοιομορφικοί.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $G_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$. Κάθε G_n είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ (εξηγήστε γιατί) και $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$.

(β) Επιλέγουμε $\delta = 1/2$. Τότε, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ έχουμε: αν $m, n \in \mathbb{N}$ και $|m - n| < 1/2$, τότε $m = n$, άρα $f(m) = f(n)$ και έπεται ότι $|f(m) - f(n)| = 0 < \varepsilon$.

(γ) Έστω $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ συνεχής, 1-1 και επί. Θεωρούμε την $q_n = \frac{1}{n} \to 0$. Τότε, $g(q_n) \to g(0)$. Αφού η $(g(q_n))$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία φυσικών, είναι τελικά σταθερή και ίση με το όριό της $g(0)$. Όμως τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $g(1/n) = g(q_n) = g(0)$ για κάθε $n \geq n_0$, και αφού η g είναι 1-1 συμπεραίνουμε ότι $1/n = 0$ για κάθε $n \geq n_0$, άτοπο. Αφού δεν υπάρχει $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ συνεχής, 1-1 και επί, δεν υπάρχει ομοιομορφισμός $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.

2.6. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:

(α) Αν οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς, τότε η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη και η g είναι συνεχής, τότε η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Αν η f είναι συνεχής και φραγμένη και η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Υπόδειξη. (α) Σωστό: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, βρίσκουμε $\eta > 0$ ώστε «για κάθε $u, v \in \mathbb{R}$ με $|u - v| < \eta$ ισχύει $|g(u) - g(v)| < \varepsilon$». Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε «για κάθε $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(y)| < \eta$». Τότε, αν $d(x, y) < \delta$, θεωρώντας τα $u = f(x)$ και $v = f(y)$ που ικανοποιούν την $|u - v| < \eta$, συμπεραίνουμε ότι $|g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$.

(β) Σωστό: η εικόνα $f(X)$ του X είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα περιέχεται σε κάποιο κλειστό διάστημα $[-M, M]$. Η $\tilde{g} = g|_{[-M,M]}$ (ο περιορισμός της g στο $[-M, M]$) είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση ως συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα. Από το (α) η σύνθεση $\tilde{g} \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Όμως, $g \circ f = \tilde{g} \circ f$ διότι $f(X) \subseteq [-M, M]$ (εξηγήστε).

(γ) Λάθος: αν ίσχυε, θεωρώντας την $g_0(x) = x$, η οποία είναι ομοιόμορφα συνεχής, θα είχαμε ότι κάθε συνεχής και φραγμένη $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, διότι $f = g0 \circ f$. Αυτό δεν ισχύει: π.χ. η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \cos(x^2)$ είναι συνεχής και φραγμένη αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2.7. Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:

(α) Αν $K \subseteq X$ είναι συμπαγές, τότε το $f(K) \subseteq Y$ είναι συμπαγές.

(β) Αν $K \subseteq X$ είναι φραγμένο, τότε το $f(K) \subseteq Y$ είναι φραγμένο.

(γ) Αν $K \subseteq X$ είναι φραγμένο και η f είναι συνάρτηση Lipschitz, τότε το $f(K) \subseteq Y$ είναι φραγμένο.

Υπόδειξη. (α) Σωστό: θεώρημα στο Κεφάλαιο 6 (δίνονται εκεί δύο διαφορετικές αποδείξεις).

(β) Λάθος: η ταυτοτική απεικόνιση $I : (\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι συνεχής και το $\mathbb{R}$ είναι φραγμένο ως προς την δ, όμως το $I(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένο με τη συνήθη μετρική.

(γ) Σωστό: η απόδειξη δίνεται στο Κεφάλαιο 4 (στην παράγραφο για τις συναρτήσεις Lipschitz).

2.8. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Είναι το σύνολο $K = \{(f(x), g(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ απαραίτητα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$;

Υπόδειξη. Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ και $g(x) = 0$ τότε βλέπουμε ότι για $x_n = n$ έχουμε ότι η $z_n := (f(x_n), g(x_n)) = (f(x_n), 0)$ είναι ακολουθία του K, η οποία συγκλίνει στο $(0, 0)$. Όμως, $(0, 0) \notin K$.

2.9. Έστω F_1, F_2 ξένα κλειστά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, d). Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $g : X \to \mathbb{R}$ φραγμένες συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει φραγμένη συνεχής συνάρτηση $h : X \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $h \equiv f$ στο F_1 και $h \equiv g$ στο F_2.

Υπόδειξη. Από το λήμμα του Urysohn υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\phi : X \to [0, 1]$ ώστε $\phi|_{F_1} = 0$ και $\phi|_{F_2} = 1$. Θεωρούμε την συνάρτηση $h : X \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) := (1 - \phi(x))f(x) + \phi(x)g(x),\ x \in X.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η h έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

2.10. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής, 1-1 συνάρτηση $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Για κάθε $t \in [0, 1]$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_t : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f_t(x) = f(t, x)$. Αφού η f είναι συνεχής και 1-1, το ίδιο ισχύει για την f_t. Άρα, η εικόνα $I_t = f_t([0, 1])$ της f_t είναι ένα κλειστό διάστημα $I_t = [a_t, b_t]$, με $a_t < b_t$.

Τα διαστήματα I_t, $0 \leq t \leq 1$, είναι ξένα (αν υπήρχε κάποιο $z \in I_t \cap I_s$, όπου $t \neq s$, τότε θα είχαμε $z = f(t, x) = f(s, y)$ για κάποια $x, y \in [0, 1]$, το οποίο είναι άτοπο διότι η f είναι 1-1). Όμως, είναι υπεραριθμήσιμα το πλήθος και αυτό οδηγεί σε άτοπο: επιλέγουμε ρητό $q_t \in I_t$ και η απεικόνιση $t \mapsto q_t$ είναι 1-1, το οποίο είναι άτοπο αφού το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.

3. Πλήρεις μετρικοί χώροι

3.1. Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{Q}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $\emptyset \neq G \subseteq X$ ανοικτό ώστε η $f|_G$ να είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Γράφουμε $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $F_n = f^{-1}(\{q_n\}) = \{x \in X : f(x) = q_n\}$. Αφού η f είναι συνεχής και το $\{q_n\}$ είναι κλειστό (ως μονοσύνολο), κάθε F_n είναι κλειστό υποσύνολο του X. Παρατηρούμε ότι

$$X = f^{-1}(\mathbb{Q}) = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{q_n\}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\{q_n\}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Ο (X,d) είναι πλήρης, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $(F_{n_0})^\circ \neq \emptyset$ (από τη δεύτερη μορφή του θεωρήματος του Baire). Θέτουμε $G = (F_{n_0})^\circ$. Τότε, το G είναι μη κενό, ανοικτό, και $f(x) = n_0$ για κάθε $x \in G$. Δηλαδή, η $f|_G$ είναι σταθερή.

3.2. Έστω (G_n) ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Υπόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο: υποθέτουμε ότι το G είναι αριθμήσιμο, οπότε γράφεται στη μορφή $G = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $U_k = \mathbb{R} \setminus \{a_k\}$. Παρατηρήστε ότι κάθε U_k είναι ανοικτό και πυκνό, και ότι

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}(\mathbb{R} \setminus \{a_k\}) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty}\{a_k\} = \mathbb{R} \setminus G.$$

Τότε,

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) = (\mathbb{R} \setminus G) \cap G = \emptyset,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού κάθε αριθμήσιμη τομή ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι πυκνό G_δ (άρα, μη κενό) σύνολο, από το θεώρημα του Baire.

3.3. Στο $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ θεωρούμε τη μετρική

$$d(x,y) = |x-y| + \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

Δείξτε ότι η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική και ότι ο (X,d) είναι πλήρης.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $x_n, x \neq 0$ και $|x_n - x| \to 0$ τότε $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$ (ως προς την $|\cdot|$) άρα

$$d(x_n,x) = |x_n - x| + \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| \to 0.$$

Αντίστροφα, αφού $|x_n - x| \leq d(x_n,x)$, αν $d(x_n,x) \to 0$ έχουμε ότι $|x_n - x| \to 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι $d(x_n,x) \to 0$ αν και μόνο αν $|x_n - x| \to 0$, δηλαδή η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική.

Για την πληρότητα: έστω (x_n) βασική ακολουθία ως προς την d. Για το τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ για κάθε $n,m \geq n_0$, άρα

$$|x_n - x_m| \leq d(x_n,x_m) < \varepsilon$$

για κάθε $n,m \geq n_0$. Δηλαδή, η (x_n) είναι βασική ως προς την συνήθη μετρική. Άρα, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $|x_n - x| \to 0$. Παράλληλα, αφού

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| \leq d(x_n,x_m) < \varepsilon$$

για κάθε $n,m \geq n_0$, έχουμε ότι η $(1/x_n)$ είναι επίσης βασική ως προς την συνήθη μετρική, άρα φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|x_n| \leq M$ για κάθε n. Αυτό δείχνει ότι $x \neq 0$: αν είχαμε $|x_n - 0| \to 0$ τότε θα είχαμε $\frac{1}{|x_n|} \to \infty$ και η $(1/x_n)$ δεν θα ήταν φραγμένη.

Είδαμε λοιπόν ότι $x_n \to x \neq 0$ ως προς την $|\cdot|$. Τότε, $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$ ως προς την $|\cdot|$, και

$$d(x_n, x) = |x_n - x| + \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| \to 0.$$

Δηλαδή, κάθε d-βασική ακολουθία (x_n) είναι συγκλίνουσα, άρα ο (X, d) είναι πλήρης.

3.4. Έστω d μετρική στο $\mathbb{Q}$ η οποία είναι ισοδύναμη με την συνήθη μετρική. Αποδείξτε ότι ο $(\mathbb{Q}, d)$ δεν είναι πλήρης.

Υπόδειξη. Γράφουμε το $\mathbb{Q}$ στη μορφή $\mathbb{Q} = \{q_k : k \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $G_k = \mathbb{Q} \setminus \{q_k\}$. Αφού η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική, κάθε G_k είναι ανοικτό και πυκνό ως προς την d (διότι είναι ανοικτό και πυκνό στον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ – εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Αν ο $(\mathbb{Q}, d)$ ήταν πλήρης, θα είχαμε ότι η τομή $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ είναι d-πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{Q}$, από το θεώρημα του Baire. Όμως, $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \emptyset$ και έτσι καααλήγουμε σε άτοπο.

3.5. Σωστό ή λάθος; Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, και αν

$$F_m = f^{-1}([-m, m]) = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq m\},$$

τότε τουλάχιστον ένα F_m περιέχει διάστημα.

Υπόδειξη. Σωστό. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Αφού η f είναι συνεχής, το $F_m = f^{-1}([-m.m])$ είναι κλειστό σύνολο (αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου).

Παρατηρούμε ότι $\mathbb{R} = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $m_x \in \mathbb{N}$ ώστε $|f(x)| \leq m_x$, και τότε $x \in F_{m_x} \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$.

Αφού ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι πλήρης, εφαρμόζοντας τη δεύτερη μορφή του θεωρήματος του Baire συμπεραίνουμε ότι υπάρχει m ώστε το F_m να έχει μη κενό εσωτερικό (τότε, το F_m περιέχει διάστημα).

3.6. Έστω (X, d), (Y, σ) μετρικοί χώροι και έστω $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $y \in Y$ ορίζουμε

$$A_y = \{x \in X : f(x) = y\} = f^{-1}(\{y\}).$$

Δείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε για κάθε $y, y' \in f(X)$ με $y \neq y'$, ισχύει $\mathrm{dist}(A_y, A_{y'}) > 0$.

(β) Αν ο (X, d) είναι πλήρης και ο Y είναι αριθμήσιμος, υπάρχει $y \in Y$ ώστε $(A_y)^{\circ} \neq \emptyset$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $y, y' \in f(X)$ με $y \neq y'$ και $\mathrm{dist}(A_y, A_{y'}) = 0$. Τότε, μπορούμε να βρούμε $x_n \in A_y$ και $x_n' \in A_{y'}$ με $d(x_n, x_n') \to 0$. Αφού η f είναθ ομοιόμορφα συνεχής, έπεται ότι $\sigma(f(x_n), f(x_n')) \to 0$. Όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f(x_n) = y$ διότι $x_n \in A_y$ και $f(x_n') = y'$ διότι $x_n' \in A_{y'}$. Άρα, $\sigma(f(x_n), f(x_n')) = \sigma(y, y')$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\sigma(y, y') = 0$, δηλαδή $y = y'$. Αυτό είναι άτοπο.

(β) Έστω ότι $Y = \{y_k : k \in \mathbb{N}\}$. Κάθε $A_k = f^{-1}(\{y_k\})$ είναι κλειστό υποσύνολο του (X, d) διότι η f είναι συνεχής και το $\{y_k\}$ κλειστό. Αφού ο (X, d) είναι πλήρης και

$$X = f^{-1}(Y) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(\{y_k\}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

το ζητούμενο έπεται από τη δεύτερη μορφή του θεωρήματος του Baire.

3.7. Έστω $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ άπειρο αριθμήσιμο σύνολο και έστω d μετρική στο X ώστε ο (X, d) να είναι πλήρης. Δείξτε ότι ο (X, d) έχει μεμονωμένο σημείο.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι κάθε x_n είναι σημείο συσσώρευσης του X. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $G_n = X \setminus \{x_n\}$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X (ισχύει $x_n \in \overline{G_n}$, άρα $\overline{G_n} = X$ – εξηγήστε γιατί). Από το θεώρημα του Baire η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό G_δ σύνολο. Όμως,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \{x_n\}) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\} = X \setminus X = \emptyset,$$

το οποίο είναι άτοπο.

3.8. Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής, επί και $d(x, y) \leq \sigma(f(x), f(y))$ για κάθε $x, y \in X$. Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για τις ακόλουθες προτάσεις:

(i) Αν ο (X, d) είναι πλήρης τότε ο (Y, σ) είναι πλήρης.

(ii) Αν ο (Y, σ) είναι πλήρης τότε ο (X, d) είναι πλήρης.

Υπόδειξη. (i) *Σωστό.* Έστω (y_n) βασική στον Y. Αφού η f είναι επί, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in X$ ώστε $f(x_n) = y_n$. Από την υπόθεση,

$$d(x_n, x_m) \leq \sigma(f(x_n), f(x_m)) = \sigma(y_n, y_m),$$

που αποδεικνύει ότι η (x_n) είναι βασική στον X. Αφού ο X είναι πλήρης, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{d} x$. Εφόσον η f είναι συνεχής έπεται ότι $y_n = f(x_n) \to f(x) \in Y$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο (Y, σ) είναι πλήρης.

(ii) *Λάθος.* Αν θεωρήσουμε τους $X = (-\pi/2, \pi/2)$ και $Y = \mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική και την συνάρτηση $f : X \to Y$ με $f(x) = \tan x$, τότε έχουμε $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ για κάθε $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$ (χρησιμοποιήστε το θεώρημα μέσης τιμής και το γεγονός ότι $|f'| \geq 1$ στο $\mathbb{R}$) και η f είναι συνεχής και επί. Παρατηρήστε ότι ο Y είναι πλήρης, ενώ ο X δεν είναι πλήρης.

3.9. Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $f_n : X \to \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \ldots$ συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι: είτε υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $f_n(x_0) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή υπάρχουν $\emptyset \neq G \subseteq X$ ανοικτό και $k \in \mathbb{N}$ ώστε $f_k(x) = 0$ για κάθε $x \in G$.

Υπόδειξη. Αν δεν ισχύει η πρώτη περίπτωση, τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι: αν $Z_n = \{x \in X : f_n(x) = 0\} = f_n^{-1}(\{0\})$, τότε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. Παρατηρήστε ότι κάθε Z_n είναι κλειστό, οπότε από το θεώρημα του Baire υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}(Z_k) \neq \emptyset$. Θέτουμε $G = \mathrm{int}(Z_k)$ και παρατηρούμε ότι G είναι ανοικτό στον X και $f_k|_G = 0$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

3.10. Έστω $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών. Θεωρούμε την $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με

$$d(m, n) = 1 + \frac{1}{m + n}$$

αν $m \neq n$ και $d(m, n) = 0$ αν $m = n$.

(α) Δείξτε ότι η d είναι μετρική.

(β) Δείξτε ότι ο $(\mathbb{N}, d)$ είναι πλήρης.

(γ) Δείξτε ότι: στον $(\mathbb{N}, d)$ υπάρχει φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες που η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

Υπόδειξη. (α) Αρκεί να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα στην περίπτωση όπου οι m, n, k είναι διαφορετικοί ανά δυο. Σε αυτήν την περίπτωση εύκολα έχουμε,

$$d(n, m) + d(m, k) > 2 > 1 + \frac{1}{n + k} = d(n, k).$$

(β) Έστω $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ βασική ακολουθία στον $(\mathbb{N}, d)$. Τότε, υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $i, j \geq i_0$ να έχουμε $d(n_i, n_j) < 1/2$. Αναγκαστικά, $n_i = n_j$. Αλλιώς, θα είχαμε

$$d(n_i, n_j) < 1/2 \iff n_i + n_j < 2,$$

το οποίο είναι αδύνατο αφού για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ έχουμε $m + n \geq 2$. Έπεται ότι η (n_i) είναι τελικά σταθερή, άρα συγκλίνει.

(γ) Θέτουμε $r_n = 1 + \frac{1}{2n}$ και θεωρούμε τις κλειστές μπάλες $B_n := \hat{B}_d(n, r_n)$. Παρατηρήστε ότι $B_n = \{n, n + 1, \ldots\}$, οπότε $B_n \supseteq B_{n+1}$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$.

4. Συμπαγείς μετρικοί χώροι

4.1. Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y,σ) μετρικός χώρος και $f:X\to Y$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι: αν $K\subseteq Y$ είναι συμπαγές τότε το $f^{-1}(K)\subseteq X$ είναι συμπαγές.

Υπόδειξη. Έστω K συμπαγές υποσύνολο του Y. Τότε, το K είναι κλειστό, και αφού η f είναι συνεχής, το $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Αφού ο X είναι συμπαγής, έπεται ότι το $f^{-1}(K)$ είναι συμπαγές.

4.2. Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $f:X\to X$ συνεχής. Ορίζουμε μια ακολουθία υποσυνόλων του X ώς εξής: $K_1=X$ και $K_{n+1}=f(K_n)$ για κάθε $n\geq 1$. Αποδείξτε ότι η $\{K_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του X. Αν $K=\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$, αποδείξτε ότι $K\neq\emptyset$ και $f(K)=K$.

Υπόδειξη. Έχουμε $K_2=f(X)\subseteq X=K_1$ και, επαγωγικά, αν $K_n\subseteq K_{n-1}$ τότε $f(K_n)\subseteq f(K_{n-1})$, δηλαδή $K_{n+1}\subseteq K_n$.

Ορίζουμε $K=\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$. Το K είναι μη κενό συμπαγές υποσύνολο του X (από την ιδιότητα πεπερασμένων τομών). Είναι άμεσο ότι $f(K)\subseteq K_n$ για κάθε n, άρα $f(K)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n=K$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, θεωρούμε τυχόν $x\in K$. Τότε, $x\in f(K_n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έπεται ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $z_n\in K_n$ ώστε $x=f(z_n)$. Η (z_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (z_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $z\in X$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $z\in K_m$ για κάθε $m\in\mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Πράγματι, αν $m\in\mathbb{N}$ τότε η $(z_{k_n})_{n\geq m}$ βρίσκεται μέσα στο $K_{k_m}\subseteq K_m$. Αφού το K_m κλειστό και η $(z_{k_n})_{n\geq m}$ συγκλίνει στο z, το ζητούμενο έπεται.

4.3. Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $f:X\to X$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X ώστε $d(x_n,f(x_n))\to 0$. Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο.

Υπόδειξη. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $x\in X$ και υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n}\to x$. Αφού η f είναι συνεχής, παίρνουμε $f(x_{k_n})\to f(x)$. Επομένως,

$$0=\lim_{n\to\infty}d(x_n,f(x_n))=\lim_{n\to\infty}d(x_{k_n},f(x_{k_n}))=d(x,f(x)),$$

κι έχουμε το ζητούμενο.

4.4. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω D πυκνό υποσύνολο του X. Αν κάθε ακολουθία στοιχείων του D έχει υπακολουθία που συγκλίνει (στον X) δείξτε ότι ο (X,d) είναι συμπαγής.

Υπόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία στον X. Αφού το D είναι πυκνό, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $z_n\in D$ ώστε $d(x_n,z_n)<\frac{1}{n}$. Από την υπόθεση, η (z_n) έχει υπακολουθία (z_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $z\in X$. Τότε,

$$d(x_{k_n},z)\leq d(x_{k_n},z_{k_n})+d(z_{k_n},z)<\frac{1}{k_n}+d(z_{k_n},z)\to 0,$$

διότι $k_n\to\infty$. Άρα, $x_{k_n}\to x$. Έπεται ότι ο (X,d) είναι (ακολουθιακά) συμπαγής.

4.5. Έστω (X,d) μετρικός χώρος με την εξής ιδιότητα: κάθε συνεχής συνάρτηση $f:X\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη. Δείξτε ότι ο (X,d) είναι συμπαγής.

Υπόδειξη. Αν ο (X,d) είναι συμπαγής τότε γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f:X\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη. Για το αντίστροφο, αν υποθέσουμε ότι ο X δεν είναι συμπαγής τότε μπορούμε να βρούμε ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε το σύνολο $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ να μην έχει σημεία συσσώρευσης. Άρα, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon_n>0$ τέτοια ώστε οι κλειστές μπάλες $\overline{B(x_n,\varepsilon_n)}$ να είναι ξένες (βρίσκουμε πρώτα $\delta_n>0$ ώστε $B(x_n,\delta_n)\cap(A\setminus\{x_n\})=\emptyset$ και κατόπιν θέτουμε $\varepsilon_n=\frac{1}{3}\min\{\delta_1,\ldots,\delta_n\}$ – εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Ορίζουμε $f:X\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1-\frac{d(x,x_n)}{\varepsilon_n}\right)\chi_{B(x_n,\varepsilon_n)}(x).$$

Τότε, η f είναι συνεχής (εξηγήστε γιατί) και $f(x_n)=n\to\infty$, άρα η f δεν είναι φραγμένη.

4.6. Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν ο X είναι συμπαγής τότε για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει ότι $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Υπόδειξη. Έστω $A \subseteq X$. Αφού η f είναι συνεχής, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Από την άλλη πλευρά, αφού ο X είναι συμπαγής και το $\overline{A}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, έχουμε ότι το $\overline{A}$ είναι συμπαγές σύνολο, και αφού η f είναι συνεχής, το $f(\overline{A})$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y. Ειδικότερα, το $f(\overline{A})$ είναι κλειστό, και αφού $f(A) \subseteq f(\overline{A})$ (διότι $A \subseteq \overline{A}$) έπεται ότι $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

Έπεται ότι $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

4.7. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

(i) Αν $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ είναι ομοιομορφισμός και ο X είναι ολικά φραγμένος, τότε και ο Y θα είναι ολικά φραγμένος.

(ii) Αν (x_n) είναι βασική ακολουθία σε έναν μετρικό χώρο (X, ρ), τότε το σύνολο $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο.

Υπόδειξη. (i) *Λάθος.* Αν θεωρήσουμε τους $X = (-/pi/2, \pi/2)$ και $Y = \mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, τότε η $f : X \to Y$ με $f(x) = \tan x$ είναι ομοιομορφισμός. Όμως, ο X είναι ολικά φραγμένος ενώ ο Y όχι.

(ii) *Σωστό.* Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (X, ρ) και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Ειδικότερα, $x_n \in B(x_{n_0}, \varepsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Έπεται ότι

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_{n_0}, \varepsilon).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, το A είναι ολικά φραγμένο.

4.8. Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω (K_n) φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X ώστε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ να είναι μονοσύνολο. Δείξτε ότι $\mathrm{diam}(K_n) \to 0$.

Υπόδειξη. Έστω x_0 το μοναδικό σημείο του $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ και έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι: αν $G_n = X \setminus K_n$ τότε κάθε G_n είναι ανοικτό και

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus K_n) = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = X \setminus \{x_0\}.$$

Συνεπώς,

$$X = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \right) \cup B(x_0, \varepsilon/2).$$

Αυτό σημαίνει ότι η οικογένεια $\{G_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{B(x_0, \varepsilon/2)\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του X. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ ώστε

$$X = G_{n_1} \cup G_{n_2} \cup G_{n_k} \cup B(x_0, \varepsilon/2).$$

Όμως, $K_{n_1} \supseteq \cdots \supseteq K_{n_k}$, άρα $G_{n_1} \subseteq \cdots \subseteq G_{n_k}$. Συνεπώς,

$$X = G_{n_k} \cup B(x_0, \varepsilon/2) = (X \setminus K_{n_k}) \cup B(x_0, \varepsilon/2).$$

Έπεται ότι $K_{n_k} \subseteq B(x_0, \varepsilon/2)$. Άρα, για κάθε $n \geq n_k$ έχουμε $K_n \subseteq B(x_0, \varepsilon/2)$, και

$$\mathrm{diam}(K_n) \leq \mathrm{diam}(B(x_0, \varepsilon/2)) \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\mathrm{diam}(K_n) \to 0$.

4.9. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $x_0 \in X$. Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $X \setminus B(x_0, \varepsilon)$ είναι συμπαγές, αποδείξτε ότι ο (X, d) είναι συμπαγής.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τυχούσα ανοικτή κάλυψη $(U_i)_{i \in I}$ του X. Υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x_0 \in U_{i_0}$. Αφού το U_{i_0} είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε $B(x_0, \varepsilon_0) \subseteq U_{i_0}$.

Θεωρούμε το $X \setminus B(x_0, \varepsilon_0)$. Από την υπόθεση είναι συμπαγές σύνολο και περιέχεται στην $\bigcup_{i\in I} U_i$. Συνεπώς, υπάρχουν $i_1, \ldots, i_m \in I$ ώστε

$$X \setminus B(x_0, \varepsilon_0) \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}.$$

Έπεται ότι

$$X = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}.$$

Με βάση τον ορισμό, ο (X, d) είναι συμπαγής.

4.10. Αν A, B είναι δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι το σύνολο

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

είναι συμπαγές.

Υπόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία στο $A + B$. Τότε, κάθε x_n γράφεται στη μορφή $x_n = a_n + b_n$, όπου $a_n \in A$ και $b_n \in B$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to a \in A$. Αφού το B είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία $(b_{k_{\lambda_n}})$ της (b_{k_n}) ώστε $b_{k_{\lambda_n}} \to b \in B$. Αφού η $(a_{k_{\lambda_n}})$ είναι υπακολουθία της (a_{k_n}) και $a_{k_n} \to a$, έχουμε $a_{k_{\lambda_n}} \to a$. Τότε,

$$x_{k_{\lambda_n}} = a_{k_{\lambda_n}} + b_{k_{\lambda_n}} \to a + b.$$

Δηλαδή, η (x_n) έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του $A + B$. Έπεται ότι το $A + B$ είναι συμπαγές.

5. Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

5.1. Αν $f_n, g_n : [0, 1] \to [0, 1]$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και $f_n \to f$, $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$, δείξτε ότι η ακολουθία (h_n) όπου $h_n = f_n \circ g_n$ (δηλ. $h_n(t) = f_n(g_n(t))$) συγκλίνει ομοιόμορφα στην $h = f \circ g$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι αφού οι f_n, g_n είναι συνεχείς και $f_n \to f$, $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$, οι f, g είναι συνεχείς. Για κάθε $t \in [0, 1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} |h(t) - h_n(t)| &= |f(g(t)) - f_n(g_n(t))| \leq |f(g(t)) - f(g_n(t))| - |f(g_n(t)) - f_n(g_n(t))| \\ &= |f(g(t)) - f(g_n(t))| - |(f - f_n)(g_n(t))| \leq |f(g(t)) - f(g_n(t))| + \|f - f_n\|_\infty. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $u, v \in [0, 1]$ και $|u - v| < \delta$, τότε $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon/2$ (αυτό γίνεται, γιατί η f είναι ομοιόμορφα συνεχής). Στη συνέχεια βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: $\|g - g_n\|_\infty < \delta$ και $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_0$ (αυτό γίνεται, γιατί $f_n \to f$, $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$). Τότε, για κάθε $t \in [0, 1]$ και για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|g(t) - g_n(t)| < \delta$, άρα

$$|h(t) - h_n(t)| \leq |f(g(t)) - f(g_n(t))| + \|f - f_n\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\|h - h_n\|_\infty \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, $h_n \to h$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

5.2. Έστω (f_n) ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0, 1) \to \mathbb{R}$ με $f_n \geq f_{n+1} \geq \cdots \geq 0$ και $f_n \to 0$ κατά σημείο. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Για κάθε $a \in [0, 1)$ η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, a]$.

(ii) Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1)$.

Υπόδειξη. (i) *Σωστό.* Στο συμπαγές $[0, a]$ η (f_n) ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Dini: οι f_n είναι συνεχείς, $f_n \geq f_{n+1} \geq \cdots \geq 0$ και $f_n \to 0$ κατά σημείο. Άρα, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.
(ii) *Λάθος.* Η ακολουθία $f_n(x) = x^n$ ικανοποιεί τις υποθέσεις στο $[0, 1)$: έχουμε ότι οι f_n είναι συνεχεία, $f_n \geq f_{n+1} \geq \cdots \geq 0$ και $f_n \to 0$ κατά σημείο. Όμως, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|f_n\|_\infty = \sup\{x^n : 0 \leq x < 1\} = 1 \not\to 0.$$

5.3. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων και έστω ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα, όπου $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν κάθε f_n έχει ρίζα, δείξτε ότι η f έχει ρίζα.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in [0,1]$ ώστε $f_n(x_n) = 0$. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \to x \in [0,1]$. Τότε,

$$(*) \qquad \begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f_{k_n}(x_{k_n})| \leq |f(x) - f(x_{k_n})| + |f(x_{k_n}) - f_{k_n}(x_{k_n})| \\ &\leq |f(x) - f(x_{k_n})| + \|f - f_{k_n}\|_\infty \to 0 \end{aligned}$$

διότι $f(x_{k_n}) \to f(x)$ από την αρχή της μεταφοράς για τη συνεχή συνάρτηση f στο σημείο x, και $\|f - f_{k_n}\|_\infty \to 0$ λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης των f_n (άρα και των f_{k_n}) στην f.

Από την $(*)$ έπεται άμεσα ότι $f(x) = 0$, δηλαδή η f έχει ρίζα.

5.4. (α) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις ακολουθίες συναρτήσεων $f_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, όπου

$$f_n(x) = x^n \qquad \text{και} \qquad g_n(x) = x^n(1-x).$$

(β) Εξετάστε για ποιά $x \geq 0$ συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}.$$

Για ποιές τιμές του $a > 0$ είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο διάστημα $[0,a]$;

Υπόδειξη. (α) Εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n(x) \to f(x)$, όποτ $f(x) = 0$ αν $0 \leq x < 1$ και $f(1) = 1$. Αφού οι f_n είναι συνεχείς και η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x = 1$, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη. Για την g_n παρατηρούμε ότι $g_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x)$, άρα η g_n παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο $\frac{n}{n+1}$. Έπεται ότι

$$\|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Αφού $\|g_n\|_\infty \to 0$, έχουμε $g_n \to 0$ ομοιόμορφα.

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει αν $0 \leq x < 1$ και αποκλίνει αν $x \geq 1$. Η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}$ συγκλίνει αν $0 \leq x \leq 1$ και αποκλίνει αν $x > 1$.

Η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,a]$ για κάθε $0 < a < 1$. Πράγματι, αν $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ τότε $\|f_n\|_\infty = \frac{a^n}{n}$ στο $[0,a]$, και αφού $\sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n} < \infty$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass. Αν $a \geq 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα, διότι τότε θα συνέκλινε για $x = 1$.

Η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,a]$ για κάθε $0 < a \leq 1$. Πράγματι, αν $g_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$ τότε $\|g_n\|_\infty = \frac{a^n}{n^2}$ στο $[0,a]$, και αφού $\sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n^2} < \infty$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass. Αν $a > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα, διότι τότε θα συνέκλινε για $x \in (1,a]$.

5.5. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{n}x}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$. Εξετάστε αν $f_n \to 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a,\infty)$, $a > 0$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $e^{\sqrt{n}x} > \frac{(\sqrt{n}x)^4}{24} = \frac{x^4n^2}{24}$ για κάθε $x > 0$ (γενικότερα, αν $y > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ τότε $e^y > y^k/k!$). Άρα,

$$0 < nxe^{-\sqrt{n}x} \leq \frac{24nx}{x^4n^2} = \frac{24}{x^3n} \to 0$$

για κάθε $x > 0$. Επίσης, $f_n(0) = 0 \to 0$. Έτσι, έχουμε $f_n \to 0$ κατά σημείο. Όμως,

$$\|f_n\|_\infty \geq f_n(1/\sqrt{n}) = \sqrt{n}e^{-1} \to +\infty$$

καθώς το $n \to \infty$. Άρα, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Έστω $a > 0$. Όπως πριν, για κάθε $x \in [a, \infty)$ έχουμε

$$0 < nxe^{-\sqrt{n}x} \leq \frac{24}{x^3 n} \leq \frac{24}{a^3 n},$$

άρα $\|f_n\|_\infty \leq \frac{24}{a^3 n} \to 0$ (στο $[a, \infty)$) και έπεται ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[a, \infty)$.

5.6. Έστω $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Δείξτε ότι:

(i) Η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f;

(ii) Για κάθε $a > 0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, \infty)$, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, a]$.

Υπόδειξη. (i) Για $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \to 0$. Για $x > 0$ έχουμε

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx+1} = \frac{x}{x + \frac{1}{n}} \to 1.$$

Άρα, $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου $f(x) = 1$ αν $x > 0$ και $f(x) = 0$ αν $x = 0$.

(ii) Έστω $a > 0$. Η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[0, a]$, διότι οι f_n είναι συνεχείς ενώ η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x = 0$. Στο $[a, \infty)$ έχουμε $f_n \to f \equiv 1$ κατά σημείο, και

$$|f_n(x) - 1| = \left| \frac{nx}{nx+1} - 1 \right| = \frac{1}{nx+1} \leq \frac{1}{na+1}$$

για κάθε $x \geq a$, άρα

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\left\{ \left| \frac{nx}{nx+1} - 1 \right| : x \geq a \right\} = \frac{1}{na+1} \to 0,$$

άρα $f_n \to f \equiv 1$ ομοιόμορφα.

5.7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και έστω (δ_n) ακολουθία με $\delta_n > 0$ για κάθε n και $\delta_n \to 0$. Θέτουμε $f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $u, v \in \mathbb{R}$ και $|u - v| < \delta$ τότε $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$.

Αφού $\delta_n \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \delta_n < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t \in [x, x + \delta_n]$ έχουμε $|t - x| \leq \delta_n < \delta$, άρα $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$. Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t)dt - f(x) \right| = \left| \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} (f(t) - f(x))\, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} |f(t) - f(x)|\, dt \leq \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} \varepsilon\, dt \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \varepsilon.$$

Έπεται ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

5.8. (α) Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$$

συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό διάστημα $[-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{R}$.

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ είναι συνεχής.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left|\frac{x\sin(n^2x)}{n^2}\right| \leq \frac{|x|}{n^2},$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2} = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, άρα η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$$

συγκλίνει (απολύτως) κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

Έστω $\alpha > 0$. Αν ορίσουμε $f_n(x) = \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ έχουμε

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x\sin(n^2x)}{n^2}\right| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{|\alpha|}{n^2}$$

για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$, άρα $\|f_n\|_\infty \leq \frac{|\alpha|}{n^2}$ στο $[-\alpha, \alpha]$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha|}{n^2} < \infty$, το κριτήριο του Weierstrass μας εξασφαλίζει ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha, \alpha]$.

(β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε $\alpha > 0$ ώστε $-\alpha < x < \alpha$. Αφού οι f_n είναι συνεχείς στο $[-\alpha, \alpha]$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha, \alpha]$, συμπεραίνουμε ότι η $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ είναι συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$. Ειδικότερα, η f είναι συνεχής στο x.

Αφού το $x \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

5.9. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω (K_n) φθίνουσα ακολουθία μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του X. Ορίζουμε $f_n(x) = \mathrm{dist}(x, K_n)$. Δείξτε ότι υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Ποιά είναι η f;

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ είναι μη κενό συμπαγές σύνολο. Η ακολουθία (K_n) είναι φθίνουσα, άρα η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \mathrm{dist}(x, K_n)$ είναι αύξουσα. Επίσης, αφού $K \subseteq K_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $f_n(x) = \mathrm{dist}(x, K_n) \leq \mathrm{dist}(x, K)$. Συνεπώς, για κάθε $x \in X$ υπάρχει το $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ και $f(x) \leq \mathrm{dist}(x, K)$.

Έστω $x \in X$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_n \in K_n$ ώστε $f_n(x) = \mathrm{dist}(x, K_n) = d(x, z_n)$. Η ακολουθία (z_n) περιέχεται στο συμπαγές σύνολο K_1, άρα έχει υπακολουθία (z_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $z \in X$, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η (K_n) είναι φθίνουσα ελέγχουμε ότι $z \in K$ (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Τότε,

$$\mathrm{dist}(x, K) \leq d(x, z) = \lim_{n\to\infty} d(x, z_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $f(x) = \mathrm{dist}(x, K)$.

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Για το σκοπό αυτό αποδεικνύουμε το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$(*) \qquad K_n \subseteq K_\varepsilon = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, K) < \varepsilon\}.$$

Αν αποδείξουμε αυτό, τότε για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$ βρίσκουμε $z_n(x) \in K_n$ με $f_n(x) = d(x, z_n(x))$ και $y_n(x) \in K$ με $d(z_n(x), y_n(x)) < \varepsilon$, και γράφουμε

$$f_n(x) \leq f(x) \leq d(x, y_n(x)) \leq d(x, z_n(x)) + d(z_n(x), y_n(x)) < f_n(x) + \varepsilon,$$

απ' όπου έπεται ότι $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Για την απόδειξη της $(*)$ μιμούμαστε την απάντηση της Άσκησης 4.8: αν $G_n = X \setminus K_n$ τότε κάθε G_n είναι ανοικτό και

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus K_n) = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = X \setminus K.$$

Συνεπώς,
$$X = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \right) \cup K_\varepsilon.$$
Παρατηρούμε ότι το K_ε είναι ανοικτό (εξηγήστε γιατί). Άρα, η οικογένεια $\{G_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{K_\varepsilon\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του X. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ ώστε
$$X = G_{n_1} \cup G_{n_2} \cup G_{n_k} \cup K_\varepsilon.$$
Όμως, $K_{n_1} \supseteq \cdots \supseteq K_{n_k}$, άρα $G_{n_1} \subseteq \cdots \subseteq G_{n_k}$. Συνεπώς,
$$X = G_{n_k} \cup K_\varepsilon = (X \setminus K_{n_k}) \cup K_\varepsilon.$$
Έπεται ότι $K_{n_k} \subseteq K_\varepsilon$. Άρα, για κάθε $n \geq n_k$ έχουμε $K_n \subseteq K_\varepsilon$.

5.10. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $E \subseteq X$. Δείξτε ότι το E είναι F_σ-σύνολο αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ ώστε $E = \{x \in X : \sup_n |f_n(x)| < \infty\}$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ ώστε $E = \{x \in X : \sup_n |f_n(x)| < \infty\}$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε
$$F_k = \{x \in X : \sup_n |f_n(x)| \leq k\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : |f_n(x)| \leq k\}.$$
Παρατηρήστε ότι κάθε F_k είναι κλειστό σύνολο ως τομή κλειστών συνόλων. Επίσης,
$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$
άρα το E είναι F_σ-σύνολο.

Το αντίστροφο αφήνεται για εσάς!