8.3 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$. Αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

2. Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν ισχύει $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \int_0^1 x^n g(x)\,dx$ για κάθε $n = 0, 1, \ldots$ δείξτε ότι $f \equiv g$.

3. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$ δείξτε ότι $f \equiv 0$.

4. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας πολυωνύμων $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $p_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $\int_0^1 p_n(x)\,dx \to 1$.

5. Δώστε παράδειγμα συνεχούς και φραγμένης συνάρτησης $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε να μην υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $p_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ με $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $(0,1]$.

6. (α) Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) < p(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $e^x \leq q(x) \leq e^{2x}$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(γ) Αν $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to h$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

7. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_\infty < \varepsilon$.

Ομάδα Β΄

8. Δείξτε ότι ο $\mathcal{C}([0,1])$ είναι διαχωρίσιμος.

9. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι $|B_n(f)| \leq B_n(|f|)$ και $B_n(f) \geq 0$ αν $f \geq 0$.

(β) Δείξτε ότι $\|B_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

10. Έστω $0 < a < b < 1$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολυωνύμων *με ακέραιους συντελεστές*, ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

11. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία δεν είναι πολυώνυμο. Αν (p_n) είναι ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι $\deg(p_n) \to \infty$.

12. Έστω $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

(α) Αν η f δεν είναι σταθερή, δείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[1, \infty)$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n(\frac{1}{x}) \to f(x)$ ομοιόμορφα ως προς x στο $[1, \infty)$.

13. Δείξτε ότι το σύνολο των πολυωνύμων (των περιορισμών τους στο $[0, 1]$) είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον $\mathcal{C}([0, 1])$.