Πραγματική Ανάλυση (2010–11)
Μετρικοί χώροι – Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι η νόρμα είναι άρτια συνάρτηση και ικανοποιεί την ανισότητα

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|$$

για κάθε $x, y \in X$.

2. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:
(α) $|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leq \rho(x,y)$ για κάθε $x, y, z \in X$.
(β) $|\rho(x,y) - \rho(z,w)| \leq \rho(x,z) + \rho(y,w)$ για κάθε $x, y, z, w \in X$.

3. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\sigma(a,b) = \sqrt{|a-b|}$. Αποδείξτε ότι ο $(\mathbb{R}, \sigma)$ είναι μετρικός χώρος.

Γενικότερα, δείξτε ότι: αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και αν θεωρήσουμε την $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x,y) = \sqrt{\|x - y\|}, \quad x, y \in X,$$

τότε ο (X, d) είναι μετρικός χώρος.

4. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\rho_1 = \min\{d, 1\}$, $\rho_2 = \frac{d}{1+d}$ και $d_\alpha = d^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ είναι μετρικές στο X.

5. Αν d_1, d_2 είναι μετρικές στο σύνολο X εξετάστε αν οι $d_1 + d_2$, $\max\{d_1, d_2\}$, $\min\{d_1, d_2\}$ είναι μετρικές στο X. Αν η d είναι μετρική στο X, είναι η d^2 μετρική στο X;

6. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες της διαμέτρου:
(α) $\mathrm{diam}(A) = 0$ αν και μόνο αν $A = \emptyset$ ή το A είναι μονοσύνολο (δηλαδή, $A = \{x\}$ για κάποιο $x \in X$).
(β) Αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε $\mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(B)$.
(γ) Αν $A, B \subseteq X$ τότε ισχύει η ανισότητα

$$\mathrm{diam}(A \cap B) \leq \min\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leq \max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leq \mathrm{diam}(A \cup B).$$

Ισχύει η ανισότητα

$$\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$$

για κάθε ζευγάρι υποσυνόλων A, B του X;
(δ) Αν (A_n) είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$, δείξτε ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι το πολύ μονοσύνολο (έχει το πολύ ένα στοιχείο).

7. Δείξτε ότι ένα υποσύνολο A του μετρικού χώρου (X, ρ) είναι φραγμένο αν και μόνον αν υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ ώστε $\rho(a, x_0) \leq r$ για κάθε $a \in A$.

8. Έστω $A_1, \ldots, A_k$ φραγμένα μη κενά υποσύνολα του μετρικού χώρου (X, ρ). Δείξτε ότι το σύνολο $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ είναι επίσης φραγμένο.

Ομάδα Β΄

9. (α) Έστω $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ αύξουσα συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι η f είναι *υποπροσθετική*, δηλ. $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \geq 0$. Δείξτε ότι: αν η d είναι μετρική στο X τότε και η $f \circ d$ είναι μετρική στο X.

(β) Αποδείξτε ότι αν $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^+$, τότε καθεμιά από τις ακόλουθες ιδιότητες είναι ικανή να εξασφαλίσει την υποπροσθετικότητα της f:

(i) Η f είναι κοίλη συνάρτηση.

(ii) Η συνάρτηση $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ είναι φθίνουσα.

(γ) Χρησιμοποιώντας τα (α) και (β) δείξτε ότι οι συναρτήσεις της Άσκησης 4 είναι μετρικές.

10. (*Ανισότητα Hölder για συναρτήσεις*) Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και p, q συζυγείς εκθέτες (δηλ. $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Δείξτε ότι

$$\int_0^1 |f(t)g(t)|\, dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g(t)|^q\, dt\right)^{1/q}.$$

11. Δείξτε ότι ο χώρος $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_p)$ με

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$$

είναι χώρος με νόρμα.

12. Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{S}$ όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Έστω (m_k) ακολουθία θετικών αριθμών, με $\sum_k m_k < +\infty$. Ορίζουμε απόσταση d στον $\mathcal{S}$ ως εξής: αν $x = (x(n))$, $y = (y(n)) \in \mathcal{S}$, θέτουμε

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \frac{|x(n) - y(n)|}{1 + |x(n) - y(n)|}.$$

Δείξτε ότι ο $(\mathcal{S}, d)$ είναι μετρικός χώρος, και υπολογίστε τη διάμετρό του.

13. Έστω $\mathcal{P}$ το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Αν $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ είναι ένα πολυώνυμο από το $\mathcal{P}$, το *ύψος* του p είναι το

$$h(p) = \max\{|a_i| : i = 0, 1, \ldots, n\}.$$

(α) Δείξτε ότι ο $\mathcal{P}$ είναι γραμμικός χώρος με τις πράξεις κατά σημείο και η συνάρτηση $h : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ είναι νόρμα στον $\mathcal{P}$.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\sigma : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, με

$$\sigma(p) = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$$

είναι νόρμα στον $\mathcal{P}$.

(γ) Δείξτε ότι $h(p) \leq \sigma(p) \leq (n+1)h(p)$ για κάθε πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n.

14. Θεωρούμε το χώρο $(\mathcal{P}, h)$ της προηγούμενης άσκησης και τον $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : (\mathcal{P}, h) \to (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ με

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \xmapsto{f} f(p) := a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$$

είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων που διατηρεί τις αποστάσεις. Δηλαδή, η f είναι 1-1, επί και ικανοποιεί τις σχέσεις

1. $f(p+q) = f(p) + f(q)$,
2. $f(\lambda p) = \lambda f(p)$,
3. $\|f(p)\|_\infty = h(p)$

για κάθε $p, q \in \mathcal{P}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ομάδα Γ΄

15. Σταθεροποιούμε έναν πρώτο αριθμό p και θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων. Αν $m, n \in \mathbb{Z}$ με $m \neq n$, θέτουμε $p(n,m)$ τη μεγαλύτερη δύναμη του p που διαιρεί τον $|n-m|$, δηλαδή αν $m \neq n$, τότε

$$p(m,n) = \max\{k \geq 0 : m \equiv n \bmod p^k\}.$$

Ορίζουμε $\sigma_p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ με

$$\sigma_p(m,n) = \begin{cases} 2^{-p(m,n)}, & m \neq n \\ 0, & m = n \end{cases}$$

Δείξτε ότι η σ_p είναι μετρική στο $\mathbb{Z}$ και ο $(\mathbb{Z}, \sigma_p)$ είναι φραγμένος μετρικός χώρος.

16. Έστω $\emptyset \neq A \subseteq (0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρικός χώρος (X, ρ) ώστε

$$A = \{\rho(x,y) : x, y \in X,\, x \neq y\}.$$

17. Θεωρούμε τους χώρους ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$ και c_0.
(α) Δείξτε ότι: αν $1 \leq p < q \leq \infty$ τότε $\ell_p \subseteq \ell_q$ και ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος.
(β) Δείξτε ότι: αν $1 \leq p < \infty$ τότε $\ell_p \subseteq c_0$ και ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος.
(γ) Να βρεθεί ακολουθία $x = (x_n)$ που συγκλίνει στο 0 αλλά δεν ανήκει σε κανέναν ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Με άλλα λόγια, ο c_0 περιέχει γνήσια την ένωση $\bigcup\{\ell_p : 1 \leq p < \infty\}$.
(δ) Να βρεθεί ακολουθία $x = (x_n)$ ώστε $x \notin \ell_1$ αλλά $x \in \ell_p$ για κάθε $p > 1$.

18. Ο *κύβος του Hilbert* $\mathcal{H}^\infty$ είναι η συλλογή όλων των ακολουθιών $x = (x(n))$ με $|x(n)| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(α) Δείξτε ότι η

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |x(n) - y(n)|$$

ορίζει μετρική στο $\mathcal{H}^\infty$.
(β) Αν $x, y \in \mathcal{H}^\infty$ και $k \in \mathbb{N}$, θέτουμε $M_k = \max\{|x(1) - y(1)|, \ldots, |x(k) - y(k)|\}$. Δείξτε ότι

$$2^{-k} M_k \leq d(x,y) \leq 2^{-k+1} + M_k.$$

19. Θεωρούμε τη μοναδιαία Ευκλείδεια σφαίρα $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_2 = 1\}$ στον $\mathbb{R}^m$. Ορίζουμε «απόσταση» $\rho(x,y)$ δύο σημείων $x, y \in S^{m-1}$ να είναι η κυρτή γωνία xoy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x, y. Δείξτε ότι: αν $\rho(x,y) = \theta$ τότε

$$\|x - y\|_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

και συμπεράνατε ότι

$$\frac{2}{\pi} \rho(x,y) \leq \|x - y\|_2 \leq \rho(x,y), \qquad x, y \in S^{m-1}.$$

Είναι η ρ μετρική στην S^{m-1};