Πραγματική Ανάλυση (2010–11)
Τοπολογία μετρικών χώρων – Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και F,G υποσύνολα του X. Αν το F είναι κλειστό και το G είναι ανοικτό, δείξτε ότι το $F\setminus G$ είναι κλειστό και το $G\setminus F$ είναι ανοικτό.

2. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο A του X γράφεται ως τομή ανοικτών υποσυνόλων του (X,ρ).

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το $G=\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και το $F=\{x\in\mathbb{R}:f(x)=0\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

4. Δείξτε ότι κάθε κλειστό διάστημα στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών διαστημάτων και κάθε ανοικτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών διαστημάτων.

5. Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό.

6. Αποδείξτε ότι κάθε σφαίρα ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό σύνολο. Μπορεί σε έναν μετρικό χώρο μια σφαίρα να είναι το κενό σύνολο;

7. Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $x\in X$ και $\varepsilon>0$. Εξετάστε, αν ισχύει πάντοτε η ισότητα

$$\overline{B(x,\varepsilon)}=\{y\in X:d(x,y)\leq\varepsilon\}.$$

[*Υπενθύμιση:* Για κάθε $A\subseteq X$ συμβολίζουμε με $\overline{A}$ την κλειστή θήκη του A.]

8. Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Η *διαγώνιος* του $X\times X$ είναι το σύνολο $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$. Αποδείξτε ότι το Δ είναι κλειστό στον $X\times X$ ως προς τη μετρική d_2, όπου

$$d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{d^2(x_1,y_1)+d^2(x_2,y_2)}.$$

Γενικότερα, αποδείξτε ότι το Δ είναι κλειστό ως προς κάθε μετρική γινόμενο στον $X\times X$.

9. Υπάρχει άπειρο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο αποτελείται μόνο από ρητούς; Υπάρχει ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο αποτελείται μόνο από άρρητους;

10. Έστω A,B δύο υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X,d). Αποδείξτε ότι:
(α) Αν $A\cup B=X$, τότε $\overline{A}\cup B^\circ=X$.
(β) Αν $A\cap B=\emptyset$, τότε $\overline{A}\cap B^\circ=\emptyset$.

11. Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:
(α) $(A\setminus B)^\circ\subseteq A^\circ\setminus B^\circ$ για κάθε $A,B\subseteq X$.
(β) $\overline{A}\setminus\overline{B}\subseteq\overline{A\setminus B}$ για κάθε $A,B\subseteq X$.
Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους εγκλεισμούς με ισότητες;

12. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $\emptyset\neq A\subseteq X$. Δείξτε ότι $\mathrm{diam}(\overline{A})=\mathrm{diam}(A)$. Ισχύει το ίδιο για το εσωτερικό του A;

13. (α) Έστω A ανοικτό υποσύνολο του (X,ρ) και $G\subseteq A$. Δείξτε ότι το G είναι ανοικτό στο A αν και μόνο αν είναι ανοικτό στον X.
(β) Έστω A κλειστό υποσύνολο του (X,ρ) και $G\subseteq A$. Είναι σωστό ότι το G είναι κλειστό στο A αν και μόνο αν είναι κλειστό στον X;

14. Βρείτε ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ως προς τη συνήθη μετρική.

Ομάδα Β΄

15. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι $\widehat{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}$ για κάθε $x \in X$ και κάθε $r > 0$.

16. Δείξτε ότι ο c_0 είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ^∞. Τι μπορείτε να πείτε για τον c_{00}; Είναι ανοικτό υποσύνολο του ℓ_∞; κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞;

17. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(α) Το G είναι ανοικτό.
(β) Για κάθε $A \subseteq X$, $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$.
(γ) Για κάθε $A \subseteq X$, $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$.

18. Δείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως ένωση αριθμήσιμων το πλήθος ανοικτών διαστημάτων με ρητά άκρα.

19. Αποδείξτε ότι στο $\mathbb{R}$ δεν υπάρχουν μη τετριμμένα υποσύνολα (δηλάδή διαφορετικά από το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$) τα οποία να είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά.

20. (α) Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, έστω F_n κλειστό υποσύνολο του $(n, n+1)$. Θέτουμε $F = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$. Αποδείξτε ότι το F είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$.
Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι για κάθε n υπάρχει $\delta_n > 0$ έτσι ώστε $|x - y| \geq \delta_n$ οποτεδήποτε $x \in F_n$ και $y \in F_m$, $n \neq m$.
(β) Βρείτε μια ακολουθία ξένων ανά δυο κλειστών συνόλων στο $\mathbb{R}$ των οποίων η ένωση δεν είναι κλειστό σύνολο.

21. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:
(α) Αν το X έχει περισσότερα από ένα στοιχεία, τότε υπάρχει ανοικτό $G \subseteq X$, ώστε $G \neq \emptyset$ και $X \setminus G \neq \emptyset$.
(β) Αν το X είναι άπειρο σύνολο, τότε υπάρχει ανοικτό $G \subseteq X$ ώστε το G και το $X \setminus G$ να είναι άπειρα.

22. Εστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $x, y \in X$ με $x \neq y$. Δείξτε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα U, V ώστε $x \in U$, $y \in V$ και $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

23. Εστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $x \in X$ και F κλειστό υποσύνολο του X με $x \notin F$. Δείξτε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα U, V ώστε $x \in U$, $F \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$. Μπορούμε να πετύχουμε να ισχύει, επιπλέον, ότι $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$;

24. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Θέτουμε A' το *παράγωγο σύνολο* του A, δηλαδή το σύνολο των σημείων συσσσώρευσης του A. Αποδείξτε τα ακόλουθα:
(α) $\overline{A} = A \cup A'$. Συμπεράνατε ότι το A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του.
(β) Το A' είναι κλειστό σύνολο.
(γ) Αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε $A' \subseteq B'$.
(δ) $A' = (\overline{A})'$. Δηλαδή, τα A και $\overline{A}$ έχουν τα ίδια σημεία συσσώρευσης.
(ε) $(A')' \subseteq A'$. Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε ο εγκλεισμός να είναι γνήσιος.

25. Εξετάστε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι αληθείς:
(α) Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{N}$.
(β) Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Z}$.
(γ) Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Q}$.

26. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Αν $A, B \subseteq X$, η *απόσταση* του A από το B ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες της απόστασης:

(α) αν $A \cap B \neq \emptyset$, τότε $\mathrm{dist}(A, B) = 0$.

(β) $\mathrm{dist}(\overline{A}, \overline{B}) = \mathrm{dist}(A, B)$.

(γ) $\mathrm{dist}(A, B \cup C) = \min\{\mathrm{dist}(A, B), \mathrm{dist}(A, C)\}$.

(δ) Δώστε παράδειγμα κλειστών και ξένων υποσυνόλων A, B ενός μετρικού χώρου (X, ρ) τα οποία έχουν μηδενική απόσταση.

27. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αν $x \in X$ ορίζουμε την απόσταση του x από το A να είναι η απόσταση των συνόλων $\{x\}, A$:

$$\mathrm{dist}(x, A) = \inf\{\rho(x, a) : a \in A\}.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) $\mathrm{dist}(x, A) = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.

(β) $|\mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(y, A)| \leq \rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.

(γ) Το σύνολο $\{x \in X : \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\}$ είναι ανοικτό, ενώ το σύνολο $\{x \in X : \mathrm{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}$ είναι κλειστό.

(δ) Αν $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, τότε $\mathrm{dist}(x, A) = \mathrm{dist}(x, B)$ για κάθε $x \in X$.

28. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι

$$A' = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, A \setminus \{x\}) = 0\}.$$

29. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του X γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων και κάθε ανοικτό υποσύνολο του X γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων.

30. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Αποδείξτε τις εξής ιδιότητες του συνόρου του A:

(α) $\mathrm{bd}(A) = \mathrm{bd}(A^c)$.

(β) $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{bd}(A) \cup A^\circ$.

(γ) $X = A^\circ \cup \mathrm{bd}(A) \cup (X \setminus A)^\circ$.

(δ) $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$ ή ισοδύναμα $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Επομένως, το σύνορο είναι κλειστό σύνολο.

(ε) Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $\mathrm{bd}(A) \subseteq A$.

31. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν το A είναι ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο του X τότε το $\mathrm{bd}(A)$ έχει κενό εσωτερικό.

(β) Αν $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ τότε $\mathrm{bd}(A \cup B) = \mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{bd}(B)$.

32. Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε $(\mathrm{bd}(A))^\circ = \mathbb{R}$.

33. Έστω A υποσύνολο του (X, ρ). Αν G και H είναι ξένα ανοικτά σύνολα στο A, δείξτε ότι υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα U και V στο X ώστε $G = A \cap U$ και $H = A \cap V$.

34. Έστω (X, ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Δείξτε ότι κάθε οικογένεια ξένων ανοικτών υποσυνόλων του X είναι πεπερασμένη ή αριθμήσιμη.

35. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:

(α) Αν D είναι ένα πυκνό υποσύνολο του X, τότε $\overline{D \cap G} = \overline{G}$ για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του X.

(β) Αν το G είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X και το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, τότε το $G \cap D$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. Ισχύει το ίδιο αν το G δεν υποτεθεί ανοικτό;

(γ) Είναι σωστό ότι η τομή μιας ακολουθίας ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X είναι πυκνό υποσύνολο του X;

36. Έστω $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ μετρικοί χώροι. Θεωρούμε τον χώρο γινόμενο (X, d) με $X = \prod_{i=1}^n X_i$ και $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$. Δείξτε ότι:

(α) Αν κάθε G_i είναι d_i-ανοικτό στον X_i, $i = 1, \ldots, n$, τότε το $\prod_{i=1}^n G_i$ είναι d-ανοικτό στον X.

(β) Αν κάθε F_i είναι d_i-κλειστό στον X_i, $i = 1, \ldots, n$, τότε το $\prod_{i=1}^n F_i$ είναι d-κλειστό στον X.

(γ) Αν κάθε D_i είναι πυκνό στον X_i, $i = 1, \ldots, n$, τότε το $D = \prod_{i=1}^n D_i$ είναι πυκνό στον X.

Ειδικότερα, αν κάθε (X_i, d_i), $i = 1, ..., n$ είναι διαχωρίσιμος τότε ο (X, d) είναι διαχωρίσιμος.

Ομάδα Γ′

37. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $P \subseteq X$. Το P λέγεται *τέλειο* αν είναι κενό ή είναι κλειστό και κάθε σημείο του είναι σημείο συσσώρευσης γι' αυτό. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Ένα συνόλο $P \subseteq (X, \rho)$ είναι τέλειο αν και μόνο αν $P = P'$.

(β) Κάθε κλειστό (μη τετριμμένο) διάστημα στο $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική) είναι τέλειο σύνολο. Επίσης, το $\mathbb{R}$ είναι τέλειο αν θεωρηθεί ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

(γ) Κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο P του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. [*Υπόδειξη.* Το P είναι άπειρο. Αν είναι αριθμήσιμο, γράφεται στη μορφή $P = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ορίστε κατάλληλη ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n, b_n]$ ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $[a_n, b_n] \cap P \neq \emptyset$ αλλά $x_n \notin [a_n, b_n]$.]

38. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$. Το x λέγεται *σημείο συμπύκνωσης* του A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $A \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν το A είναι αριθμήσιμο τότε δεν έχει σημεία συμπύκνωσης.

(β) Αν το A είναι υπεραριθμήσιμο και P είναι το σύνολο των σημείων συμπύκνωσης του A τότε $P' = P$ και το $A \setminus P$ είναι αριθμήσιμο.

(γ) Αν το A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε υπάρχουν τέλειο σύνολο P και αριθμήσιμο σύνολο Z ώστε $A = P \cup Z$ και $P \cap Z = \emptyset$.

39. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στο X. Το $x \in X$ λέγεται *οριακό σημείο* της (x_n) αν υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$. Θέτουμε $L(x_n)$ το σύνολο των οριακών σημείων της ακολουθίας (x_n). Αποδείξτε ότι

(α) Αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε $L(x_n) = \{x\}$. Ισχύει το αντίστροφο;

(β) Αν $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ τότε $A' \subseteq L(x_n) \subseteq \overline{A}$. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι οι εγκλεισμοί μπορεί να είναι γνήσιοι.

(γ) Δείξτε ότι το $L(x_n)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(δ) Αν το A δεν είναι κλειστό, δείξτε ότι $L(x_n) \neq \emptyset$. Αν επιπλέον, η (x_n) είναι ρ-Cauchy, τότε είναι ρ-συγκλίνουσα.

(ε) Το x είναι οριακό σημείο της (x_n) αν και μόνο για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \geq n$ ώστε $x_m \in B_\rho(x, \varepsilon)$.

40. Σωστό ή λάθος; Για κάθε άπειρο μετρικό χώρο (X, d) υπάρχει άπειρο υποσύνολο A του X ώστε κάθε $G \subseteq A$ να είναι ανοικτό ως προς τη σχετική μετρική στο A.

41. Έστω (X, ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:

(α) Το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του X είναι το πολύ αριθμήσιμο.

(β) Αν S είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X τότε υπάρχει ακολουθία διαφορετικών ανά δυο στοιχείων του S, η οποία συγκλίνει σε σημείο του S.

42. Έστω $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$D(\theta) := \{(\cos(2\pi n\theta), \sin(2\pi n\theta)) : n \in \mathbb{N}\}$$

είναι πυκνό στον κύκλο $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

43. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Το $A \subseteq X$ λέγεται *πουθενά πυκνό* αν $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$. Αποδείξτε ότι:

(α) Το $A \subseteq X$ είναι πουθενά πυκνό αν και μόνον αν $A \subseteq \overline{(X \setminus \overline{A})}$.

(β) Το $A \subseteq X$ είναι πουθενά πυκνό και κλειστό αν και μόνον αν το $X \setminus A$ είναι πυκνό και ανοικτό.

(γ) Αν το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε το A είναι πουθενά πυκνό αν και μόνον αν $A = \mathrm{bd}(A)$.

(δ) Αν το A είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του X και το $X \setminus B$ είναι πυκνό τότε το $X \setminus (A \cup B)$ είναι πυκνό στον X.

(ε) Η ένωση πεπερασμένου πλήθους πουθενά πυκνών υποσυνόλων του X είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του X.

44. Έστω (q_n) μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Ορίζουμε

$$I_n = \left(q_n - \frac{1}{2^n}, q_n + \frac{1}{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι το $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και ότι το U^c είναι πουθενά πυκνό.

45. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το A είναι πουθενά πυκνό.

(β) Το $\overline{A}$ δεν περιέχει μη κενό ανοικτό σύνολο.

(γ) Κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X περιέχει ένα μη κενό ανοικτό σύνολο ξένο προς το A.

(δ) Κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X περιέχει μια ανοικτή μπάλα ξένη προς το A.

46. Έστω (X_n, ρ_n), $n = 1, 2, \dots$ ακολουθία μετρικών χώρων με $\rho_n(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X_n$, $n = 1, 2, \dots$. Θεωρούμε το χώρο γινόμενο (X, ρ), όπου $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ και $\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(x(n), y(n))$. Σταθεροποιούμε $\alpha = (\alpha(n))$ στον X. Θεωρούμε τα σύνολα

$$D_m = \{x = (x(n)) \in X : x(n) = \alpha(n), \ n > m\}, \ m = 1, 2, \dots$$

και ορίζουμε

$$D_\alpha := \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m.$$

Αποδείξτε ότι το D_α είναι πυκνό στον X.

47. Έστω A, B αριθμήσιμα, πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : A \to B$ η οποία είναι αύξουσα, 1-1 και επί.