Πραγματική Ανάλυση (2010–11)

Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων – Ασκήσεις

Ομάδα Α′

1. Έστω $f_n(t)=\frac{1}{1+nt}$, $t\in[0,1]$. Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια συνάρτηση f στο $[0,1]$. Ποιά είναι η f;

2. Έστω $f_n(t)=\frac{t^{2n}}{1+t^{2n}}$, $t\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Ποιά είναι η f;

3. Έστω $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f_n(t)=\begin{cases}0, & t<\frac{1}{n+1} \text{ ή } \frac{1}{n}<t\\ \sin^2\left(\frac{\pi}{t}\right), & \frac{1}{n+1}\leq t\leq\frac{1}{n}\end{cases}$. Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια f συνεχή στο $\mathbb{R}$. Ισχύει ότι $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$;

4. Έστω $f_n(t)=n^pt(1-t^2)^n$, $t\in[0,1]$, με $p>0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι για κάθε $p>0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια f στο $[0,1]$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη; Για ποιές τιμές του p ισχύει ότι $\int_0^1 f_n\to\int_0^1 f$;

5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right),\ \ n\in\mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

6. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει απολύτως. Δείξτε ότι οι σειρές συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin(kt)$ και $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kt)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

7. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει για κάθε $x\neq 0$ και αποκλίνει για $x=0$. Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[A,\infty)$ ή $(-\infty,-A]$, όπου $A>0$.

8. Έστω $\alpha>1/2$. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

9. (α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ασυνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ που συγκλίνει κατά σημείο σε μια μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

10. (α) Έστω X σύνολο, $f_n:X\to\mathbb{R}$ για $n=1,2,\dots$ και $f:X\to\mathbb{R}$ ώστε $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο X. Αποδείξτε ότι $|f_n|\to|f|$ ομοιόμορφα στο X.

(β) Έστω $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f_n(x)=(-1)^n\left(1+\frac{x}{n}\right)$ για $n=1,2,\dots$ Αποδείξτε ότι η $(|f_n|)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ ενώ η (f_n) δεν συγκλίνει.

11. Έστω X σύνολο, $f_n,g_n,f,g:X\to\mathbb{R}$ για $n=1,2,\dots$ ώστε $f_n\to f$ και $g_n\to g$ ομοιόμορφα στο X. Αποδείξτε ότι αν οι f,g είναι φραγμένες τότε $f_ng_n\to fg$ ομοιόμορφα στο X.

12. Βρείτε ακολουθίες $(f_n),(g_n)$ ορισμένες στο $\mathbb{R}$, οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα, αλλά η (f_ng_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

13. Έστω $(X,d),(Y,\rho)$ μετρικοί χώροι και $f_n,f:X\to Y$ ώστε $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο X. Αν κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

14. Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι: αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X και κάθε f_n είναι φραγμένη στο X, τότε η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο X.

15. Έστω $f, f_n : (X,\rho) \to [a,b]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι $g \circ f_n \to g \circ f$ ομοιόμορφα στο X.

16. Έστω $\delta > 0$ και $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ ώστε $|f_n(x)| \geq \delta$ για κάθε $x \in X$ και $n = 1, 2, \ldots$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, δείξτε ότι:

(α) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$.

(β) $\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ ομοιόμορφα στο X.

Ομάδα Β′

17. Έστω $f_n(t) = \frac{t}{1+nt^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει f ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_n'(t) \to f'(t)$ αν $t \neq 0$, αλλά $f_n'(0) \not\to f'(0)$. Για ποιά διαστήματα $[a,b]$ ισχύει ότι $f_n' \to f'$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$;

18. Έστω $f_n(t) = \frac{1}{n}e^{-n^2t^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και $f_n' \to 0$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι σε κάθε διάστημα το οποίο περιέχει το 0 η f_n' *δεν* συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση, ενώ σε κάθε κλειστό διάστημα το οποίο *δεν* περιέχει το 0 η f_n' συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση.

19. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \qquad f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$$

συγκλίνει κατά σημείο, και βρείτε την οριακή συνάρτηση.

20. Έστω $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ ακολουθία αυξουσών συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή συνάρτηση f. Δείξτε ότι η f είναι αύξουσα και ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

21. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt \to \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Ισχύει πάντα το ίδιο αν η σύγκλιση είναι κατά σημείο;

22. Ορίζουμε ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^{nx}.$$

Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο και βρείτε την οριακή συνάρτηση f. Βρείτε το όριο των ολοκληρωμάτων

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt.$$

Είναι η σύγκλιση της (f_n) στην f ομοιόμορφη;

23. Ορίζουμε $f_n : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ θέτοντας $f_1(x) = \sin x$ και

$$f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x)). \quad n \in \mathbb{N}.$$

Εξετάστε την (f_n) ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

24. Δείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)x^k$ συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0,1]$. Αντιθέτως, δείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k(1-x)$ συγκλινει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

25. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\Big(1 + \frac{x}{k}\Big)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-A, A]$, $A > 0$.

26. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[-A, A]$, $A > 0$, αλλά δεν συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του x.

27. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{k+1}}{2k+2} \right)$$

συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0, 1]$.

28. Ορίζουμε $I(x) = 0$ αν $x \leq 0$ και $I(x) = 1$ αν $x > 0$. Έστω (x_k) ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων σε κάποιο διάστημα (a, b) και έστω $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ απολύτως συγκλίνουσα σειρά. Δείξτε ότι η

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k I(x - x_k)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο (a, b) και ότι η συνάρτηση που ορίζεται από αυτή τη σειρά είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (a, b) \setminus \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

29. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $A \subseteq X$, $f, f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A. Έστω t_0 σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{t \to t_0} f_n(t) = x_n \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

α. Η (x_n) συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ και

β. $\lim_{t \to t_0} f(t) = \lim_{n \to \infty} x_n$. Δηλαδή,

$$\lim_{t \to t_0} \lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to t_0} f_n(t).$$

30. Έστω $f_n(t) = t^n$ στο $[0, 1]$ και $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0, 1]$ με $g(1) = 0$. Δείξτε ότι η $(g f_n)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

31. Έστω (X, ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό υποσύνολο του X. Ορίζουμε την ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ με

$$f_n(x) = \mathrm{dist}(x, \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}),\ x \in X.$$

Δείξτε ότι:

(α) Η (f_n) είναι φθίνουσα και $f_n \to 0$ κατά σημείο.

(β) $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στον X αν και μόνον αν ο X είναι ολικά φραγμένος.

32. (α) Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι με τον X συμπαγή. Αν $f_n : X \to Y$ για $n = 1, 2, \ldots$ και $f : X \to Y$ συνεχής ώστε για κάθε $x \in X$ και για κάθε (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \to x$ ισχύει $f_n(x_n) \to f(x)$, αποδείξτε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

(β) Αποδείξτε ότι η συμπάγεια είναι απαραίτητη, θεωρώντας την ακολουθία $f_n : (0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(t) = \begin{cases} n, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

και την $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$. Διαπιστώστε ότι ικανοποιείται η υπόθεση, αλλά $f_n \not\to f$ ομοιόμορφα.