Πραγματική Ανάλυση (2010–11)
Συνεχείς συναρτήσεις – Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω $f, g : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ δύο συνεχείς συναρτήσεις και D πυκνό υποσύνολο του (X, ρ). Δείξτε ότι:

(α) Το σύνολο $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό.

(β) Αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D$, τότε $f \equiv g$.

2. Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ και $x_0 \in X$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$, $\rho(y, x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

3. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $G \subseteq X$. Δείξτε ότι το G είναι ανοικτό αν και μόνο αν υπάρχουν συνεχής συνάρτηση $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ και $V \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, ώστε $G = f^{-1}(V)$.

4. (α) Έστω $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $Z(f)$ το *σύνολο μηδενισμού* της f, δηλαδή

$$Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

Δείξτε ότι: αν η f είναι συνεχής τότε το $Z(f)$ είναι κλειστό στον X.

(β) Έστω $F \subseteq X$. Δείξτε ότι το F είναι κλειστό αν και μόνο αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ ώστε $Z(f) = F$.

5. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Συμβολίζουμε με χ_A την *χαρακτηριστική συνάρτηση του* A, όπου $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων συνέχειας της χ_A ειναι το $A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ$, το σύνολο των σημείων ασυνέχειάς της είναι το $\mathrm{bd}(A)$ και ότι η χ_A είναι συνεχής αν και μόνο αν το A είναι ανοικτό και κλειστό (clopen).

6. Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Το *γράφημα* της f είναι το σύνολο

$$\mathrm{Gr}(f) = \big\{(x, f(x)) : x \in X\big\} \subseteq X \times Y.$$

Δείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής συνάρτηση, τότε το γράφημα $\mathrm{Gr}(f)$ της f είναι κλειστό στον $X \times Y$ ως προς κάθε μετρική γινόμενο. Δώστε παράδειγμα το οποίο να δείχνει ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

7. Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση και έστω A διαχωρίσιμο υποσύνολο του X (δηλαδή, ο (A, ρ_A) είναι διαχωρίσιμος). Δείξτε ότι το $f(A)$ είναι διαχωρίσιμο υποσύνολο του Y.

8. Δώστε παράδειγμα φραγμένης, συνεχούς συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Μπορεί μια μη φραγμένη συνάρτηση να είναι ομοιόμορφα συνεχής;

9. Δώστε ένα παράδειγμα δύο ξένων υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου τα οποία διαχωρίζονται, αλλά δε διαχωρίζονται πλήρως.

10. Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ ομοιομορφισμός. Δείξτε ότι ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο (Y, σ) είναι διαχωρίσιμος.

Ομάδα Β′

11. Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$. Δείξτε ότι, αν για κάθε $A\subseteq X$ ισχύει $f(A')\subseteq(f(A))'$, τότε η f είναι συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;

12. Δίνεται μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(Y,\delta)$, όπου δ η διακριτή μετρική στον Y. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι σταθερή.

13. Μια συνάρτηση $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ λέγεται *τοπικά φραγμένη* (*locally bounded*) αν για κάθε $x\in X$ υπάρχει περιοχή U_x του x ώστε η $f|_{U_x}$ να είναι φραγμένη.

(α) Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι τοπικά φραγμένη. Ισχύει το αντίστροφο;

(β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
 (i) Η f είναι συνεχής.
 (ii) Η f είναι τοπικά φραγμένη και έχει κλειστό γράφημα.

14. Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση και D πυκνό υποσύνολο του X. Εξετάστε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι αληθείς.

(α) Αν η $f|_D$ είναι φραγμένη, τότε η f είναι φραγμένη.

(β) Αν η $f|_D$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Αν η $f|_D$ είναι 1-1, τότε η f είναι 1-1.

15. Έστω (X,ρ), (Y,σ) μετρικοί χώροι και $f:X\to Y$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ώστε: αν $A,B\subseteq X$ με $\mathrm{dist}(A,B)<\delta$, τότε $\mathrm{dist}(f(A),f(B))<\varepsilon$.

16. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A,B\subseteq X$ κλειστά και ξένα. Αν $f:X\to[0,1]$ είναι η συνάρτηση του Urysohn, δηλαδή $f(x)=\frac{\mathrm{dist}(x,A)}{\mathrm{dist}(x,A)+\mathrm{dist}(x,B)}$, αποδείξτε ότι:

(α) Αν $\mathrm{dist}(A,B)=0$, τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Αν $\mathrm{dist}(A,B)=\delta>0$, τότε η f είναι δ^{-1}–Lipschitz.

17. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A,B\subseteq X$ με $\mathrm{dist}(A,B)>0$ και $f_1:A\to\mathbb{R}$, $f_2:B\to\mathbb{R}$ (ομοιόμορφα) συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f:A\cup B\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in A\\ f_2(x), & x\in B\end{cases}$$

είναι (ομοιόμορφα) συνεχής.

18. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A\subseteq X$. Αν $f:A\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι η f επεκτείνεται σε μια ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση $F:\overline{A}\to\mathbb{R}$.

19. Εξετάστε αν ισχύουν τα παρακάτω.

(α) Το $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Z}$.

(β) Το $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$.

(γ) Το $\mathbb{Q}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Z}$.

(δ) Το $\mathbb{Z}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{N}$.

20. Δίνονται οι μετρικοί χώροι $(X_1,d_1),\dots,(X_k,d_k)$ και ο χώρος γινόμενο $\prod_{i=1}^k X_i$ με μετρική γινόμενο την $d_\infty=\max\{d_i:1\le i\le k\}$. Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $f:X\to\prod_{i=1}^k X_i$ με $f=(f_1,\dots,f_k)$, όπου $f_i:X\to X_i$ για $i=1,\dots,k$. Δείξτε τα εξής:

(α) Η f είναι συνεχής αν και μόνο αν οι f_i, $i=1,\dots,k$ είναι συνεχείς.

(β) Η f είναι Lipschitz αν και μόνο αν κάθε f_i είναι Lipschitz.

(γ) Η f είναι ομοιομόρφα συνεχής αν και μόνο αν οι $f_i,\ i = 1,\dots,k$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

(δ) Είναι σωστό ότι η f είναι ισομετρία αν και μόνο αν οι f_i είναι ισομετρίες;

(ε) Είναι σωστό ότι η f είναι ομοιομορφισμός αν και μόνο αν οι f_i είναι ομοιομορφισμοί;

Ομάδα Γ′

21. Έστω F μη κενό κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f : F \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in F$.

22. Έστω (X, ρ), (Y, σ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$. Για κάθε $\delta \geq 0$ ορίζουμε το *μέτρο συνέχειας* (*modulus of continuity*) της f ως εξής:

$$\omega_f(\delta) = \sup\{\sigma(f(x), f(y)) : d(x, y) \leq \delta,\ x, y \in X\}.$$

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\omega_f : [0, \infty) \to [0, \infty]$ είναι αύξουσα, δηλαδή αν $0 \leq \delta_1 < \delta_2$ τότε $\omega_f(\delta_1) \leq \omega_f(\delta_2)$.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν ισχύει $\omega_f(\delta) \to 0$ καθώς $\delta \to 0^+$. [*Υπόδειξη.* Δείξτε ότι $\sigma(f(x), f(y)) \leq \omega_f(d(x, y))$ για κάθε $x, y \in X$].

23. Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Η f λέγεται *ανοικτή* αν για κάθε ανοικτό $G \subseteq X$ το $f(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Ανάλογα, η f λέγεται *κλειστή* αν για κάθε κλειστό $F \subseteq X$ το $f(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y.

(α) Δώστε παράδειγμα: συνεχούς συνάρτησης η οποία δεν είναι ανοικτή, ανοικτής συνάρτησης η οποία δεν είναι συνεχής, συνεχούς συνάρτησης η οποία δεν είναι κλειστή, κλειστής συνάρτησης η οποία δεν είναι συνεχής.

(β) Αν η $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ είναι 1-1 και επί, δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα: (i) η f είναι ανοικτή, (ii) η f είναι κλειστή, (iii) η f^{-1} είναι συνεχής.

Συνεπώς, αν η f είναι συνεχής και ανοικτή (ή κλειστή) τότε είναι ομοιομορφισμός.

24. Έστω (X_i, d_i) , $i = 1, \dots, m$ μετρικοί χώροι και $X = \prod_{i=1}^m X_i$ ο χώρος γινόμενο με τη μετρική $d = \sum_{i=1}^m d_i$. Η συνάρτηση i*−προβολή* είναι η $\pi_i : X \to X_i$ που ορίζεται ως εξής:

$$\pi_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) = x_i.$$

Αποδείξτε ότι η π_i είναι συνεχής, επί και ανοικτή.

25. Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Δείξτε ότι η f είναι ανοικτή αν και μόνο αν $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$ για κάθε $A \subseteq X$. Δώστε παράδειγμα μιας συνεχούς, ανοικτής συνάρτησης $f : X \to Y$ και κάποιου $A \subseteq X$ ώστε το $f(A^\circ)$ να περιέχεται γνήσια στο $(f(A))^\circ$.

26. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η ρ είναι ισοδύναμη με τη διακριτή μετρική στον X.

(β) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι τελικά σταθερή.

(γ) Ο X δεν έχει σημεία συσσώρευσης.

(δ) Για κάθε μετρικό χώρο Y, κάθε $f : X \to Y$ είναι συνεχής.

(ε) Η κλειστή θήκη κάθε ανοικτού συνόλου $G \subseteq X$ είναι ανοικτό σύνολο.

27. (α) Μια συνάρτηση $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ λέγεται *κάτω ημισυνεχής* αν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) \leq t\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι η f είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν, για κάθε ακολουθία (x_n) στον X με $x_n \to x \in X$, ισχύει

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Δώστε παράδειγμα κάτω ημισυνεχούς συνάρτησης η οποία δεν είναι συνεχής.

(β) Μια συνάρτηση $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ λέγεται *άνω ημισυνεχής* αν η $-f$ είναι κάτω ημισυνεχής. Διατυπώστε και αποδείξτε χαρακτηρισμούς της άνω ημισυνεχούς συνάρτησης, αντίστοιχους με τους χαρακτηρισμούς της κάτω ημισυνεχούς συνάρτησης που περιγράφτηκαν στο (α).

28. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο μετρικοί χώροι (X, ρ), (Y, σ) οι οποίοι δεν είναι ομοιομορφικοί αλλά ικανοποιούν το εξής: υπάρχουν συναρτήσεις $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ οι οποίες είναι συνεχείς, 1-1 και επί.