Πραγματική Ανάλυση (2010–11)
Σύγκλιση ακολουθιών και συνέχεια συναρτήσεων – Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ πεπερασμένη οικογένεια μετρικών χώρων. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι μετρικές γινόμενο στο $X = \prod_{i=1}^k X_i$:

$$\rho_\infty(x, y) = \max\{d_i(x(i), y(i)) : i = 1, 2, \ldots, k\}$$

και

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^k [d_i(x(i), y(i))]^p \right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty,$$

όπου $x = (x(1), \ldots, x(k))$, $y = (y(1), \ldots, y(k))$.

2. Έστω (x_n) και (y_n) βασικές ακολουθίες στο μετρικό χώρο (X, ρ). Δείξτε ότι η $\alpha_n = \rho(x_n, y_n)$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$.

3. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ). Θεωρούμε την ακολουθία $\{E_n\}$ υποσυνόλων του X με

$$E_n = \{x_k : k \geq n\}, \ n = 1, 2, \ldots$$

και την ακολουθία

$$t_n = \sup\{d(x_k, x_n) : k \geq n\} \in [0, +\infty], \ n = 1, 2, \ldots$$

Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η (x_n) είναι βασική.

(β) $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(γ) $t_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

4. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ) και έστω $x \in X$. Δείξτε ότι:
(α) Αν η (x_n) συγκλίνει στο x τότε κάθε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) συγκλίνει στο x.
(β) Αν κάθε υπακολουθία της (x_n) έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει στο x, τότε η (x_n) συγκλίνει στο x.

5. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Θεωρούμε τον $X \times X$ με οποιαδήποτε μετρική γινόμενο d. Δείξτε ότι η $\rho : (X \times X, d) \to \mathbb{R}$ με $(x, y) \mapsto \rho(x, y)$ είναι συνεχής.

6. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ). Υποθέτουμε ότι για κάποιο $x \in X$ ισχύει το εξής: για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(x_n) \to f(x)$. Είναι σωστό ότι $x_n \to x$;

Ομάδα Β΄

7. Έστω (X_n, d_n), $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία μετρικών χώρων ώστε $d_n(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Θεωρούμε το

$$X = \prod_{n=1}^\infty X_n = \Big\{ x = (x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots) : \ x(n) \in X_n \Big\}.$$

Δηλαδή, ο X αποτελείται από όλες τις ακολουθίες οι οποίες στη n-οστή θέση έχουν στοιχείο του X_n. Ορίζουμε $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} d_n(x(n), y(n)).$$

Δείξτε ότι ο (X,d) είναι μετρικός χώρος και η d είναι μετρική γινόμενο.

8. Έστω $(X_n,d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρικών χώρων και $X=\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Ορίζουμε $d: X\times X\to\mathbb{R}$ με

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}.$$

Δείξτε ότι ο (X,d) είναι μετρικός χώρος και η d είναι μετρική γινόμενο.

9. Έστω $1\le p<\infty$ και $x=(x(k))_{k\in\mathbb{N}}\in\ell_p$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $x_n\in\ell_p$ με

$$x_n=(x(1),\dots,x(n),0,0,\dots).$$

Δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|_p=0$. Ισχύει το αντίστοιχο αποτέλεσμα στον ℓ_∞;

10. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Δείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει στο $x\in X$ αν και μόνο αν η ακολουθία $(y_n)=(x_1,x,x_2,x,x_3,x,\dots,x_n,x,\dots)$ συγκλίνει.

11. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Υποθέτουμε ότι $x_n\to x\in X$. Δείξτε ότι: για κάθε μετάθεση (1-1 και επί συνάρτηση) $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ η ακολουθία $y_n=x_{\sigma(n)}$ συγκλίνει κι αυτή στο x.

12. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X με $x_n\neq x_m$ για $n\neq m$. Θέτουμε

$$A=\{x_n: n=1,2,\dots\}.$$

Δείξτε ότι: αν $x_n\to x\in X$ τότε για κάθε 1-1 συνάρτηση $f:A\to A$ ισχύει $f(x_n)\to x$.

13. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Λέμε ότι η (x_n) έχει *φραγμένη κύμανση* αν

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho(x_n,x_{n+1})<+\infty.$$

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση τότε είναι βασική (άρα, και φραγμένη). Ισχύει το αντίστροφο;
(β) Αν η (x_n) είναι βασική τότε έχει υπακολουθία με φραγμένη κύμανση.
(γ) Η (x_n) έχει βασική υπακολουθία αν και μόνον αν έχει υπακολουθία με φραγμένη κύμανση.

14. Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Δείξτε ότι η (x_n) έχει βασική υπακολουθία αν και μόνο αν έχει υπακολουθία (x_{k_n}) με την ιδιότητα $\rho(x_{k_n},x_{k_{n+1}})<\frac{1}{2^n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.