Κεφάλαιο 5

Πληρότητα

5.1 Πλήρεις μετρικοί χώροι

Ορισμός 5.1.1 (πλήρης μετρικός χώρος)**.** Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) λέγεται *πλήρης* (*complete*) αν κάθε ρ–βασική ακολουθία (x_n) στον X είναι ρ–συγκλίνουσα.

Παραδείγματα 5.1.2 (πλήρεις χώροι)**.** (α) Αν δ είναι η διακριτή μετρική σε ένα οποιοδήποτε σύνολο X, ο μετρικός χώρος (X, δ) είναι πλήρης. Πράγματι: αν (x_n) είναι βασική ακολουθία στον X, τότε αυτή είναι τελικά σταθερή. Συνεπώς, συγκλίνει.

(β) Ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. Στον Απειροστικό Λογισμό είδαμε ότι κάθε βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(γ) Ο $(\mathbb{R}^m, \rho_2)$, όπου ρ_2 η Ευκλείδεια μετρική, είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον $\mathbb{R}^m$. Γράφουμε $x_n = (x_n(1), \ldots, x_n(m))$, όπου $x_n(i) \in \mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι βασική ακολουθία, επομένως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, s \geq n_0$ τότε

$$(*) \qquad \rho_2(x_n, x_s) = \left(\sum_{j=1}^{m} (x_n(j) - x_s(j))^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $i = 1, \ldots, m$,

$$|x_n(i) - x_s(i)| \leq \left(\sum_{j=1}^{m} (x_n(j) - x_s(j))^2 \right)^{1/2}.$$

Συνεπώς, αν $n, s \geq n_0$, τότε για κάθε $i = 1, \ldots, m$ χωριστά έχουμε

$$|x_n(i) - x_s(i)| < \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι: για κάθε $i = 1, \ldots, m$ η ακολουθία $(x_n(i))$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$ έπεται ότι υπάρχουν $x(1), \ldots, x(m) \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x_n(i) \to x(i), \qquad i = 1, \ldots, m$$

καθώς το $n \to \infty$. *Ορίζουμε* $x = (x(1), \ldots, x(m)) \in \mathbb{R}^m$ και μένει να δείξουμε ότι $\rho_2(x_n, x) \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

Επιστρέφουμε στην $(*)$: για κάθε $n, s \geq n_0$ έχουμε

$$\left(\sum_{j=1}^{m} (x_n(j) - x_s(j))^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Σταθεροποιούμε $n \geq n_0$. Από την $\lim_{s \to \infty} x_s(j) = x(j)$, $j = 1, \ldots, m$, έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{m} (x_n(j) - x(j))^2 \right)^{1/2} &= \lim_{s \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{m} (x_n(j) - x_s(j))^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sup_{s \geq n_0} \left(\sum_{j=1}^{m} (x_n(j) - x_s(j))^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

λόγω της $(*)$. Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\rho_2(x_n, x) = \left(\sum_{j=1}^{m} (x_n(j) - x(j))^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\rho_2(x_n, x) \to 0$. $\square$

(γ) Έστω $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{k}$ πεπερασμένη ακολουθία μετρικών χώρων. Ο $(\prod_{i=1}^{k} X_i, \sum_{i=1}^{k} d_i)$ είναι πλήρης αν και μόνο αν οι (X_i, d_i) είναι πλήρεις για $i = 1, 2, \ldots, k$. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού ακολουθεί τα βήματα της απόδειξης στο προηγούμενο παράδειγμα.

(δ) Έστω $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μετρικών χώρων ώστε $d_n(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Θεωρούμε τον $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ με μετρική την

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x(n), y(n))$$

όπου $x = (x(1), \ldots, x(n), \ldots)$ και $y = (y(1), \ldots, y(n), \ldots) \in X$. Αν οι X_n είναι πλήρεις μετρικοί χώροι τότε και ο (X, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος. Η απόδειξη είναι επίσης παρόμοια με αυτήν που δώσαμε στο παράδειγμα (β) και αφήνεται για τις ασκήσεις.

(ε) Ο *χώρος του Baire* είναι ο $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ όπου

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\eta(x,y)}}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

και $\eta(x,y) = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$ με $x = (x_n), y = (y_n)$. Ο χώρος του Baire είναι πλήρης μετρικός χώρος (άσκηση).

Παραδείγματα 5.1.3 (μη πλήρεις χώροι)**.** Στην §2.1.3 είδαμε παραδείγματα μετρικών χώρων στους οποίους υπάρχουν βασικές ακολουθίες που δεν συγκλίνουν.

(α) Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, με μετρική την $d(x,y) = |x-y|$. Ο $(\mathbb{Q}, d)$ δεν είναι πλήρης: αυτό προκύπτει εύκολα αν θυμηθούμε ότι $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Αν $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τότε υπάρχει ακολουθία (q_n) στο $\mathbb{Q}$ ώστε $q_n \to \alpha$. Αφού η (q_n) συγκλίνει (στο $\mathbb{R}$) είναι βασική στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $\mathbb{Q}$. Όμως, δεν υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ ώστε $|q_n - q| \to 0$, γιατί τότε θα είχαμε $q = \alpha$, το οποίο είναι άτοπο.

(β) Ο χώρος $(\mathbb{R}, \rho)$ με τη μετρική $\rho(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ δεν είναι πλήρης. Εξηγήσαμε ότι η ακολουθία $x_n = n$ είναι ρ-βασική αλλά δεν είναι ρ-συγκλίνουσα.

Ορισμός 5.1.4 (χώρος Banach)**.** Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Ο X λέγεται χώρος *Banach* αν είναι πλήρης μετρικός χώρος ως προς τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα, δηλαδή αν ο (X, d) όπου $d(x,y) = \|x-y\|$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Ολοι οι κλασικοί χώροι ακολουθιών που ορίσαμε στο πρώτο Κεφάλαιο είναι χώροι Banach: αποδεικνύουμε εδώ ότι ο ℓ_∞ και ο c_0 είναι πλήρεις. Η απόδειξη για τον ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ αφήνεται για τις ασκήσεις. Σε επόμενο Κεφάλαιο θα μελετήσουμε αναλυτικά τον $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ και, μεταξύ άλλων, θα δούμε ότι είναι πλήρης.

Πρόταση 5.1.5. *Έστω* Γ *μη κενό σύνολο. Ο χώρος* $\ell_\infty(\Gamma)$ *των φραγμένων συναρτήσεων* $x : \Gamma \to \mathbb{R}$*, με μετρική την*

$$d_\infty(x,y) = \sup\{|x(\gamma) - y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\}$$

είναι πλήρης.

Απόδειξη. Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον $\ell_\infty(\Gamma)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι βασική ακολουθία, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, s \geq n_0$ τότε $\sup\{|x_n(\gamma) - x_s(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} < \varepsilon$. Συνεπώς, αν $n, s \geq n_0$ τότε για κάθε $\gamma \in \Gamma$ ισχύει

$$(*) \qquad |x_n(\gamma) - x_s(\gamma)| < \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\gamma \in \Gamma$ η ακολουθία $(x_n(\gamma))_n$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Άρα, υπάρχουν $x(\gamma) \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} x_n(\gamma) = x(\gamma), \qquad \gamma \in \Gamma.$$

Ορίζεται έτσι μια συνάρτηση $x : \Gamma \to \mathbb{R}$ που σε κάθε $\gamma \in \Gamma$ αντιστοιχεί τον αριθμό $x(\gamma)$. Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι $x \in \ell_\infty(\Gamma)$.

Για κάθε $\gamma \in \Gamma$, έχουμε $|x_n(\gamma) - x_s(\gamma)| \to |x_n(\gamma) - x(\gamma)|$ καθώς $s \to \infty$. Άρα, από την $(*)$ έπεται ότι

$$(**) \qquad |x_n(\gamma) - x(\gamma)| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } n \geq n_0 \text{ και για κάθε } \gamma \in \Gamma.$$

Επομένως, για κάθε $\gamma \in \Gamma$,

$$|x(\gamma)| \leq |x_{n_0}(\gamma)| + \varepsilon \leq \|x_{n_0}\|_\infty + \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\sup_\gamma |x(\gamma)| \leq \|x_{n_0}\|_\infty + \varepsilon < \infty$, δηλαδή $x \in \ell_\infty(\Gamma)$. [1]

Επίσης από την $(**)$, έχουμε ότι, για κάθε $n \geq n_0$,

$$d_\infty(x_n, x) = \sup\{|x_n(\gamma) - x(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ είναι τυχόν, δείξαμε ότι $x_n \to x$ ως προς την d_∞. □

Εφαρμόζοντας την πρόταση στην ειδική περίπτωση $\Gamma = \mathbb{N}$, έχουμε:

Πόρισμα 5.1.6. *Ο χώρος ℓ_∞ των φραγμένων ακολουθιών, με μετρική την*

$$d_\infty(x, y) = \sup\{|x(i) - y(i)| : i \in \mathbb{N}\}$$

είναι πλήρης.

Πρόταση 5.1.7. *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $F \subseteq X$. Το F είναι κλειστό υποσύνολο του X αν και μόνον αν ο $(F, \rho|_F)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το F είναι κλειστό υποσύνολο του X. Θα δείξουμε ότι είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του (X, ρ). Έστω (x_n) βασική ακολουθία στοιχείων του F. Τότε, η (x_n) είναι βασική ακολουθία και στον X και, αφού ο X είναι πλήρης, έπεται ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$. Αλλά, από την υπόθεση ότι το F είναι κλειστό, έπεται ότι $x \in F$. Άρα, ο F είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος.

Αντίστροφα· έστω ότι ο F είναι πλήρης μετρικός χώρος. Θα δείξουμε ότι είναι κλειστό υποσύνολο του X. Έστω $(y_n) \subseteq F$ με $y_n \to y \in X$. Αφού η (y_n) είναι συγκλίνουσα, είναι βασική ακολουθία και περιέχεται στον πλήρη μετρικό χώρο F. Άρα, συγκλίνει σε σημείο του F. Από τη μοναδικότητα του ορίου, αφού $y_n \to y$, έχουμε ότι $y \in F$. Έπεται ότι το F είναι κλειστό υποσύνολο του X. □

Εφαρμογή 5.1.8. Ο χώρος c_0 των μηδενικών ακολουθιών με τη μετρική που επάγεται από τον ℓ_∞ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

[1] Αλλιώς: η (x_n) είναι βασική, άρα φραγμένη. Αν $M = \sup_n \|x_n\|_\infty$, τότε για κάθε $\gamma \in \Gamma$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $|x_n(\gamma)| \leq M$ και συνεπώς $|x(\gamma)| \leq M$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$, δηλαδή $\|x\|_\infty \leq M < \infty$.

Απόδειξη. Ο c_0 είναι υπόχωρος του ℓ_∞. Για να δείξουμε ότι είναι πλήρης, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞.

Έστω $x = (x(i)) \in \overline{c_0}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \in c_0$, δηλαδή ότι $\lim\limits_{i\to\infty} x(i) = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y = (y(i)) \in c_0$ με $\|y - x\|_\infty < \varepsilon$. Δηλαδή, για κάθε $i \in \mathbb{N}$,

$$|x(i) - y(i)| < \varepsilon.$$

Η $y = (y(i))$ ανήκει στον c_0, άρα, υπάρχει $i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $i \geq i_0$,

$$|y(i)| < \varepsilon.$$

Επομένως για κάθε $i \geq i_0$,

$$|x(i)| \leq |x(i) - y(i)| + |y(i)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Άρα, $x(i) \to 0$ όταν το $i \to \infty$, δηλαδή $x \in c_0$. □

5.2 Το θεώρημα του Cantor

Το θεώρημα του Cantor γενικεύει την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων στο πλαίσιο των μετρικών χώρων. Στην πραγματικότητα, η αρχή κιβωτισμού στο $\mathbb{R}$ οφείλεται στον Cantor, ενώ η εκδοχή του θεωρήματος στους μετρικούς χώρους αποδίδεται στον Fréchet. Παρ' όλα αυτά έχει επικρατήσει να φέρει το όνομα του πρώτου.

Λήμμα 5.2.1. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω $\{A_n\}$ ακολουθία υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$. Τότε, το σύνολο $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$ περιέχει το πολύ ένα στοιχείο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x, y \in X$ με $x \neq y$ και $x, y \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n$. Αφού $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{diam}(A_n) < \rho(x, y)$. Άτοπο, διότι $x, y \in A_n$. □

Λήμμα 5.2.2. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω (x_n) ακολουθία στον X. Ορίζουμε την ακολουθία συνόλων*

$$R_n = \{x_k : k \geq n\}$$

για $n = 1, 2, \ldots$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) *Η ακολουθία (x_n) είναι βασική.*

(β) $\mathrm{diam}(R_n) \to 0$ *καθώς το $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι η (x_n) είναι βασική. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m, n \geq n_0$ τότε $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Από τον ορισμό των R_n έπεται ότι $\mathrm{diam}(R_{n_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Παρατηρούμε ότι η $\{R_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία ($R_1 \supseteq R_2 \supseteq \cdots$), άρα αν $n \geq n_0$ τότε

$$\mathrm{diam}(R_n) \leq \mathrm{diam}(R_{n_0}) < \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\mathrm{diam}(R_n) \to 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η ακολουθία των διαμέτρων $(\mathrm{diam}(R_n))$ είναι μηδενική. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{diam}(R_{n_0}) < \varepsilon$. Αν $m, n \geq n_0$ τότε $x_n, x_m \in R_{n_0}$, οπότε

$$\rho(x_n, x_m) \leq \mathrm{diam}(R_{n_0}) < \varepsilon$$

Συνεπώς, η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον (X, ρ). □

Θεώρημα 5.2.3 (Cantor–Fréchet). *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο χώρος (X, ρ) είναι πλήρης.*

(β) *Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$ για κάποιο $x \in X$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο X είναι πλήρης και θεωρούμε μια ακολουθία $\{F_n\}$ όπως στην υπόθεση. Αφού κάθε F_n είναι μη κενό, μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in F_n$ για κάθε n. Έτσι, σχηματίζουμε μια ακολουθία (x_n).

Γράφουμε $R_n = \{x_k : k \geq n\}$. Αφού η $\{F_n\}$ είναι φθίνουσα, έχουμε $R_n \subseteq F_n$. Άρα, ισχύει η ανισότητα $\mathrm{diam}(R_n) \leq \mathrm{diam}(F_n)$. Αφού $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, έπεται ότι $\mathrm{diam}(R_n) \to 0$ και από το προηγούμενο λήμμα η (x_n) είναι βασική. Ο (X, ρ) είναι πλήρης, συνεπώς υπάρχει $x \in X$ ώστε $\rho(x_n, x) \to 0$.

Δείχνουμε τώρα ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Τότε, η $(x_{n+m})_{n\in\mathbb{N}}$ έχει όλους τους όρους της στο F_m και είναι υπακολουθία της (x_n). Επομένως, συγκλίνει κι αυτή στο x και επειδή το F_m είναι κλειστό έπεται ότι $x \in F_m$.

Από το λήμμα 5.2.1 το $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ έχει το πολύ ένα στοιχείο, άρα έχουμε το ζητούμενο.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύει το (β). Έστω (x_n) μια βασική ακολουθία στον X. Θεωρούμε τα σύνολα $R_n = \{x_k : k \geq n\}$ όπως στο λήμμα 5.2.2. Τότε, τα R_n είναι μη κενά, σχηματίζουν φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του X και $\mathrm{diam}(R_n) \to 0$. Για να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση θεωρούμε τα $\overline{R}_n$ τα οποία είναι επιπλέον κλειστά. Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{diam}(\overline{R}_n) = \mathrm{diam}(R_n) \to 0$. Έτσι, από την υπόθεση, υπάρχει $x \in X$ ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{R}_n = \{x\}$. Όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x_n, x \in \overline{R}_n$, άρα

$$\rho(x_n, x) \leq \mathrm{diam}(\overline{R}_n) \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$, δηλαδή $x_n \xrightarrow{\rho} x$. □

Παρατηρήσεις 5.2.4. (α) Η υπόθεση ότι τα σύνολα F_n είναι κλειστά δεν μπορεί να παραλειφθεί. Στον πλήρη μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ η ακολουθία $G_n = (0, \frac{1}{n})$ είναι φθίνουσα και $\mathrm{diam}(G_n) = \frac{1}{n} \to 0$, αλλά $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$. Παρατηρήστε ότι τα G_n δεν είναι κλειστά στο $\mathbb{R}$.

(β) Η υπόθεση ότι $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Στον πλήρη μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ τα σύνολα $E_n = [n, +\infty)$ είναι κλειστά και $E_n \supseteq E_{n+1}$ για $n = 1, 2, \ldots$, αλλά $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$. Παρατηρήστε ότι $\mathrm{diam}(E_n) = \infty$ για κάθε n.

(γ) Σύμφωνα με το θεώρημα 5.2.3, σε κάθε μετρικό χώρο που δεν είναι πλήρης, υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(F_n)\to 0$ και κενή τομή. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το μετρικό χώρο $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, |\cdot|)$ και την ακολουθία κλειστών συνόλων $F_n=[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]\cap\mathbb{Q}^c$ τότε ισχύουν οι $F_n\supseteq F_{n+1}$ για $n=1,2,\ldots$ και $\mathrm{diam}(F_n)\to 0$ καθώς το $n\to\infty$, αλλά $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\emptyset$.

5.3 Το θεώρημα κατηγορίας του Baire

Σε αυτή την παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Cantor για να αποδείξουμε το θεώρημα κατηγορίας του Baire. Το θεώρημα του Baire έχει πολλές εφαρμογές στη Συναρτησιακή Ανάλυση (όπως είναι η αρχή ομοιόμορφου φράγματος, το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης, το θεώρημα κλειστού γραφήματος). Εδώ θα δώσουμε μια γεύση από τις εφαρμογές του στην κλασική ανάλυση, παρουσιάζοντας το θεώρημα του Osgood και την απόδειξη του Banach για την ύπαρξη συνεχών και πουθενά παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Πριν όμως περάσουμε στη διατύπωση και την απόδειξη του θεωρήματος, κάνουμε κάποια σχόλια.

Σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ), αν έχουμε μια πεπερασμένη ακολουθία $G_1,G_2,\ldots,G_m$ από ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X, τότε το $\bigcap_{i=1}^{m}G_i$ είναι πυκνό (και φυσικά, ανοικτό). Αντίστοιχο αποτέλεσμα δεν ισχύει αν θεωρήσουμε άπειρα το πλήθος σύνολα. Για παράδειγμα, στον $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ θεωρούμε μια αρίθμηση (q_n) του $\mathbb{Q}$ και ορίζουμε τα σύνολα $G_n=\mathbb{Q}\setminus\{q_n\}$. Τότε, τα G_n είναι ανοικτά και πυκνά στον $\mathbb{Q}$, αλλά η τομή τους είναι κενή. Αυτό συνδέεται με το γεγονός ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος. Το θεώρημα του Baire μας λέει ότι σε έναν πλήρη μετρικό χώρο, οποιαδήποτε αριθμήσιμη τομή ανοικτών και πυκνών συνόλων είναι μη κενή (και μάλιστα πυκνό υποσύνολο του χώρου).

Θεώρημα 5.3.1 (Baire). *Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και έστω (G_n) ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X. Τότε, το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ είναι πυκνό στον X. Ειδικότερα, $\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\neq\emptyset$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν μη κενό, ανοικτό σύνολο V στον X. Θα δείξουμε ότι $V\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\right)\neq\emptyset$.

Αφού το G_1 είναι πυκνό, έχουμε $V\cap G_1\neq\emptyset$. Το $V\cap G_1$ είναι ανοικτό, άρα υπάρχουν $0<r_1<1$ και $x_1\in V\cap G_1$ ώστε $\hat{B}(x_1,r_1)\subseteq V\cap G_1$.

Το σύνολο $B(x_1,r_1)$ είναι ανοικτό, άρα το σύνολο $G_2\cap B(x_1,r_1)$ είναι μη κενό και ανοικτό. Υπάρχουν $x_2\in G_2\cap B(x_1,r_1)$ και $0<r_2<\frac{1}{2}$ ώστε

$$\hat{B}(x_2,r_2)\subseteq G_2\cap B(x_1,r_1)\subseteq V\cap G_1\cap G_2.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε μια ακολουθία από κλειστές μπάλες $\hat{B}(x_n,r_n)$ που ικανοποιούν τα εξής:

- $\mathrm{diam}(\hat{B}(x_n,r_n))\leq\frac{2}{n}$

- $\hat{B}(x_n, r_n) \subseteq G_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$, άρα $\hat{B}(x_n, r_n) \subseteq \hat{B}(x_{n-1}, r_{n-1})$ και
- $\hat{B}(x_n, r_n) \subseteq V \cap G_1 \cap \cdots \cap G_n$.

Από το θεώρημα του Cantor, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, r_n)$. Τότε $x \in V \cap G_1 \cap \ldots \cap G_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $x \in V \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)$. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Πόρισμα 5.3.2. *Έστω G πυκνό και G_δ–υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε, το G είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ και ότι υπάρχουν G_n ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Παρατηρούμε ότι τα σύνολα G_n είναι πυκνά (διότι το G είναι πυκνό). Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $V_n = \mathbb{R} \setminus \{x_n\}$ είναι ανοικτό (αφού $\{x_n\}$ κλειστό) και πυκνό (αφού $\mathrm{int}\{x_n\} = \emptyset$). Όμως,

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) = (\mathbb{R} \setminus G) \cap G = \emptyset.$$

Αυτό έρχεται σε αντίφαση με το θεώρημα του Baire. □

Πόρισμα 5.3.3. *Το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ δεν είναι G_δ–υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Πόρισμα 5.3.4. *Δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με σύνολο σημείων συνέχειας $C(f) = \mathbb{Q}$ (δηλαδή συνεχής σε κάθε ρητό και ασυνεχής σε κάθε άρρητο).*

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το πόρισμα 5.3.3 και το θεώρημα 4.4.11: για κάθε $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, το σύνολο $C(f)$ των σημείων συνέχειας της f είναι G_δ–υποσύνολο του X. □

Μια ισοδύναμη και πιο εύχρηστη μορφή του θεωρήματος του Baire είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 5.3.5 (Baire)**.** *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και έστω F_n ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Τότε, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}(F_k) \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\mathrm{int}(F_n) = \emptyset$. Τότε, τα $G_n = X \setminus F_n$ είναι ανοικτά και πυκνά, διότι $\overline{X \setminus F_n} = X \setminus \mathrm{int}(F_n) = X$. Επίσης,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset.$$

Αυτό είναι άτοπο σύμφωνα με το θεώρημα 5.3.1. □

Από την προηγούμενη ισοδύναμη μορφή του θεωρήματος του Baire οδηγούμαστε στους επόμενους ορισμούς:

Ορισμός 5.3.6. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.

(α) Ένα υποσύνολο A του X λέγεται *πουθενά πυκνό* ή *αραιό* αν ισχύει $\mathrm{int}(\overline{A})=\emptyset$.

(β) Ένα υποσύνολο B του X λέγεται *πρώτης κατηγορίας* (στον X) αν γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών υποσυνόλων του X, δηλαδή αν υπάρχουν E_n, $n=1,2,\ldots$ πουθενά πυκνά υποσύνολα του X, ώστε $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$.

(γ) Ένα υποσύνολο C του X λέγεται *δεύτερης κατηγορίας* (στον X) αν δεν είναι πρώτης κατηγορίας.

Με αυτή την ορολογία, το θεώρημα Baire διατυπώνεται ως εξής: *κάθε πλήρης μετρικός χώρος είναι σύνολο δεύτερης κατηγορίας (στον εαυτό του).*

5.3.1 Εφαρμογές του θεωρήματος του Baire

Θεώρημα 5.3.7 (Osgood). *Έστω $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t\in[0,1]$ η ακολουθία $(f_n(t))$ είναι φραγμένη. Τότε, υπάρχουν $[a,b]\subseteq[0,1]$ και $M>0$ ώστε, για κάθε $t\in[a,b]$ και για κάθε $n\in\mathbb{N}$,*

$$|f_n(t)|\leq M.$$

Δηλαδή, η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη σε κάποιο $[a,b]\subseteq[0,1]$.

Απόδειξη. Για κάθε $m\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m=\{t\in[0,1]:\forall n\in\mathbb{N},\ |f_n(t)|\leq m\}.$$

Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Κάθε A_m είναι κλειστό: παρατηρήστε ότι

$$A_m=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{t\in[0,1]:|f_n(t)|\leq m\}$$

και καθένα από τα σύνολα $\{t\in[0,1]:|f_n(t)|\leq m\}$ είναι κλειστό αφού κάθε f_n είναι συνεχής.

(ii) $[0,1]=\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m$: Έστω $t\in[0,1]$. Από την υπόθεση, η $(f_n(t))$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M_t>0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $|f_n(t)|\leq M_t$. Υπάρχει $m=m(t)\in\mathbb{N}$ με $m\geq M_t$, και γι' αυτό το m έχουμε $t\in A_m$.

Ο $[0,1]$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, οπότε το θεώρημα του Baire μας εξασφαλίζει ότι κάποιο A_{m_0} έχει μη κενό εσωτερικό, οπότε υπάρχει διάστημα $[a,b]\subseteq A_{m_0}$. Όμως τότε, η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[a,b]$: για κάθε $t\in[a,b]$ και για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ισχύει $|f_n(t)|\leq m_0$. $\square$

Θεώρημα* 5.3.1. *Θεωρούμε το χώρο $\mathcal{C}([0,1])$ των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με μετρική την $d_\infty(f,g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$ (σε επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι είναι πλήρης μετρικός χώρος). Το σύνολο M των $f \in \mathcal{C}([0,1])$ που δεν έχουν παράγωγο σε κανένα σημείο του $[0,1]$ είναι πυκνό στον $\mathcal{C}([0,1])$.*

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Baire και το εξής λήμμα:

Λήμμα* 5.3.1. *Για κάθε συνεχή $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε συνεχή «πολυγωνική συνάρτηση» $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $d_\infty(f,g) < \varepsilon$.*

[Μια συνεχής συνάρτηση g λέγεται *πολυγωνική* αν το γράφημά της είναι πολυγωνική γραμμή, δηλαδή αν υπάρχει διαμέριση $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1\}$ του $[0,1]$ ώστε $g(t) = a_i t + b_i$ σε κάθε (t_{i-1}, t_i), $i = 1, \ldots, N$.]

Απόδειξη του λήμματος. Θα χρησιμοποιήσουμε την ομοιόμορφη συνέχεια της f: Για το δοσμένο $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $t, s \in [0,1]$ και $|t-s| < \delta$ τότε $|f(s) - f(t)| < \varepsilon/2$.

Βρίσκουμε φυσικό αριθμό N που ικανοποιεί την $1/N < \delta$ και χωρίζουμε το $[0,1]$ σε N ίσα τμήματα. Παίρνουμε δηλαδή τη διαμέριση $P = \big\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1\big\}$ με $t_i = \frac{i}{N}$. Ορίζουμε την g ώστε να είναι της μορφής $g(t) = a_i t + b_i$ σε κάθε $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, N$ και προσδιορίζουμε τα a_i, b_i ώστε στα άκρα κάθε υποδιαστήματος να συμπίπτει με την f: [2]

$$g(t_i) = f(t_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, N.$$

Έστω $t \in [0,1]$. Υπάρχει δείκτης $1 \le i \le N$ ώστε $t_{i-1} \le t \le t_i$. Τότε,

$$(*) \qquad |f(t) - g(t)| \le |f(t) - f(t_i)| + |f(t_i) - g(t)|.$$

Όμως $|t - t_i| < \delta$ άρα $|f(t) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ και, από τη μορφή της g στο $[t_{i-1}, t_i]$ και το γεγονός ότι $|t_i - t_{i-1}| = \frac{1}{N} < \delta$, βλέπουμε ότι

$$|f(t_i) - g(t)| = |g(t_i) - g(t)| \le |g(t_i) - g(t_{i-1})| = |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιστρέφοντας στην $(*)$ βλέπουμε ότι $|f(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Αφού το t ήταν τυχόν, $d_\infty(f,g) < \varepsilon$. □

Απόδειξη του θεωρήματος. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο

$$D_n = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) : \forall t \in [0,1]\ \exists y \in \big(t - \frac{1}{n}, t + \frac{1}{n}\big) \cap (0,1) : |f(y) - f(t)| > n|y - t| \right\}.$$

Ισχυρισμός. Κάθε $f \in \bigcap_{n=1}^\infty D_n$ είναι συνεχής, πουθενά παραγωγίσιμη συνάρτηση.

[2] $g(t) = f(t_i) + \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}(t - t_i), \qquad t \in [t_{i-1}, t_i]$.

Απόδειξη. Έστω $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$. Για κάθε $t \in [0,1]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $y_n = y_n(t) \in (0,1)$ ώστε $|t - y_n| < \frac{1}{n}$ και $|f(y_n) - f(t)| > n|y_n - t|$, άρα $y_n \neq t$. Αφού $y_n \to t$ και

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f(y_n) - f(t)}{y_n - t} \right| = \infty,$$

η $f'(t)$ δεν υπάρχει. □

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ είναι πυκνό στον $\mathcal{C}([0,1])$. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Baire, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε D_n είναι ανοικτό και πυκνό.

Ισχυρισμός. Κάθε D_n είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{C}([0,1])$.

Απόδειξη. Είναι πιο εύκολο να δείξουμε ότι το συμπλήρωμα D_n^c του D_n είναι κλειστό. Έστω $f_k \in D_n^c$ και $f_k \to f$ ως προς την d_∞.

Αφού $f_k \in D_n^c$, υπάρχει $t_k \in [0,1]$ ώστε για κάθε $y \in (0,1)$ με $|y - t_k| < 1/n$ να ισχύει

$$(\dagger) \qquad |f(y) - f(t_k)| \leq n|y - t_k|.$$

Αφού $t_k \in [0,1]$, η (t_k) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία: υπάρχουν $t \in [0,1]$ και υπακολουθία (t_{k_m}) της (t_k) με $t_{k_m} \to t$.

Θα δείξουμε ότι αν $y \in (0,1)$ και $|y - t| < 1/n$ τότε $|f(y) - f(t)| \leq n|y - t|$ (συνεπώς, $f \in D_n^c$.)

Έστω $\varepsilon > 0$ και $y \in (0,1)$ με $|y - t| < 1/n$. Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Αν $y_{k_m} = y + (t_{k_m} - t)$, τότε $y_{k_m} \to y$. Άρα, για μεγάλα m έχουμε $y_{k_m} \in (0,1)$ και $|y_{k_m} - t_{k_m}| = |y - t| < 1/n$. Συνεπώς, από την $(\dagger)$,

$$|f_{k_m}(y_{k_m}) - f_{k_m}(t_{k_m})| \leq n|y_{k_m} - t_{k_m}| = n|y - t|.$$

(ii) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και $t_{k_m} \to t$. Επίσης, $y_{k_m} - y = t_{k_m} - t \to 0$. Άρα, για μεγάλα m ισχύουν οι

$$|f(t) - f(t_{k_m})| < \varepsilon \text{ και } |f(y) - f(y_{k_m})| < \varepsilon.$$

(iii) Πάλι για μεγάλα m, $d_\infty(f_{k_m}, f) < \varepsilon$ (διότι $f_{k_m} \to f$).

Παίρνουμε m τόσο μεγάλο που να ικανοποιούνται τα (i), (ii) και (iii), και γράφουμε

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(t)| &\leq |f(y) - f(y_{k_m})| + |f(y_{k_m}) - f_{k_m}(y_{k_m})| + |f_{k_m}(y_{k_m}) - f_{k_m}(t_{k_m})| \\
&\quad + |f_{k_m}(t_{k_m}) - f(t_{k_m})| + |f(t_{k_m}) - f(t)| \\
&< \varepsilon + d(f, f_{k_m}) + n|y - t| + d(f_{k_m}, f) + \varepsilon \\
&< n|y - t| + 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $|f(y) - f(t)| \leq n|y - t|$. Αυτό ισχύει για το τυχόν $y \in (0,1)$ με $|y - t| < 1/n$, άρα $f \in D_n^c$. □

Ισχυρισμός. Κάθε D_n είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{C}([0,1])$.

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{C}([0,1])$ και έστω $\varepsilon > 0$. Από το λήμμα, υπάρχει $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής, πολυγωνική, ώστε $d_\infty(f,g) < \varepsilon/2$. Συνεπώς, αρκεί να βρούμε $h \in D_n$ ώστε $d_\infty(g,h) < \varepsilon/2$.

Η g είναι πολυγωνική, δηλαδή υπάρχουν $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ ώστε η g να έχει σταθερή παράγωγο σε κάθε (t_{i-1}, t_i). Έστω l_i η κλίση της g στο (t_{i-1}, t_i).

Ορίζουμε μια μικρή «οδοντωτή» συνάρτηση $w : [0,1] \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε: (i) $0 \leq w(t) \leq \varepsilon/2$ στο $[0,1]$ και (ii) οι κλίσεις της w είναι (κατ' απόλυτη τιμή ίσες και) μεγαλύτερες από $Q = n + \max\{|l_j| : j = 1, \ldots, N\}$. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής: χωρίζουμε το $[0,1]$ σε διαδοχικά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\varepsilon/2Q$, ορίζουμε την w να παίρνει εναλλάξ τις τιμές 0 και $\varepsilon/2$ στα άκρα αυτών των διαστημάτων, και επεκτείνουμε την w σε πολυγωνική συνάρτηση. Θέτουμε $h = g + w$, οπότε

$$d_\infty(g,h) = \max_{t \in [0,1]} |w(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι $h \in D_n$. Έστω $t \in [0,1]$. Υπάρχει δείκτης $i \leq N$ για τον οποίο $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Επιλέγουμε $|s| < 1/n$ τόσο μικρό ώστε στο διάστημα με άκρα τα $t, t+s$ οι g και w να έχουν και οι δύο σταθερές παραγώγους (το s μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό). Αν y είναι ένα σημείο του ανοικτού διαστήματος με άκρα $t, t+s$, έχουμε $y \in (0,1)$, $|y-t| < 1/n$ και $|g(y) - g(t)| = |l_i||y-t|$, άρα

$$\begin{aligned} |h(y) - h(t)| &\geq |w(y) - w(t)| - |g(y) - g(t)| \\ &> Q|y-t| - |l_i||y-t| = \left(n + \max_j |l_j|\right)|y-t| - |l_i||y-t| \\ &= n|y-t|. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $h \in D_n$. □

5.4 Πλήρωση μετρικού χώρου*

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε με ποιόν τρόπο κάθε μετρικός χώρος X μπορεί να «γίνει» πυκνός μέσα σε έναν πλήρη μετρικό χώρο $\tilde{X}$ ο οποίος είναι με μια έννοια μοναδικός και λέγεται *πλήρωση* του X. Ακριβέστερα θα αποδείξουμε το εξής: *Κάθε μετρικός χώρος εμφυτεύεται ισομετρικά και πυκνά σε έναν πλήρη μετρικό χώρο.*

Ορισμός 5.4.1 (πλήρωση μετρικού χώρου)**.** Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ένας πλήρης μετρικός χώρος (Y, σ) λέγεται *πλήρωση* του X αν υπάρχει ισομετρία $T : X \to Y$ για την οποία ο $T(X)$ είναι πυκνός υπόχωρος του Y.

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι κάθε μετρικός χώρος έχει μια πλήρωση.

Θεώρημα 5.4.2 (ύπαρξη πλήρωσης)**.** *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε, υπάρχουν πλήρης μετρικός χώρος $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ και $T : X \to \tilde{X}$ ισομετρία ώστε ο $T(X)$ να είναι πυκνός υπόχωρος του $\tilde{X}$.*

Θα περιγράψουμε δύο αποδείξεις. Η πρώτη βασίζεται στο επόμενο λήμμα (υπενθυμίζουμε ότι ο $\ell_\infty(X)$ είναι ο χώρος των φραγμένων συναρτησεων $f : X \to \mathbb{R}$. Αν εφοδιασθεί με την μετρική d_∞ όπου $d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$, είναι πλήρης μετρικός χώρος).

Λήμμα 5.4.3. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε υπάρχει ισομετρική εμφύτευση $T : (X,\rho) \to (\ell_\infty(X), d_\infty)$.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε και σταθεροποιούμε ένα σημείο $a \in X$. Για κάθε $x \in X$, ορίζουμε την συνάρτηση $f_x : X \to \mathbb{R}$ από τον τύπο

$$f_x(t) = \rho(t,x) - \rho(t,a), \quad t \in X.$$

Παρατηρούμε ότι η f_x είναι φραγμένη στο X. Πράγματι, για κάθε $t \in X$ έχουμε $|f_x(t)| = |\rho(t,x) - \rho(t,a)| \leq \rho(x,a)$. Δηλαδή $f_x \in \ell_\infty(X)$ αφού $\|f_x\|_\infty \leq \rho(x,a)$. Ορίζεται λοιπόν μια απεικόνιση

$$T : X \to \ell_\infty(X) \text{ με } x \mapsto f_x.$$

Η απεικόνιση αυτή είναι ισομετρία. Πράγματι αν $x,y \in X$, τότε για κάθε $t \in X$ έχουμε $|f_x(t) - f_y(t)| = |\rho(t,x) - \rho(t,y)| \leq \rho(x,y)$, άρα $\sup\{|f_x(t) - f_y(t)| : t \in X\} \leq \rho(x,y)$ και $\sup\{|f_x(t) - f_y(t)| : t \in X\} \geq |f_x(y) - f_y(y)| = \rho(x,y)$, οπότε ισχύει ισότητα. Δηλαδή

$$d_\infty(T(x), T(y)) = \rho(x,y).$$

□

Απόδειξη του θεωρήματος 5.4.2. Ονομάζουμε $\tilde{X}$ την κλειστή θήκη $\overline{T(X)}$ της εικόνας του X μέσα στον $(\ell_\infty(X), d_\infty)$ μέσω της απεικόνισης T του προηγούμενου Λήμματος. Η T είναι ισομετρία και η εικόνα της, $T(X)$, είναι από την κατασκευή της πυκνή στον $\tilde{X}$. Όμως ο $\tilde{X}$ είναι κλειστός υπόχωρος του πλήρους μετρικού χώρου $(\ell_\infty(X), d_\infty)$ και συνεπώς με την επαγόμενη μετρική είναι πλήρης μετρικός χώρος. □

Δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος 5.4.2. Η απόδειξη του θεωρήματος θα γίνει σε τρία βήματα.

(i) *Ορισμός του $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$.* Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο σύνολο των βασικών ακολουθιών του X: λέμε ότι οι βασικές ακολουθίες (x_n) και (x'_n) είναι ισοδύναμες και γράφουμε $(x_n) \sim (x'_n)$ αν

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = 0.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\sim$ είναι όντως σχέση ισοδυναμίας. Παρατηρήστε επίσης ότι αν μια ακολουθία (y_n) συγκλίνει σε κάποιο $y \in X$ τότε είναι ισοδύναμη με τη σταθερή ακολουθία $z_n = y$:

$$y_n \to y \in X \text{ αν και μόνο αν } (y_n) \sim (y, y, \ldots).$$

Ορίζουμε $\tilde{X}$ να είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$. Συμβολίζουμε τις κλάσεις ισοδυναμίας (τα στοιχεία του $\tilde{X}$) με $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \ldots$ Αν $(x_n) \in \tilde{x}$ τότε λέμε ότι η (x_n) είναι *αντιπρόσωπος της κλάσης $\tilde{x}$.*

Στη συνέχεια, ορίζουμε μετρική $\tilde{\rho}$ στον $\tilde{X}$. Έστω $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$. Θεωρούμε τυχόντες αντιπροσώπους $(x_n), (y_n)$ των $\tilde{x}, \tilde{y}$, και θέτουμε

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι αυτό το όριο υπάρχει. Θυμηθείτε ότι οι $(x_n), (y_n)$ είναι βασικές ακολουθίες:

από την τριγωνική ανισότητα,

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m)$$

από το οποίο προκύπτει ότι η $(\rho(x_n, y_n))$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$, άρα το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$ υπάρχει.

Πρέπει ακόμα να δείξουμε ότι η ποσότητα $\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y})$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των αντιπροσώπων $(x_n) \in \tilde{x}$ και $(y_n) \in \tilde{y}$. Αν όμως υποθέσουμε ότι $(x'_n) \sim (x_n)$ και $(y'_n) \sim (y_n)$ τότε από την

$$|\rho(x'_n, y'_n) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n) \to 0$$

βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Τέλος, πρέπει να ελέγξουμε ότι η $\tilde{\rho}$ ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής. Όλες οι ιδιότητες της μετρικής ελέγχονται άμεσα. Έστω $(x_n) \in \tilde{x}$, $(y_n) \in \tilde{y}$ και $(z_n) \in \tilde{z}$. Τότε, για παράδειγμα, αν $\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$, άρα $(x_n) \sim (y_n)$ και αυτό σημαίνει ότι $\tilde{x} = \tilde{y}$. Επίσης, η τριγωνική ανισότητα

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{z}) + \tilde{\rho}(\tilde{z}, \tilde{y})$$

είναι άμεση συνέπεια της

$$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n).$$

Έτσι, έχουμε ορίσει τον $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$.

(ii) *Πυκνή ισομετρική εμφύτευση του X στον $\tilde{X}$.* Σε κάθε $y \in X$ αντιστοιχεί φυσιολογικά η σταθερή ακολουθία $(y, y, \ldots)$, καθώς και η κλάση της, που είναι στοιχείο του $\tilde{X}$.

Ορίζουμε

$$T : (X, \rho) \to (W, \tilde{\rho}) : b \to \tilde{b}$$

όπου $\tilde{b}$ είναι η κλάση της σταθερής ακολουθίας $(b, b, \ldots)$. Παρατηρώντας ότι

$$\tilde{\rho}(\tilde{b_1}, \tilde{b_2}) = \lim_{n\to\infty} \rho(b_1, b_2) = \rho(b_1, b_2)$$

αν $b_1, b_2 \in X$, βλέπουμε αμέσως ότι η απεικόνιση T είναι ισομετρία. Θέτουμε

$$W = \{\tilde{b} : b \in X\}.$$

Δείχνουμε ότι $\overline{W}^{\tilde{\rho}} = \tilde{X}$ (ο X εμφυτεύεται «πυκνά» στον $\tilde{X}$). Πράγματι, έστω $\tilde{x} \in \tilde{X}$ και έστω (x_n) ένας αντιπρόσωπος της κλάσης $\tilde{x}$, δηλαδή $(x_n) \in \tilde{x}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon/2$ για κάθε $m, n \geq n_0$ (αυτό ισχύει διότι η (x_n) είναι βασική). Έστω $T(y) \in W$ η κλάση της σταθερής ακολουθίας $y = (y_m)$ όπου $y_m = x_{n_0}$ για κάθε m. Τότε,

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, T(y)) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_m, y_n) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_m, x_{n_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ελέγξαμε ότι, για κάθε $\tilde{x} \in \tilde{X}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $W \cap B_{\tilde{\rho}}(\tilde{x}, \varepsilon) \neq \emptyset$. Άρα, ο W είναι $\tilde{\rho}$–πυκνός στον $\tilde{X}$.

(iii) *Πληρότητα του* $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$. Έστω $(\tilde{x}_n)$ βασική ακολουθία στον $\tilde{X}$. Αφού ο W είναι $\tilde{\rho}$–πυκνός στον $\tilde{X}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $\tilde{y}_n = T((y_n, y_n, \ldots)) \in W$ ώστε $\tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) < 1/n$. Από την τριγωνική ανισότητα,

$$\begin{aligned} \rho(y_m, y_n) &= \tilde{\rho}(\tilde{y}_m, \tilde{y}_n) \leq \tilde{\rho}(\tilde{y}_m, \tilde{x}_m) + \tilde{\rho}(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) + \tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \\ &< \frac{1}{m} + \tilde{\rho}(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η (y_n) είναι βασική ακολουθία στον X. Έστω $\tilde{y}$ η κλάση ισοδυναμίας της $(y_n) = (y_1, y_2, \ldots)$. Τότε,

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}) \leq \tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) + \tilde{\rho}(\tilde{y}_n, \tilde{y}) < \frac{1}{n} + \tilde{\rho}(\tilde{y}_n, \tilde{y}).$$

Όμως, αφού $\tilde{y}_n = T((y_n, y_n, \ldots))$,

$$\tilde{\rho}(\tilde{y}_n, \tilde{y}) = \tilde{\rho}(T((y_n, y_n, \ldots)), T((y_1, y_2, \ldots))) = \lim_{m\to\infty} \rho(y_n, y_m),$$

άρα

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}) \leq \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} \rho(y_n, y_m).$$

Αν δοθεί $\varepsilon > 0$, επιλέγοντας αρκετά μεγάλο n έχουμε ότι η τελευταία ποσότητα γίνεται μικρότερη από ε (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, $\tilde{x}_n \xrightarrow{\tilde{\rho}} \tilde{y}$. Δηλαδή, ο $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ είναι πλήρης. □

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η πλήρωση ενός μετρικού χώρου που προκύπτει με την παραπάνω κατασκευή είναι μοναδική με την ακόλουθη έννοια.

Θεώρημα 5.4.4 (μοναδικότητα πλήρωσης)**.** *Έστω* $(\tilde{X}_1, \rho_1)$ *και* $(\tilde{X}_2, \rho_2)$ *δύο πληρώσεις του ίδιου μετρικού χώρου* (X, ρ). *Τότε, υπάρχει* $\tau : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, *ισομετρία και επί. Μάλιστα, αν* $T_i : X \to \tilde{X}_i$ $(i = 1, 2)$ *είναι οι δύο ισομετρικές εμφυτεύσεις, τότε* $\tau(T_1(x)) = T_2(x)$ *για κάθε* $x \in X$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος 5.4.4 θα χρειαστούμε ένα θεώρημα επέκτασης για ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε πυκνά υποσύνολα μετρικών χώρων. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει η ακόλουθη:

Πρόταση 5.4.5. *Έστω (M, ρ) μετρικός χώρος και έστω D πυκνό υποσύνολο του M. Αν (N, σ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και $f : D \to N$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, τότε αυτή επεκτείνεται μοναδικά σε μια ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση $F : M \to N$. Επιπλέον, αν η f είναι ισομετρία, τότε η F είναι ισομετρία.*

Απόδειξη. Θέλουμε να επεκτείνουμε την f συνεχώς, σε σημεία του $M \setminus D$. Έστω $x \in M$. Επειδή το D είναι πυκνό στο M υπάρχει ακολουθία (t_n) στοιχείων του D ώστε $t_n \xrightarrow{\rho} x$. Ειδικότερα, η (t_n) είναι ρ–βασική. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, απεικονίζει βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες, άρα η $(f(t_n))$ είναι σ–βασική. Επίσης, ο (N, σ) είναι πλήρης, οπότε υπάρχει $y \in N$ ώστε $f(t_n) \xrightarrow{\sigma} y$. Ορίζουμε λοιπόν την απεικόνιση $F : M \to N$ με $x \mapsto F(x) := \lim_{n\to\infty} f(t_n)$, όπου $(t_n) \subseteq D$ και $t_n \to x$.

Ισχυρισμός 1. Η F είναι καλά ορισμένη συνάρτηση.

Αν $(a_n), (b_n)$ είναι ακολουθίες στοιχείων του D με $a_n \to x$ και $b_n \to x$, θέτουμε $y_1 = \lim f(a_n), y_2 = \lim f(b_n)$. Όμως, $\rho(a_n, b_n) \to \rho(x, x) = 0$. Έπεται ότι

$$\sigma(y_1, y_2) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f(a_n), f(b_n)) = 0,$$

διότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Επομένως, η εικόνα y του x *δεν* εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας που προσεγγίζει το x.

Ισχυρισμός 2. Η F είναι επέκταση της f δηλαδή, $F|_D = f$.

Αν $t \in D$ τότε για την $t_n = t$, $n = 1, 2, ...$ ισχύει $t_n \to t$, άρα $F(t) = \lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(t)$.

Ισχυρισμός 3. Η F είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $t_1, t_2 \in D$ με $\rho(t_1, t_2) < \delta$, τότε $\sigma(f(t_1), f(t_2)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Έστω $x, y \in M$ με $\rho(x, y) < \frac{\delta}{3}$. Θα δείξουμε ότι $\sigma(F(y), F(x)) < \varepsilon$. Υπάρχει $a \in D$ ώστε $\rho(a, x) < \frac{\delta}{3}$ και $\sigma(F(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$ (εξηγήστε γιατί). Ομοίως, υπάρχει $b \in D$ ώστε $\rho(b, y) < \frac{\delta}{3}$ και $\sigma(F(y), f(b)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει ότι $\rho(a, b) < \delta$. Συνεπώς, $\sigma(f(a), f(b)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Πάλι από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $\sigma(F(y), F(x)) < \varepsilon$.

Αν η f είναι ισομετρία τότε ισχύουν οι ισότητες

$$\sigma(F(x), F(y)) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f(a_n), f(b_n)) = \lim_{n\to\infty} \rho(a_n, b_n) = \rho(x, y)$$

όπου $(a_n), (b_n)$ είναι ακολουθίες στο D με $a_n \to x$ και $b_n \to y$.

Η μοναδικότητα της F είναι απλή (δείτε την Άσκηση 4.1). □

Απόδειξη του θεωρήματος 5.4.4. Έστω $T_1 : X \to \tilde{X}_1$ και $T_2 : X \to \tilde{X}_2$ οι ισομετρικές και πυκνές εμφυτεύσεις του X στις πληρώσεις του $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ αντιστοίχως. Τότε, έχουμε το διάγραμμα

$$\tilde{X}_1 \quad \xrightarrow{\tau} \quad \tilde{X}_2$$

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \cup \\ T_1(X) & & T_2(X) \\ \uparrow T_1 & & \uparrow T_2 \\ X & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Θεωρούμε την προφανή συνάρτηση $T_2 \circ T_1^{-1} : T_1(X) \to T_2(X) \subset \tilde{X}_2$ η οποία είναι καλά ορισμένη διότι η T_1 είναι ισομετρία επί του $T_1(X)$ και η T_2 ισομετρία επί του $T_2(X)$. Επομένως, η $T_2 \circ T_1^{-1}$ είναι μια ισομετρία από το $T_1(X)$ στο $\tilde{X}_2$. Επιπλέον, το $T_1(X)$ είναι πυκνό στο $\tilde{X}_1$ άρα, από την πρόταση 5.4.5 έπεται ότι η ισομετρία $T_2 \circ T_1^{-1}$ επεκτείνεται σε μια ισομετρία τ σ' όλο τον $\tilde{X}_1$.

Ισχυρισμός. Η ισομετρία $\tau : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ είναι επί.

Έστω $y \in \tilde{X}_2$. Αφού το $T_2(X)$ είναι πυκνό στο $\tilde{X}_2$, υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X ώστε $T_2(x_n) \to y$. Άρα, η $(T_2(x_n))$ είναι βασική. Έπεται ότι η (x_n) είναι βασική και τελικά η $(T_1(x_n))$ είναι βασική. Συνεπώς, υπάρχει $x \in \tilde{X}_1$ ώστε $T_1(x_n) \to x$. Έτσι, παίρνουμε

$$\tau(x) = \lim_{n\to\infty} \tau(T_1(x_n)) = \lim_{n\to\infty} (T_2 \circ T_1^{-1}(T_1(x_n))) = \lim_{n\to\infty} (T_2(x_n)) = y.$$

Δηλαδή, η τ είναι επί του $\tilde{X}_2$. Ο τελευταίος ισχυρισμός ολοκληρώνει την απόδειξη. □

5.5 Το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach το οποίο εξασφαλίζει ότι κάθε συνάρτηση σε έναν πλήρη μετρικό χώρο που είναι *γνήσια συστολή* έχει μοναδικό σταθερό σημείο. Τα θεωρήματα σταθερού σημείου έχουν ποικίλες εφαρμογές στην Αριθμητική Ανάλυση, στην επίλυση αριθμητικών εξισώσεων και στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων.

Ορισμός 5.5.1 (σταθερό σημείο)**.** Έστω $f : X \to X$ συνάρτηση και έστω $x_0 \in X$. Το x_0 λέγεται *σταθερό σημείο* της f αν ισχύει $f(x_0) = x_0$.

Συμβολίζουμε με $\mathrm{Fix}(f)$ το σύνολο των σταθερών σημείων της f.

Πρόταση 5.5.2. *Έστω $f : (X,\rho) \to (X,\rho)$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, το $\mathrm{Fix}(f)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία σταθερών σημείων της f με $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Θα δείξουμε ότι το x είναι σταθερό σημείο της f. Από τη συνέχεια της f έχουμε ότι $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$. Αλλά $f(x_n) = x_n \xrightarrow{\rho} x$. Από τη μοναδικότητα του ορίου έχουμε ότι $f(x) = x$, δηλαδή $x \in \mathrm{Fix}(f)$. □

Θεώρημα 5.5.3 (Banach)**.** *Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $T : X \to X$ συνάρτηση με την ιδιότητα: υπάρχει $0 < c < 1$ ώστε*

$$\rho(T(x), T(y)) \leq c \cdot \rho(x,y)$$

για κάθε $x, y \in X$. *Τότε, υπάρχει μοναδικό* $z \in X$ *ώστε* $T(z) = z$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε τυχόν $x \in X$. Θεωρούμε την ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις $x_0 = x$ και $x_{n+1} = T(x_n)$ για $n = 0, 1, \ldots$. Δηλαδή,

$$(x_n) = (x, T(x), T^2(x), \ldots).$$

Ισχυρισμός. Η $(T^n(x))_n$ είναι βασική ακολουθία.
Για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$\rho(T^n(x), T^{n+1}(x)) \leq c \cdot \rho(T^{n-1}(x), T^n(x))$$

και επαγωγικά παίρνουμε

$$\rho(T^n(x), T^{n+1}(x)) \leq c^n \cdot \rho(x, T(x))$$

για $n = 0, 1, \ldots$ Έτσι, για κάθε $m > n$ έχουμε από την τριγωνική ανισότητα

(5.1)
$$\rho(T^n(x), T^m(x)) \leq (c^n + c^{n+1} + \cdots + c^{m-1})\rho(x, T(x)) \leq \frac{c^n}{1-c}\rho(x, T(x)) \to 0$$

καθώς τα $m, n \to \infty$, αφού $0 < c < 1$. Άρα, η $(T^n(x))_n$ είναι βασική. Από την πληρότητα του X έπεται ότι υπάρχει $z \in X$ ώστε $T^n(x) \to z$. Αλλά, η T είναι συνεχής διότι είναι Lipschitz. Συνεπώς, $T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) \to T(z)$. Αφού η $(T^{n+1}(x))$ συγκλίνει επίσης στο x, ως υπακολουθία της $(T^n(x))$, από τη μοναδικότητα του ορίου έχουμε ότι $T(z) = z$.

Για τη μοναδικότητα του σταθερού σημείου παρατηρούμε ότι, αν υπάρχει κάποιο άλλο σταθερό σημείο z' της T, τότε

$$\rho(z, z') = \rho(T(z), T(z')) \leq c \cdot \rho(z, z')$$

Αφού $0 < c < 1$, έπεται ότι $\rho(z, z') = 0$, δηλαδή $z = z'$. Άρα, το z είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της T. □

Παρατηρήσεις 5.5.4. (α) Οι όροι $T^n(x)$ της ακολουθίας που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη λέγονται διαδοχικές προσεγγίσεις του στοιχείου z. Παρατηρούμε ότι $T^n(x) \to z$ ανεξάρτητα από την αρχική επιλογή του x και ότι το σφάλμα στη n-οστή προσέγγιση δεν ξεπερνά τον $\frac{c^n}{1-c}\rho(x, T(x))$. Πράγματι, αν $m > n$ τότε είδαμε ότι

$$\rho(T^n(x), T^m(x)) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot \rho(x, T(x)).$$

Αν αφήσουμε το $m \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\rho(T^n(x), z) = \lim_{m\to\infty} \rho(T^n(x), T^m(x)) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot \rho(x, T(x)).$$

(β) Η συνθήκη $\rho(T(x), T(y)) < \rho(x, y)$ εξασφαλίζει ότι η T έχει το πολύ ένα σταθερό σημείο, δεν μπορεί όμως να εγγυηθεί την ύπαρξη ενός τουλάχιστον σταθερού σημείου. Η συνάρτηση $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $T(x) = \log(1 + e^x)$ ικανοποιεί την ασθενέστερη συνθήκη, διότι $|T'(x)| < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά δεν έχει σταθερό σημείο.

(γ) Η πληρότητα του (X, ρ) δεν μπορεί να παραλειφθεί: αν θεωρήσουμε την $f : (0, 1) \to (0, 1)$ με $f(x) = \frac{x}{2}$ τότε ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{3}|x - y|$ για κάθε $x, y \in (0, 1)$, αλλά η f δεν έχει σταθερό σημείο. Παρατηρήστε ότι ο $((0, 1), |\cdot|)$ δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος.