Κεφάλαιο 8

Συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγείς μετρικούς χώρους

8.1 Ο χώρος $\mathcal{C}(K)$

Σε αυτό το Κεφάλαιο συμβολίζουμε με (K,d) έναν συμπαγή μετρικό χώρο. Στο Κεφάλαιο 5 θεωρήσαμε το χώρο $\ell_\infty(K)$ των *φραγμένων συναρτήσεων* $f : K \to \mathbb{R}$ με νόρμα την

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$$

και αποδείξαμε ότι ο $\ell_\infty(K)$ είναι πλήρης ως προς τη μετρική που επάγεται από την $\|\cdot\|_\infty$:

1. *Ο $(\ell_\infty(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.*

Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}(K)$ το χώρο των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{R}$. Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 6, αφού ο (K,d) είναι συμπαγής, κάθε συνεχής συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη. Έπεται ότι:

2. *Ο $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι υπόχωρος του $(\ell_\infty(K), \|\cdot\|_\infty)$.*

Στο Κεφάλαιο 7 είδαμε ότι αν $f_n, f : K \to \mathbb{R}$ τότε $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ αν και μόνο αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο K. Δηλαδή, η σύγκλιση ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ είναι η ομοιόμορφη σύγκλιση. Είδαμε επίσης ότι: αν (f_n) είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $f_n \to f$ ομοιόμορφα, τότε η f είναι επίσης συνεχής. Μια ισοδύναμη διατύπωση (εξηγήστε γιατί) είναι η εξής: αν (f_n) είναι ακολουθία στον $\mathcal{C}(K)$ και $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \in \ell_\infty(K)$ τότε $f \in \mathcal{C}(K)$. Συνεπώς:

3. *Ο $\mathcal{C}(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $(\ell_\infty(K), \|\cdot\|_\infty)$.*

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε αμέσως το εξής:

Θεώρημα 8.1.1. *Έστω (K,d) συμπαγής μετρικός χώρος. Ο χώρος $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι κάθε κλειστό υποσύνολο ενός πλήρους μετρικού χώρου είναι πλήρης μετρικός χώρος με τη σχετική μετρική, σε συνδυασμό με τα προηγούμενα τρία αποτελέσματα: ο $\ell_\infty(K)$ είναι πλήρης με την $\|\cdot\|_\infty$ και ο $\mathcal{C}(K)$ είναι κλειστό υποσύνολό του. □

Σκοπός μας σε αυτό το Κεφάλαιο είναι να δούμε κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με τη δομή του χώρου $\mathcal{C}(K)$. Στην επόμενη παράγραφο θεωρούμε την περίπτωση που το K είναι ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$ στο $\mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι η οικογένεια των πολυωνύμων (περιορισμένων στο $[a,b]$) είναι πυκνή στον $\mathcal{C}([a,b])$.

8.2 Το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass

Αποδεικνύουμε εδώ το **θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass**.

Θεώρημα 8.2.1 (Weierstrass). *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει πολυώνυμο $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε ο περιορισμός του p στο $[a,b]$ να ικανοποιεί την*

$$\|f-p\|_\infty\leq\varepsilon.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $x\in[a,b]$,

$$|f(x)-P(x)|\leq\varepsilon.$$

Σημείωση. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το θεώρημα με $\varepsilon=\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία πολυωνύμων (p_n) με την ιδιότητα

$$\|f-p_n\|_\infty\leq\frac{1}{n},\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Έτσι, παίρνουμε την ακόλουθη ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος 8.2.1:

Θεώρημα 8.2.2 (Weierstrass). *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n\to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.*

Για την απόδειξη, παρατηρούμε ότι αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση του $\mathcal{C}([0,1])$. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 8.2.3. *Έστω $a<b$ στο $\mathbb{R}$. Υπάρχει γραμμική ισομετρία επί $T:\mathcal{C}([a,b])\to\mathcal{C}([0,1])$ που απεικονίζει πολυώνυμα σε πολυώνυμα.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός $\sigma:[0,1]\to[a,b]$ με $\sigma(x)=a+x(b-a)$ είναι 1-1 και επί, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό $\sigma^{-1}(y)=\frac{y-a}{b-a}$. Ορίζουμε $T:\mathcal{C}([a,b])\to\mathcal{C}([0,1])$ με $T(f)=g$, όπου $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση $g=f\circ\sigma$. Η $g=T(f)$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων: για κάθε $x\in[0,1]$,

$$g(x)=f(\sigma(x))=f(a+x(b-a)).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\|T(f)\|_\infty = \max\{|f(a+x(b-a))| : x \in [0,1]\} = \max\{|f(y)| : y \in [a,b]\} = \|f\|_\infty$$

για κάθε $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Επίσης, η T είναι γραμμική απεικόνιση: αν $f_1, f_2 \in \mathcal{C}([a,b])$ και $a, b \in \mathbb{R}$, τότε

$$T(af_1 + bf_2) = aT(f_1) + bT(f_2).$$

Τέλος, αν $p(y) = \sum_{k=0}^n \lambda_k y^k$ είναι ένα πολυώνυμο, έχουμε

$$[T(p)](x) = p(a+x(b-a)) = \sum_{k=0}^n \lambda_k (a+x(b-a))^k,$$

δηλαδή η συνάρτηση $T(p)$ είναι επίσης πολυώνυμο. □

Σημείωση. Με βάση το λήμμα 8.2.3 βλέπουμε εύκολα ότι, αν αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση του $\mathcal{C}([0,1])$ τότε έχουμε το ίδιο συμπέρασμα για οποιονδήποτε $\mathcal{C}([a,b])$. Πράγματι, έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\varepsilon > 0$. Η $T(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, άρα υπάρχει πολυώνυμο q ώστε

$$\|T(f) - q\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Ορίζουμε $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $p(y) = q(\sigma^{-1}(y))$. Τότε, η p είναι πολυώνυμο (ακριβέστερα, περιορισμός πολυωνύμου στο $[0,1]$) και $T(p) = q$ (εξηγήστε γιατί). Τότε,

$$\|f - p\|_\infty = \|T(f-p)\|_\infty = \|T(f) - T(p)\|_\infty = \|T(f) - q\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση του $\mathcal{C}([0,1])$. Θα χρειαστούμε τα παρακάτω λήμματα.

Λήμμα 8.2.4. *Για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύουν οι ταυτότητες:*

(α) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.

(β) $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x$.

(γ) $\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x$.

Απόδειξη. (α) Προκύπτει άμεσα από τον διωνυμικό τύπο:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1.$$

(β) Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k = 1, \ldots, n$,

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\\ &= x\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{j}(1-x)^{n-1-j}\\ &= x.\end{aligned}$$

(γ) Παρατηρούμε ότι, αν $k\geq 1$,

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}=\frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1}=\frac{n-1}{n}\frac{k-1}{n-1}\binom{n-1}{k-1}+\frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1},$$

και, αν $k\geq 2$, η τελευταία ποσότητα ισούται με

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\binom{n-2}{k-2}+\frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\quad+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}\\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n}x.\end{aligned}$$

Λήμμα 8.2.5. *Για κάθε* $x\in[0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}\leq\frac{1}{4n}.$$

Απόδειξη. Από την $\left(\frac{k}{n}-x\right)^2=\left(\frac{k}{n}\right)^2-2\frac{k}{n}x+x^2$ και το προηγούμενο λήμμα, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n}x-2x^2+x^2\\ &= \frac{x(1-x)}{n}\leq\frac{1}{4n},\end{aligned}$$

αφού $4x(1-x)\leq 1$ για κάθε $x\in[0,1]$. □

Λήμμα 8.2.6. *Έστω $\delta > 0$ και $x \in [0,1]$. Αν $F = F(\delta, x)$ είναι το σύνολο των $k \in \{0,1,\dots,n\}$ για τα οποία $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$, τότε*

$$\sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k \in F} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{1}{4n\delta^2}
\end{aligned}$$

από το προηγούμενο λήμμα. □

Ορισμός 8.2.7. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το **n-οστό πολυώνυμο Bernstein** $B_n(f)$ της f ως εξής:

$$[B_n(f)](x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1].$$

Παρατηρήστε ότι το $B_n(f)$ είναι όντως πολυώνυμο (με βαθμό το πολύ ίσο με n) και ότι $[B_n(f)](0) = f(0)$ και $[B_n(f)](1) = f(1)$.

Επίσης, το λήμμα 8.2.4 δείχνει ότι: αν $f_k(x) = x^k$, $k = 0,1,2,\dots$, τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(f_0) = f_0, \quad B_n(f_1) = f_1, \quad B_n(f_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2 + \frac{1}{n} f_1.$$

Ειδικότερα, για $k = 0,1,2$,

$$\|f_k - B_n(f_k)\|_\infty \to 0$$

όταν $n \to \infty$.

Θεώρημα 8.2.8 (Bernstein)**.** *Για κάθε $f \in \mathcal{C}([0,1])$ ισχύει ότι $B_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.*

Απόδειξη. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [0,1]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Λόγω της $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$, για κάθε $x\in[0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|f(x)-[B_n(f)](x)| &= \left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n}f(x)\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|\\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Έστω $F=F(\delta,x)$ το σύνολο των $k\in\{0,1,\ldots,n\}$ για τα οποία $\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta$. Από το λήμμα 8.2.6,

$$\sum_{k\in F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{1}{4n\delta^2}.$$

Επίσης, παρατηρήστε ότι:

(α) Αν $k\in F$ τότε $|f(x)-f(k/n)|\leq 2\|f\|_\infty$, και
(β) Αν $k\notin F$ τότε $|f(x)-f(k/n)|<\varepsilon/2$.

Μπορούμε λοιπόν να γράφουμε

$$\begin{aligned}
|f(x)-[B_n(f)](x)| &\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\notin F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+2\|f\|_\infty\sum_{k\in F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+2\|f\|_\infty\frac{1}{4n\delta^2}\\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

αν $n>n_0=\left[\|f\|_\infty/(\varepsilon\delta^2)\right]+1$. Η επιλογή του n_0 είναι ανεξάρτητη από το $x\in[0,1]$, άρα, για κάθε $n>n_0$ έχουμε

$$\|f-B_n(f)\|_\infty<\varepsilon.$$

□

Αφού κάθε $B_n(f)$ είναι πολυώνυμο, το θεώρημα 8.2.1 είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Bernstein.