Κεφάλαιο 2

Σύγκλιση ακολουθιών και συνέχεια συναρτήσεων

2.1 Σύγκλιση ακολουθιών

Στον Απειροστικό Λογισμό μελετήσαμε τη σύγκλιση ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Με τον όρο *ακολουθία πραγματικών αριθμών* εννοούμε κάθε συνάρτηση $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών και τιμές στο $\mathbb{R}$). Συνήθως, γράφουμε $x_n := x(n)$ για το n-οστό όρο της ακολουθίας x και συμβολίζουμε τις ακολουθίες με $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ή $\{x_n\}$ ή (x_n).

Αν (x_n) είναι μια ακολουθία στο $\mathbb{R}$, λέμε ότι η (x_n) συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό x αν ισχύει το εξής:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός $n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$ με την ιδιότητα: αν $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq n_0(\varepsilon)$, τότε $|x_n - x| < \varepsilon$.

Σε αυτή την περίπτωση, γράφουμε $\lim x_n = x$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ή, πιο απλά, $x_n \to x$.

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε τον ορισμό του ορίου για μια ακολουθία (x_n) σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ). Ο ορισμός υπαγορεύεται από τον αντίστοιχο ορισμό για ακολουθίες πραγματικών αριθμών: η βασική ιδέα είναι ότι μια ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο $x \in X$ αν μπορούμε να βρούμε όσο κοντά θέλουμε στο x ένα τελικό τμήμα της ακολουθίας $\{x_n : n \geq n_0\}$. Ισοδύναμα, θα λέγαμε ότι η (x_n) συγκλίνει στο x αν η απόσταση του x_n από το x τείνει στο 0 όταν το n τείνει στο άπειρο. Οι βασικές πρώτες συνέπειες του ορισμού του ορίου εξακολουθούν να ισχύουν στο γενικό πλαίσιο των μετρικών χώρων. Οι αποδείξεις δεν έχουν καμία ουσιαστική διαφορά από τις αντίστοιχες αποδείξεις για ακολουθίες πραγματικών αριθμών.

2.1.1 Συγκλίνουσες ακολουθίες

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. *Ακολουθία* στον X είναι κάθε συνάρτηση $x : \mathbb{N} \to X$. Γράφουμε $x_n := x(n)$ για τον n-οστό όρο της ακολουθίας x και συμβολίζουμε τις ακολουθίες με $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ή $\{x_n\}$ ή (x_n) ή $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

Ορισμός 2.1.1 (σύγκλιση ακολουθίας)**.** Λέμε ότι μια ακολουθία (x_n) στο μετρικό χώρο (X, ρ) *συγκλίνει στο* $x \in X$ *ως προς τη μετρική* ρ (ή είναι ρ-συγκλίνουσα) αν

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ ώστε αν } n \geq n_0 \text{ να ισχύει } \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Για να το δηλώσουμε αυτό γράφουμε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ ή απλώς $x_n \to x$. Το x λέγεται ρ-όριο (ή απλώς όριο) της ακολουθίας.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω (x_n) μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ) και έστω $x \in X$. Τότε, $x_n \xrightarrow{\rho} x$ αν και μόνο αν η ακολουθία $(\rho(x_n, x))_n$ πραγματικών αριθμών είναι μηδενική.*

Απόδειξη. Αρκεί να συγκρίνουμε τους δύο ορισμούς: η ακολουθία $(\rho(x_n, x))_n$ στο $\mathbb{R}$ είναι μηδενική αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n, x) = |\rho(x_n, x) - 0| < \varepsilon$. Όμως αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$. □

Πρόταση 2.1.3. *Έστω (x_n) μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ). Αν υπάρχει το όριο της (x_n), τότε αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $x_n \xrightarrow{\rho} y$, όπου $x, y \in X$. Θα δείξουμε ότι $x = y$. Πράγματι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$0 \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y).$$

Αν θεωρήσουμε τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \rho(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\rho(x, y) = 0$, άρα $x = y$. □

Πρόταση 2.1.4. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Αν $(x_n), (y_n)$ ακολουθίες στον X και $x, y \in X$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y$, τότε $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα Λήμμα που έχει ανεξάρτητο ενδιαφέρον:

Λήμμα 2.1.5. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε ισχύουν οι ανισότητες:*

(α) $|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y)$ *για κάθε* $x, y, z \in X$.

(β) $|\rho(x, y) - \rho(z, w)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, w)$ *για κάθε* $x, y, z, w \in X$.

Απόδειξη του Λήμματος. (α) Έστω $x, y, z \in X$. Από την τριγωνική ανισότητα της μετρικής έχουμε

$$\begin{aligned}\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \Rightarrow \rho(x,z) - \rho(y,z) \leq \rho(x,y),\\ \rho(y,z) \leq \rho(y,x) + \rho(x,z) \Rightarrow \rho(y,z) - \rho(x,z) \leq \rho(y,x).\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δυο ανισότητες παίρνουμε

$$|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leq \rho(x,y).$$

(β) Αν $x, y, z, w \in X$, από την τριγωνική ανισότητα στο $\mathbb{R}$ έχουμε

$$|\rho(x,y) - \rho(z,w)| \leq |\rho(x,y) - \rho(z,y)| + |\rho(z,y) - \rho(z,w)|$$

Όμως, από το (α) ισχύει

$$|\rho(x,y) - \rho(z,y)| + |\rho(z,y) - \rho(z,w)| \leq \rho(x,z) + \rho(y,w).$$

□

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη της πρότασης: χρησιμοποιώντας την ανισότητα (β) του Λήμματος 2.1.5 βλέπουμε ότι

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x,y)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$, αφού $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y$. □

2.1.2 Παραδείγματα σύγκλισης σε μετρικούς χώρους

1. Θεωρούμε τη διακριτή μετρική δ σε ένα σύνολο X. Τότε, μια ακολουθία (x_n) στον (X, δ) είναι συγκλίνουσα αν και μόνον αν είναι τελικά σταθερή.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $x_n \xrightarrow{\delta} x$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geq n_0$ τότε $\delta(x_n, x) < \frac{1}{2}$. Από τον ορισμό της διακριτής μετρικής, έπεται ότι $\delta(x_n, x) = 0$ για κάθε $n \geq n_0$ ή αλλιώς, ότι $x_n = x$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς η (x_n) είναι τελικά σταθερή. Το αντίστροφο είναι προφανές από τον ορισμό του ορίου: σε κάθε μετρικό χώρο, κάθε τελικά σταθερή ακολουθία είναι συγκλίνουσα. □

Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι στον κύβο του Hamming (H_n, h) μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνον αν είναι τελικά σταθερή: έστω (x_m) ακολουθία στον H_n με $x_m \xrightarrow{h} x$. Τότε, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m \geq m_0$ να ισχύει $h(x_m, x) < \frac{1}{2}$. Όμως η h παίρνει μόνο τις τιμές $0, 1, \ldots, n$. Άρα, $h(x_m, x) = 0$ για κάθε $m \geq m_0$. Δηλαδή, $x_m = x$ για κάθε $m \geq m_0$. □

2. *Πεπερασμένο γινόμενο μετρικών χώρων.* Έστω $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ μετρικοί χώροι και $X = \prod_{i=1}^k X_i$ το καρτεσιανό τους γινόμενο. Δηλαδή, τα στοιχεία του X είναι k-άδες της μορφής $x = (x(1), \ldots, x(k))$ με $x(j) \in X_j$, $j = 1, \ldots, k$. Μια μετρική d στο γινόμενο $X = \prod_{i=1}^k X_i$ λέγεται *μετρική γινόμενο* αν μια ακολουθία $x_n = (x_n(1), \ldots, x_n(k))$ στο X συγκλινει στο $x = (x(1), \ldots, x(k))$ ως προς την d αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη, δηλαδή $x_n(i) \xrightarrow{d_i} x(i)$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$.

Παράδειγμα: στο X ορίζουμε τη μετρική $d = \sum_{j=1}^k d_j$, δηλαδή

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{k} d_j(x(j), y(j)).$$

Τότε, η d είναι μετρική γινόμενο.

Απόδειξη. Έστω (x_n) μια ακολουθία στο X. Τότε, η (x_n) έχει τη μορφή

$$x_n = (x_n(1), x_n(2), \ldots, x_n(k)), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι $x_n \xrightarrow{d} x = (x(1), x(2), \ldots, x(k))$ τότε $x_n(i) \xrightarrow{d_i} x(i)$ για $i = 1, \ldots, k$. Πράγματι· αν $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ έχουμε

$$d_i(x_n(i), x(i)) \leq \sum_{j=1}^{k} d_j(x_n(j), x(j)) = d(x_n, x) \longrightarrow 0$$

καθώς $n \to \infty$, δηλαδή $x_n(i) \xrightarrow{d_i} x(i)$.

Αντίστροφα· αν $x_n(i) \xrightarrow{d_i} x(i)$ για $i = 1, 2, \ldots, k$, αυτό σημαίνει ότι $d_i(x_n(i), x(i)) \to 0$ για $i = 1, 2, \ldots, k$. Συνεπώς,

$$d(x_n, x) = d_1(x_n(1), x(1)) + \cdots + d_k(x_n(k), x(k)) \longrightarrow 0$$

καθώς $n \to \infty$, δηλαδή $x_n \xrightarrow{d} x$. □

3*. *Άπειρο γινόμενο μετρικών χώρων.* Έστω (X_i, d_i), $i = 1, 2, \ldots$ ακολουθία μετρικών χώρων ώστε $d_i(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Στο $X = \prod_{i=1}^\infty X_i$ ορίζουμε τη *μετρική* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x(i), y(i)),$$

όπου $x = (x(1), x(2), \ldots)$, $y = (y(1), y(2), \ldots)$ με $x(i), y(i) \in X_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots$. Η d είναι πράγματι μετρική και μπορούμε να ελέγξουμε ότι είναι μετρική γινόμενο (δηλαδή, η σύγκλιση ως προς την d είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση κατά συντεταγμένη): Έστω (x_m) ακολουθία στον (X, d). Τότε η (x_m) είναι ακολουθία ακολουθιών:

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_1(1), x_1(2), \ldots, x_1(i), \ldots) \\ x_2 &= (x_2(1), x_2(2), \ldots, x_2(i), \ldots) \\ &\vdots \\ x_m &= (x_m(1), x_m(2), \ldots, x_m(i), \ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Για τη μία κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι $x_m \xrightarrow{d} x = (x(1), x(2), \ldots, x(i), \ldots)$ καθώς το $m \to \infty$. Θα δείξουμε ότι, για κάθε $i = 1, 2, \ldots$, ισχύει $x_m(i) \xrightarrow{d_i} x(i)$ καθώς $m \to \infty$. Έστω $i \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$2^{-i} d_i(x_m(i), x(i)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} d_j(x_m(j), x(j)) = d(x_m, x),$$

και επειδή $d(x_m, x) \to 0$ έπεται ότι $d_i(x_m(i), x(i)) \to 0$ καθώς $m \to \infty$.
Η άλλη κατεύθυνση αφήνεται ως άσκηση. □

4*. *Ο κύβος του Hilbert $\mathcal{H}^\infty$.* Το σύνολο

$$[-1, 1]^{\mathbb{N}} = \big\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\big|\; |x(i)| \leq 1, i = 1, 2, \ldots \big\}$$

το εφοδιάζουμε με τη μετρική

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x(i) - y(i)|}{2^i},$$

όπου $x = (x(i))$ και $y = (y(i))$. Ο μετρικός χώρος $([-1, 1]^{\mathbb{N}}, d)$ λέγεται *κύβος του Hilbert* και συμβολίζεται με $\mathcal{H}^\infty$. Η σύγκλιση στον κύβο είναι κατά συντεταγμένη.

Απόδειξη. Έστω (x_m) μια ακολουθία στον κύβο, δηλαδή

$$x_m = (x_m(1), x_m(2), \ldots, x_m(i), \ldots),\ m = 1, 2, \ldots$$

όπου $|x_m(i)| \leq 1$ για $m, i = 1, 2, \ldots$ Υποθέτουμε ότι $x_m \xrightarrow{d} x = (x(1), x(2), \ldots, x(i), \ldots)$. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$2^{-k} |x_m(k) - x(k)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_m(i) - x(i)|}{2^i} = d(x_m, x)$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και επειδή $d(x_m, x) \to 0$ έπεται ότι $x_m(i) \to x(i)$ καθώς $m \to \infty$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots$.

Ισχύει και το αντίστροφο: δηλαδή, αν $x_m = (x_m(1), x_m(2), \ldots)$ είναι μια ακολουθία στον $\mathcal{H}^\infty$ (δηλ. $|x_m(i)| \leq 1,\ i, m = 1, 2, \ldots$) ώστε $x_m(i) \to x(i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots$ τότε η $x = (x(1), x(2), \ldots)$ είναι στοιχείο του $\mathcal{H}^\infty$ και μάλιστα $x_m \xrightarrow{d} x$. Ξεκινάμε παρατηρώντας ότι, αφού $x_m(i) \to x(i)$, έχουμε $|x(i)| = \lim_m |x_m(i)| \leq 1$, άρα $x \in \mathcal{H}^\infty$. Για να δείξουμε ότι $x_m \xrightarrow{d} x$ αρκεί για κάθε $\varepsilon > 0$ να βρούμε ένα $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m \geq m_0$ τότε $d(x_m, x) < \varepsilon$. Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής ανισότητα (άσκηση): αν $x, y \in \mathcal{H}^\infty$ τότε

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x(i) - y(i)|}{2^i} \leq M_{k+1} + 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

όπου

$$M_k = \max\{|x(1) - y(1)|, |x(2) - y(2)|, \ldots, |x(k) - y(k)|\}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε

$$M_k^m = \max\{|x_m(i) - x(i)| : i = 1, \ldots, k\}.$$

Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $M_k^m \to 0$ καθώς $m \to \infty$ (γιατί;). Επίσης, υπάρχει $k \equiv k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Γι' αυτό το k ισχύει $M_{k+1}^m \to 0$, άρα υπάρχει $m_0(\varepsilon, k) \equiv m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m \geq m_0$ να ισχύει $M_{k+1}^m < \frac{\varepsilon}{2}$. Αν λοιπόν $m \geq m_0$, τότε

$$d(x_m, x) \leq M_{k+1}^m + \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

2.1.3 Βασικές ακολουθίες και φραγμένες ακολουθίες

Ο ορισμός της ακολουθίας Cauchy (ή βασικής ακολουθίας) πραγματικών αριθμών γενικεύεται κι αυτός άμεσα στο πλαίσιο των μετρικών χώρων.

Ορισμός 2.1.6 (βασική ακολουθία)**.** Έστω (x_n) μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ). Λέμε ότι η (x_n) είναι *βασική* (ή Cauchy) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m, n \geq n_0$ τότε $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Πρόταση 2.1.7. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) συγκλίνουσα ακολουθία. Τότε, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \xrightarrow{\rho} x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Έστω $m, n \geq n_0$. Τότε,

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Συνεπώς, η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. □

Ορισμός 2.1.8 (φραγμένη ακολουθία)**.** Έστω (x_n) μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Λέμε ότι η (x_n) είναι *φραγμένη* αν το σύνολο $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X. Με άλλα λόγια, αν υπάρχει $C>0$ ώστε $\rho(x_m,x_n)\leq C$ για κάθε $m,n\in\mathbb{N}$.

Πρόταση 2.1.9. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε, κάθε βασική ακολουθία στον X είναι φραγμένη.*

Ειδικότερα, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (X,ρ). Τότε, υπάρχει $n_0>1$ ώστε αν $m,n\geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n,x_m)<1$. Ειδικότερα, $\rho(x_n,x_{n_0})<1$ για κάθε $n\geq n_0$. Θέτουμε

$$C=\max\{\rho(x_1,x_{n_0}),\dots,\rho(x_{n_0-1},x_{n_0}),1\}>0.$$

Τότε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$\rho(x_n,x_{n_0})\leq C.$$

Από την τριγωνική ανισότητα έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\sup\{\rho(x_m,x_n):m,n\in\mathbb{N}\}\leq 2C.$$

Συνεπώς, η (x_n) είναι φραγμένη.

Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει άμεσα από τον πρώτο, αφού κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι βασική. □

Παρατηρήσεις 2.1.10. (α) Υπάρχουν παραδείγματα μετρικών χώρων στους οποίους δεν συγκλίνουν όλες οι βασικές ακολουθίες. Ένα παράδειγμα είναι ο χώρος $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ των ρητών με τη συνήθη μετρική: η ακολουθία (q_n) όπου $q_n=(1+\frac{1}{n})^n$, ενώ είναι βασική, δεν συγκλίνει σε ρητό αριθμό.

Για ένα άλλο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το χώρο $(\mathbb{R},\rho)$ με τη μετρική

$$\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|,\quad x,y\in\mathbb{R},$$

όπου[1] $f(t)=\frac{t}{|t|+1}$. Τότε η ακολουθία $x_n=n$ είναι ρ-βασική αλλά δεν είναι ρ-συγκλίνουσα. Πράγματι, επειδή η $(f(n))$ είναι συγκλίνουσα ως προς τη συνήθη μετρική είναι και $|\cdot|$-βασική, δηλαδή

$$\rho(n,m)=|f(n)-f(m)|\to 0\quad \text{καθώς } m,n\to\infty.$$

Αλλά, η (x_n) δεν είναι ρ-συγκλίνουσα, διότι αν ήταν τότε θα υπήρχε $x\in\mathbb{R}$ ώστε $\rho(n,x)\to 0$. Από την άλλη πλευρά, αφού $f(n)\to 1$,

$$\rho(n,x)=|f(n)-f(x)|\to|1-f(x)|\,.$$

Όμως τότε, $|1-f(x)|=0$, δηλαδή $\frac{x}{|x|+1}=1$. Αυτό είναι άτοπο.

[1] παρατηρήστε ότι η f είναι 1-1 από το $\mathbb{R}$ επί του $(-1,1)$.

Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι η κατάσταση αυτή δεν μπορεί να εμφανιστεί στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική: εκεί, κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει. Οι μετρικοί χώροι στους οποίους κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει λέγονται *πλήρεις μετρικοί χώροι* και θα τους μελετήσουμε ξεχωριστά αργότερα.

(β) Πολύ απλούστερο είναι να δώσουμε παραδείγματα μετρικών χώρων στους οποίους υπάρχουν φραγμένες ακολουθίες που δεν είναι βασικές. Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, η $x_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη αλλά δεν είναι βασική, αφού $|x_n - x_{n+1}| = 2$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

2.1.4 Υπακολουθίες

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και έστω (x_n) μια ακολουθία στον X. Αν $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τότε η (x_{k_n}) λέγεται **υπακολουθία** της (x_n).

Παρατηρήσεις 2.1.11. (α) Αν $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία και $x : \mathbb{N} \to X$ είναι ακολουθία στον X, τότε η $x \circ k : \mathbb{N} \to X$ είναι υπακολουθία της (x_n). Για την ακρίβεια, κάθε υπακολουθία της (x_n) είναι η σύνθεση της ακολουθίας (x_n) με μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

(β) Αν (k_n) είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, έχουμε ότι $k_n \geq n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Η (απλή) απόδειξη αυτού του ισχυρισμού γίνεται με επαγωγή.

Αποδεικνύεται, ακριβώς όπως στην περίπτωση των ακολουθιών πραγματικών αριθμών, ότι αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε για κάθε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ισχύει $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$ (άσκηση 4(α)). Ένα άλλο αποτέλεσμα που μεταφέρεται χωρίς καμιά δυσκολία από το πλαίσιο των πραγματικών αριθμών σε αυτό των μετρικών χώρων είναι το εξής:

Πρόταση 2.1.12. *Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και έστω (x_n) ακολουθία στον X. Αν η (x_n) είναι βασική και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω ότι η (x_n) είναι βασική και ότι $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$, όπου η (x_{k_n}) είναι υπακολουθία της (x_n).

Ισχυρισμός. Η (x_n) συγκλίνει στο x.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η (x_n) είναι βασική έχουμε ότι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{αν} \quad n, m \geq n_1.$$

Επιπροσθέτως, $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$, άρα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\rho(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{αν} \quad n \geq n_2.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Παρατηρήστε ότι αν $n \geq n_0$ τότε $k_n \geq n \geq n_0$, οπότε $n, k_n \geq n_1$ και $n \geq n_2$. Συνεπώς,

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$. □

Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ισχύει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται στην περίπτωση του Ευκλείδειου χώρου οποιασδήποτε διάστασης.

Θεώρημα 2.1.13. *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^m$ (με την Ευκλείδεια μετρική) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω $x_n = (x_n(1), \ldots, x_n(m))$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^m$. Αν η (x_n) είναι φραγμένη, τότε η $(x_n(1))$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Από το αντίστοιχο αποτέλεσμα στο $\mathbb{R}$, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n}(1))$:

$$x_{k_n}(1) \to x_1.$$

Η υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) έχει λοιπόν συγκλίνουσα πρώτη συντεταγμένη. Η $(x_{k_n}(2))$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}}(2))$:

$$x_{k_{\lambda_n}}(2) \to x_2.$$

Παρατηρήστε ότι

$$x_{k_{\lambda_n}}(1) \to x_1,$$

διότι η $x_{k_n}(1) \to x_1$ και η $(x_{k_{\lambda_n}}(1))$ είναι υπακολουθία της $x_{k_n}(1)$. Άρα, η υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}})$ έχει συγκλίνουσα πρώτη και δεύτερη συντεταγμένη. Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο μέχρι την m-οστή συντεταγμένη και παίρνοντας m διαδοχικές υπακολουθίες της (x_n) βρίσκουμε υπακολουθία της η οποία έχει κάθε συντεταγμένη της συγκλίνουσα. Έχουμε δείξει ότι η σύγκλιση ακολουθίας στον Ευκλείδειο χώρο είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση κατά συντεταγμένη, συνεπώς η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. □

Σε τυχόντα μετρικό χώρο το Θεώρημα 2.1.13 δεν ισχύει κατ΄ ανάγκην, όπως φαίνεται και από το ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.1.14. (α) Θεωρούμε το χώρο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ των μηδενικών ακολουθιών με τη μετρική που επάγεται από την supremum νόρμα: αν $x = (x_n)$ και $y = (y_n)$ τότε

$$d_\infty(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Σε αυτό το χώρο θεωρούμε την ακολουθία (e_n) όπου

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0, \ldots) \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, \ldots) \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0, \ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

η οποία είναι φραγμένη αφού $d_\infty(e_n, e_m) = \|e_n - e_m\|_\infty = 1$ αν $n \neq m$. Η ίδια ισότητα δείχνει ότι η (e_n) δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία: αν είχε, οι όροι της υπακολουθίας θα έπρεπε τελικά να απέχουν απόσταση μικρότερη από 1.

(β) Ένα ακόμα πιο απλό παράδειγμα παίρνουμε αν θεωρήσουμε τη διακριτή μετρική δ σε ένα άπειρο σύνολο, για παράδειγμα το $\mathbb{N}$. Η ακολουθία $x_n = n$ στον $(\mathbb{N}, \delta)$ είναι φραγμένη αλλά δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα).

2.2 Συνέχεια σε ένα σημείο και αρχή της μεταφοράς

Υπενθυμίζουμε τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας για πραγματικές συναρτήσεις. Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$, τότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\text{αν } x \in A \text{ και } |x - x_0| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο A αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$. Η γενίκευση του ορισμού της συνέχειας στο πλαίσιο των μετρικών χώρων είναι άμεση:

Ορισμός 2.2.1. Έστω (X, ρ) και (Y, σ) δύο μετρικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται *συνεχής στο* $x_0 \in X$ αν

> για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \equiv \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ ώστε: αν $x \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται συνεχής στον X αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X. Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, το συμβολίζουμε με $\mathcal{C}(X, Y)$. Ειδικότερα, αν $Y = \mathbb{R}$ γράφουμε $\mathcal{C}(X)$ αντί του $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Παραδείγματα 2.2.2. (α) Έστω δ η διακριτή μετρική σε ένα μη κενό σύνολο X και έστω (Y, σ) τυχών μετρικός χώρος. Κάθε συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $f : (X, \delta) \to (Y, \sigma)$ τυχούσα συνάρτηση και έστω $x_0 \in X$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Πράγματι: έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\eta = \frac{1}{2} > 0$. Από τον ορισμό της δ, αν $x \in X$ και $\delta(x, x_0) < \eta = \frac{1}{2}$ τότε $x = x_0$, άρα $f(x) = f(x_0)$ και $\sigma(f(x), f(x_0)) = 0 < \varepsilon$. □

(β) Κάθε ακολουθία $f : \mathbb{N} \to X$ είναι συνεχής συνάρτηση (εξηγήστε γιατί).

(γ) Η ταυτοτική συνάρτηση $I : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (c_{00}, \|\cdot\|_2)$ *δεν* είναι συνεχής.

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι η άρνηση του ορισμού της συνέχειας μιας συνάρτησης $f : X \to Y$ στο $x_0 \in X$ διατυπώνεται ως εξής:

> Η $f : X \to Y$ είναι ασυνεχής στο $x_0 \in X$ αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $\rho(x, x_0) < \delta$ και $\sigma(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$.

Θα αποδείξουμε ότι η I είναι ασυνεχής στο $0 = (0,0,0,\ldots)$. Πράγματι: αν $x_n = (\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n-\text{θέσεις}}, 0, 0, \ldots)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε έχουμε

$$\|I(x_n) - I(0)\|_2 = \|I(x_n)\|_2 = \|x_n\|_2 = 1$$

και

$$\|x_n - 0\|_\infty = \|x_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Αν επιλέξουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ παρατηρούμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x_\delta \in c_{00}$ με $\|x_\delta\|_\infty < \delta$ και $\|I(x_\delta) - I(0)\|_2 > \frac{1}{2}$ (αρκεί να επιλέξουμε $x_\delta = x_n$ για κάποιο n αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{\sqrt{n}} < \delta$). Συνεπώς, η $I : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (c_{00}, \|\cdot\|_2)$ είναι ασυνεχής στο 0. $\square$

Η συνέχεια περιγράφεται μέσω της σύγκλισης ακολουθιών, ακριβώς όπως και στην περίπτωση συναρτήσεων που ορίζονται σε υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Πρόταση 2.2.3 (αρχή της μεταφοράς). *Έστω (X,ρ) και (Y,σ) δύο μετρικοί χώροι και έστω $f : X \to Y$ και $x_0 \in X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι συνεχής στο x_0.*

(β) *Για κάθε ακολουθία (x_n) στοιχείων του X με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x_0)$.*

(γ) *Για κάθε ακολουθία (y_n) με $y_n \xrightarrow{\rho} x_0$, η ακολουθία $(f(y_n))$ είναι σ-συγκλίνουσα.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα την ισοδυναμία των (α) και (β).

(α)⇒(β) Έστω $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Επιπλέον, επειδή $x_n \to x_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $\rho(x_n, x_0) < \delta$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι $\sigma(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ αν $n \geq n_0$, δηλαδή $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x_0)$.

(β)⇒(α) Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε, υπάρχουν $\varepsilon_0 > 0$ και ακολουθία (x_n) στοιχείων του X με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ και $\sigma(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$ για $n = 1, 2, \ldots$ (εξηγήστε γιατί). Από την υπόθεση έχουμε $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x_0)$, το οποίο είναι άτοπο (τελικά, θα είχαμε $\sigma(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon_0$).

Δείχνουμε τώρα την ισοδυναμία των (β) και (γ).

(β)⇒(γ) Προφανές: αν $y_n \xrightarrow{\rho} x_0$, από την υπόθεση έχουμε $f(y_n) \xrightarrow{\sigma} f(x_0)$, άρα η $(f(y_n))$ είναι σ-συγκλίνουσα.

(γ)⇒(β) Έστω (x_n) ακολουθία στον (X,ρ) με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$y_n = (x_0, x_1, x_0, x_2, x_0, x_3, \ldots) \quad \text{δηλαδή} \quad y_n = \begin{cases} x_0, & n = 2k-1 \\ x_k, & n = 2k \end{cases},$$

για την οποία εύκολα δείχνουμε ότι συγκλίνει στο x_0. Από την υπόθεση, υπάρχει $y \in Y$ ώστε $f(y_n) \xrightarrow{\sigma} y$. Επιπλέον, $f(y_{2n-1}) = f(x_0) \xrightarrow{\sigma} f(x_0)$, άρα $y = f(x_0)$. Τώρα, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f(x_n) = f(y_{2n}) \xrightarrow{\sigma} y = f(x_0)$. □

Χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς μπορούμε να δείξουμε ότι η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής.

Πρόταση 2.2.4 (σύνθεση συνεχών συναρτήσεων)**.** *Έστω (X,ρ), (Y,σ) και (Z,τ) τρεις μετρικοί χώροι. Έστω $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ δύο συναρτήσεις. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ και η g είναι συνεχής στο $f(x_0) \in Y$, τότε η $g \circ f : X \to Z$ είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία σημείων του X με $x_n \to x_0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι $f(x_n) \to f(x_0)$. Αφού η g είναι συνεχής στο $f(x_0) \in Y$, για κάθε ακολουθία (y_n) σημείων του Y με $y_n \to f(x_0)$ έχουμε $g(y_n) \to g(f(x_0))$.

Όμως, $f(x_n) \in Y$ και $f(x_n) \to f(x_0)$. Συνεπώς,

$$g(f(x_n)) \to g(f(x_0)).$$

Για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του X με $x_n \to x_0$ δείξαμε ότι

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0).$$

Από την αρχή της μεταφοράς, η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0. □

Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει τη σχέση της συνέχειας με τις συνήθεις αλγεβρικές πράξεις ανάμεσα σε πραγματικές συναρτήσεις. Η απόδειξή του είναι άμεση, αν χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μεταφοράς σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες ιδιότητες για τα όρια ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

Θεώρημα 2.2.5. *Έστω $f, g : (X,\rho) \to \mathbb{R}$, έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in X$. Υποθέτουμε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο x_0. Τότε,*

(α) Οι $f+g$, λf και fg είναι συνεχείς στο x_0.

(β) Αν επιπλέον $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$, τότε η $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο X και είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη. Η απόδειξη όλων των ισχυρισμών είναι απλή: για παράδειγμα, για να δείξουμε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του X που συγκλίνει στο x_0, η ακολουθία $\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x_n)\right)$ συγκλίνει στο $\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$. Από την υπόθεση, οι f και g είναι συνεχείς στο x_0. Από την αρχή της μεταφοράς έχουμε έχουμε $f(x_n) \to f(x_0)$ και $g(x_n) \to g(x_0)$. Αφού $g(x_n) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g(x_0) \neq 0$, έχουμε

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0).$$

Η απόδειξη της συνέχειας των $f+g$, λf και $f \cdot g$ στο x_0 αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη. $\square$

Πόρισμα 2.2.6. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Ο χώρος $\mathcal{C}(X)$ των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικός χώρος.*