Κεφάλαιο 6

Συμπάγεια

6.1 Ορισμός της συμπάγειας

Όπως θα φανεί στην αμέσως επόμενη παράγραφο, υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορεί κανείς να εισάγει την έννοια του *συμπαγούς μετρικού χώρου*. Ο πλέον εύληπτος είναι αυτός της ακολουθιακής συμπάγειας, ο οποίος γενικεύει την «ιδιότητα Bolzano–Weierstrass» των κλειστών διαστημάτων $[a, b]$ της πραγματικής ευθείας στο πλαίσιο των μετρικών χώρων. Θα μπορούσαμε να δώσουμε τον εξής ορισμό:

> Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) λέγεται (ακολουθιακά) συμπαγής αν κάθε ακολουθία (x_n) στον X έχει υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$.

Ξεκινάμε από έναν διαφορετικό ορισμό της συμπάγειας, ο οποίος μπορεί να δοθεί και στο γενικότερο πλαίσιο των τοπολογικών χώρων και βασίζεται στην ιδέα ότι οι συμπαγείς μετρικοί χώροι έχουν από πολλές απόψεις τη «δομή ενός πεπερασμένου μετρικού χώρου». Στην επόμενη παράγραφο δείχνουμε ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι και ότι η συμπάγεια συνδέεται στενά με την έννοια της πληρότητας (στους λεγόμενους «ολικά φραγμένους» μετρικούς χώρους).

Ορισμός 6.1.1 (κάλυμμα)**.** Έστω X τυχόν μη κενό σύνολο και $A \subseteq X$. Μια οικογένεια $(U_i)_{i \in I}$ υποσυνόλων του X λέγεται *κάλυμμα* του A αν

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Αν για κάποιο $J \subseteq I$ ισχύει $A \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$, τότε λέμε ότι η $(U_i)_{i \in J}$ είναι *υποκάλυμμα του* $(U_i)_{i \in I}$ *για το* A.

Ορισμός 6.1.2 (ανοικτό κάλυμμα)**.** Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $(U_i)_{i \in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X. Η $(U_i)_{i \in I}$ λέγεται *ανοικτό κάλυμμα* του X, αν $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Γενικότερα, αν $A \subseteq X$, η $(U_i)_{i \in I}$ λέγεται ανοικτό κάλυμμα του A, αν $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.

Ορισμός 6.1.3 (συμπάγεια)**.** Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ο X λέγεται *συμπαγής* (*compact*) αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Με άλλα λόγια, αν ισχύει το εξής:

> Για κάθε οικογένεια $(U_i)_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X που ικανοποιεί την $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ μπορούμε να βρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $i_1, \ldots, i_m \in I$ ώστε $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}$.

Ένα υποσύνολο K του X λέγεται συμπαγές, αν είναι συμπαγής μετρικός χώρος με τη σχετική μετρική. Αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής: για κάθε κάθε κάλυμμα $(V_i)_{i\in I}$ του K από ανοικτά υποσύνολα του X, υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $(V_{i_j})_{j=1}^m$, ώστε $K \subseteq \bigcup_{j=1}^m V_{i_j}$ (άσκηση).

Παραδείγματα 6.1.4. (α) Ένας διακριτός μετρικός χώρος (X, δ) είναι συμπαγής αν και μόνον αν το X είναι πεπερασμένο σύνολο.

(β) Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Πράγματι, αν θεωρήσουμε το ανοικτό κάλυμμα $\{(-n, n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, τότε αυτό δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

(γ) Το σύνολο $S_{\ell_\infty} = \{x = (x_n) \in \ell_\infty : \|x\|_\infty = 1\}$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του ℓ_∞. Πράγματι· θεωρούμε το ανοικτό κάλυμμα $\{B(x, 1/2) : x \in S_{\ell_\infty}\}$, το οποίο δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, διότι $\|e_n - e_m\|_\infty = 1$ για $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.

(δ) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $x \in X$ και (x_n) στον X ώστε $x_n \to x$. Το σύνολο

$$K = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{x\}$$

είναι συμπαγές στον X. Πράγματι· έστω $(G_i)_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του K. Τότε υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x \in G_{i_0}$. Αφού $x_n \to x$ και το G_{i_0} είναι ανοικτό, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in G_{i_0}$ για κάθε $n > N$. Για κάθε $1 \leq j \leq N$ υπάρχει $i_j \in I$ ώστε $x_j \in G_{i_j}$. Τότε, $K \subseteq \bigcup_{j=0}^N G_{i_j}$.

Πρόταση 6.1.5. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω K συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε, το K είναι κλειστό στον X.*

Απόδειξη. Έστω $y \in X \setminus K$. Για κάθε $x \in K$ θέτουμε $\delta_x := \frac{\rho(x,y)}{2}$. Οι μπάλες $\{B(x, \delta_x) : x \in K\}$ αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του K. Άρα, υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_m \in K$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{j=1}^m B(x_j, \delta_{x_j})$. Έστω $\delta = \min\{\delta_{x_j} : j = 1, 2, \ldots, m\} > 0$. Τότε, $B(y, \delta) \subseteq X \setminus K$. Πράγματι, αν $x \in K$ τότε υπάρχει $1 \leq j \leq m$ ώστε $\rho(x, x_j) < \delta_{x_j}$. Άρα,

$$\rho(x, y) \geq \rho(y, x_j) - \rho(x_j, x) > 2\delta_{x_j} - \delta_{x_j} \geq \delta,$$

δηλαδή $x \notin B(y, \delta)$. Δείξαμε ότι το $X \setminus K$ είναι ανοικτό, συνεπώς το K είναι κλειστό. □

Πρόταση 6.1.6. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω K μη κενό, συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε, το K είναι φραγμένο υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε τυχόν $x \in X$ και θεωρούμε την οικογένεια $\{B(x,n) : n \in \mathbb{N}\}$. Παρατηρήστε ότι αυτή είναι ανοικτό κάλυμμα του X, άρα και του K:

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x,n).$$

Αφού το K είναι συμπαγές, υπάρχουν $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$K \subseteq B(x,n_1) \cup \cdots \cup B(x,n_m).$$

Αν θέσουμε $r = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$ έχουμε $B(x,n_j) \subseteq B(x,r)$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$, δηλαδή

$$K \subseteq B(x,r).$$

Συνεπώς, το K είναι φραγμένο. □

Πρόταση 6.1.7. *Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και F κλειστό υποσύνολο του X. Τότε, το F είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω (U_i) ανοικτό κάλυμμα του F. Τότε η οικογένεια $\{X \setminus F\} \cup \{U_i : i \in I\}$ αποτελεί ανοικτό κάλυμμα του X (εξηγήστε γιατί). Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $i_1, \ldots, i_k \in I$ ώστε $X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k} \cup (X \setminus F)$. Τότε, $F \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k}$. □

6.2 Χαρακτηρισμός της συμπάγειας

Σκοπός μας σε αυτή την παράγραφο είναι να χαρακτηρίσουμε τους συμπαγείς μετρικούς χώρους μέσω ακολουθιών. Όπως θα δούμε, ένας μετρικός χώρος (X,ρ) είναι συμπαγής αν και μόνο αν έχει την ιδιότητα **Bolzano–Weierstrass**: δηλαδή, αν κάθε άπειρο υποσύνολο A του X έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο X ($A' \neq \emptyset$). Στην πορεία θα δώσουμε άλλον έναν χρήσιμο χαρακτηρισμό της συμπάγειας: ο (X,ρ) είναι συμπαγής αν και μόνο αν είναι πλήρης και *ολικά φραγμένος*. Δίνουμε πρώτα τους απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός 6.2.1 (ακολουθιακά συμπαγής χώρος)**.** Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Ο X λέγεται *ακολουθιακά συμπαγής* (*sequentially compact*) αν κάθε ακολουθία (x_n) στον X έχει υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$.

Ορισμός 6.2.2 (ολικά φραγμένος χώρος)**.** Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται *ολικά φραγμένος* (*totally bounded*) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_m \in X$ ώστε

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon).$$

Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος σημεία στο χώρο ώστε οι μπάλες με κέντρα αυτά σημεία και ακτίνα το δοσμένο $\varepsilon > 0$ να καλύπτουν το χώρο.

Γενικότερα, αν (X,ρ) είναι μετρικός χώρος και $A\subseteq X$, τότε το A λέγεται ολικά φραγμένο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν $x_1,\dots,x_m\in X$ ώστε

$$A\subseteq\bigcup_{i=1}^m B(x_i,\varepsilon).$$

Με βάση τον ορισμό που δώσαμε, αν το $A\subseteq X$ είναι ολικά φραγμένο τότε κάθε $B\subseteq A$ είναι επίσης ολικά φραγμένο (εξηγήστε γιατί).

Παρατηρήστε επίσης ότι μπορούμε να απαιτήσουμε τα «κέντρα» x_i να ανήκουν στο A: πράγματι, ας υποθέσουμε ότι το A είναι ολικά φραγμένο και ας θεωρήσουμε τυχόν $\varepsilon>0$. Υπάρχουν $x_1,\dots,x_m\in X$ ώστε $A\subseteq\bigcup_{i=1}^m B(x_i,\varepsilon/2)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι $B(x_i,\varepsilon/2)$ έχουν μη κενή τομή με το A (αλλιώς θα «διώχναμε» τις περιττές από αυτές). Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $a_i\in B(x_i,\varepsilon/2)\cap A$, $i=1,\dots,m$. Τότε, $a_1,\dots,a_m\in A$ και $B(x_i,\varepsilon/2)\subseteq B(a_i,\varepsilon)$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς,

$$A\subseteq\bigcup_{i=1}^m B(a_i,\varepsilon).$$

Παραδείγματα 6.2.3. (α) Ο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ δεν είναι είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. Αν ήταν, θα υπήρχαν $x_1<x_2<\cdots<x_k\in\mathbb{R}$ ώστε $\mathbb{R}=\bigcup_{i=1}^k(x_i-1,x_i+1)\subseteq(x_1-1,x_k+1)$, άτοπο.

(β) Ένας διακριτός μετρικός χώρος (X,δ) είναι ολικά φραγμένος αν και μόνον αν το X είναι πεπερασμένο σύνολο (εξηγήστε γιατί).

(γ) Ο n–διάστατος κύβος του Hamming H_n και ο κύβος του Hilbert $\mathcal{H}^\infty$, είναι ολικά φραγμένοι χώροι (άσκηση).

Θεώρημα 6.2.4 (χαρακτηρισμός της συμπάγειας)**.** *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο (X,ρ) είναι συμπαγής.*

(ii) *Κάθε άπειρο υποσύνολο A του X έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο X (δηλαδή, $A'\neq\emptyset$).*

(iii) *Ο X είναι ακολουθιακά συμπαγής.*

(iv) *Ο X είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.*

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii): Έστω A υποσύνολο του X το οποίο δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης στο X. Τότε, για κάθε $x\in X$ υπάρχει $\varepsilon_x>0$ ώστε $B(x,\varepsilon_x)\cap(A\setminus\{x\})=\emptyset$. Θεωρούμε το ανοικτό κάλυμμα $\{B(x,\varepsilon_x):x\in X\}$ του X. Αφού ο X είναι συμπαγής, μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1,\dots,x_m\in X$ ώστε

$$X=B(x_1,\varepsilon_{x_1})\cup\cdots\cup B(x_m,\varepsilon_{x_m}).$$

Τότε,

$$A = (A \cap B(x_1, \varepsilon_{x_1})) \cup \cdots \cup (A \cap B(x_m, \varepsilon_{x_m})).$$

Όμως, για κάθε $i = 1, \ldots, m$, από την $B(x_i, \varepsilon_{x_i}) \cap (A \setminus \{x_i\}) = \emptyset$ συμπεραίνουμε ότι

$$A \cap B(x_i, \varepsilon_{x_i}) \subseteq \{x_i\}.$$

Έπεται ότι

$$A \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$$

δηλαδή το A είναι πεπερασμένο σύνολο.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Έστω (x_n) ακολουθία στον X. Θα δείξουμε ότι η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ των όρων της (x_n). Αν το A είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε υπάρχουν $x \in A$ και δείκτες $k_1 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $x_{k_n} = x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, η (x_n) έχει σταθερή υπακολουθία και το ζητούμενο ισχύει προφανώς.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι το σύνολο A των όρων της (x_n) είναι άπειρο. Τότε, υπάρχει $x \in X$ το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του A. Συνεπώς, σε κάθε περιοχή του x υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας (x_n) (διότι περιέχει άπειρα στοιχεία του A). Επιλέγοντας διαδοχικά $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ και χρησιμοποιώντας αυτή την ιδιότητα του x, μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών (k_n) ώστε $\rho(x, x_{k_n}) < \frac{1}{n}$. Άρα, $x_{k_n} \to x$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Υποθέτουμε ότι ο (X, ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής.

1. *Ο X είναι πλήρης.* Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X. Από την υπόθεση, η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$. Τότε, $x_n \to x$ (γνωρίζουμε ότι, σε κάθε μετρικό χώρο, αν μια βασική ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία τότε είναι συγκλίνουσα).

2. *Ο X είναι ολικά φραγμένος.* Με απαγωγή σε άτοπο: αν ο X δεν είναι ολικά φραγμένος, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $u_1, \ldots, u_m \in X$ ισχύει

$$(*) \qquad X \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B(u_j, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Χρησιμοποιώντας την $(*)$ ορίζουμε επαγωγικά ακολουθία (x_n) στον X ως εξής: επιλέγουμε τυχόν $x_1 \in X$ και χρησιμοποιώντας την $(*)$ επιλέγουμε

$$x_2 \in X \setminus B(x_1, \varepsilon).$$

Παρατηρήστε ότι $\rho(x_2, x_1) \geq \varepsilon$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει $x_1, \ldots, x_n$ έτσι ώστε, αν $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ και $i \neq j$ τότε $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$. Τότε, χρησιμοποιώντας και πάλι την $(*)$, επιλέγουμε

$$x_{n+1} \in X \setminus B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon).$$

Παρατηρήστε ότι $\rho(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Κατ' αυτό τον τρόπο, ορίζεται ακολουθία (x_n) στον X με την εξής ιδιότητα: αν $n \neq m$ τότε $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$. Η ακολουθία (x_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, καταλήγουμε σε άτοπο.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι ο X δεν είναι συμπαγής. Τότε, υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $(U_i)_{i\in I}$ του X το οποίο δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή, $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ αλλά, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $i_1, \ldots, i_m \in I$ ισχύει

$$X \setminus (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}) \neq \emptyset.$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι ο X είναι ολικά φραγμένος, βρίσκουμε $x_{11}, \ldots, x_{1N_1} \in X$ ώστε

$$X = \bigcup_{j=1}^{N_1} B(x_{1j}, 1/2).$$

Ισχυρισμός. Υπάρχει $j_0 \in \{1, \ldots, N_1\}$ ώστε, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $i_1, \ldots, i_m \in I$ ισχύει

$$B(x_{1j_0}, 1/2) \setminus (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}) \neq \emptyset.$$

[Πράγματι, αν κάθε $B(x_{1j}, 1/2)$ καλυπτόταν από πεπερασμένα το πλήθος σύνολα της οικογένειας $(U_i)_{i\in I}$ τότε και ο $X = \bigcup_{j=1}^{N_1} B(x_{1j}, 1/2)$ θα καλυπτόταν από πεπερασμένα το πλήθος σύνολα της οικογένειας $(U_i)_{i\in I}$, άτοπο].

Θέτουμε $x_1 := x_{1j_0}$. Παρατηρούμε ότι, αφού $B(x_1, 1/2) \subseteq X$, υπάρχουν $x_{21}, \ldots, x_{2N_2} \in X$ ώστε

$$B(x_1, 1/2) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_2} B(x_{2j}, 1/2^2).$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B(x_1, 1/2) \cap B(x_{2j}, 1/2^2) \neq \emptyset$ για κάθε $j = 1, \ldots, N_2$, αλλιώς παραλείπουμε εκείνες τις $B(x_{2j}, 1/2^2)$ που δεν χρησιμοποιούνται για την κάλυψη της $B(x_1, 1/2)$.

Όπως και στο προηγούμενο βήμα, βρίσκουμε $j_1 \in \{1, \ldots, N_2\}$ ώστε, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $i_1, \ldots, i_m \in I$ ισχύει

$$B(x_{2j_1}, 1/2^2) \setminus (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}) \neq \emptyset.$$

Θέτουμε $x_2 := x_{2j_0}$. Παρατηρήστε ότι

$$\rho(x_1, x_2) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^2}$$

διότι $B(x_1, 1/2) \cap B(x_2, 1/2^2) \neq \emptyset$ (παίρνουμε w στην τομή τους και εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα).

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο (η απόδειξη του επαγωγικού βήματος είναι όμοια με αυτήν του δεύτερου βήματος). Επαγωγικά, ορίζεται ακολουθία (x_n) με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $i_1, \ldots, i_m \in I$ ισχύει

$$B(x_n, 1/2^n) \setminus (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}) \neq \emptyset$$

(η $B(x_n, 1/2^n)$ δεν καλύπτεται από καμία πεπερασμένη υποοικογένεια της $(U_i)_{i\in I}$).

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\rho(x_n, x_{n+1}) < \frac{3}{2^{n+1}}.$$

Έχουμε δει ότι η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n+1}} < \infty$$

εξασφαλίζει ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον X. Έχουμε υποθέσει ότι ο X είναι πλήρης, άρα, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$.

Καταλήγουμε σε άτοπο ως εξής: αφού η $(U_i)_{i\in I}$ καλύπτει τον X, υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x \in U_{i_0}$. Το U_{i_0} είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x,\delta) \subseteq U_{i_0}$. Βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1/2^n < \delta/2$ και $\rho(x_n, x) < \delta/2$ (αυτό είναι δυνατό, διότι $x_n \to x$ και $1/2^n \to 0$). Τότε, για κάθε $z \in B(x_n, 1/2^n)$ έχουμε

$$\rho(z, x) \leq \rho(z, x_n) + \rho(x_n, x) < \frac{1}{2^n} + \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$B(x_n, 1/2^n) \subseteq B(x, \delta) \subseteq U_{i_0},$$

το οποίο είναι άτοπο αφού, από την κατασκευή που κάναμε, η $B(x_n, 1/2^n)$ δεν καλύπτεται από καμία πεπερασμένη υποοικογένεια της $(U_i)_{i\in I}$. □

Σχετικοί με την απόδειξη του θεωρήματος 6.2.4 είναι οι παρακάτω χαρακτηρισμοί του ολικά φραγμένου και του πλήρους μετρικού χώρου:

(i) Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος αν και μόνον αν κάθε ακολουθία (x_n) στον X έχει βασική υπακολουθία.

(ii) Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε άπειρο, ολικά φραγμένο υποσύνολο του X έχει σημείο συσσώρευσης.

Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου περιγράφουμε εν συντομία την απόδειξη αυτών των δύο προτάσεων.

Λήμμα 6.2.5. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ το σύνολο των όρων μιας ακολουθίας (x_n) στο X. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) *Αν η (x_n) είναι βασική ακολουθία, τότε το A είναι ολικά φραγμένο.*

(β) *Αν το A είναι ολικά φραγμένο, τότε η (x_n) έχει βασική υπακολουθία.*

Απόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η (x_n) είναι βασική υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $m, n \geq n_0$ τότε $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_0} B(x_i, \varepsilon),$$

άρα το A είναι ολικά φραγμένο.

(β) Αφού το A είναι ολικά φραγμένο υπάρχουν $C_1^1, \ldots, C_{k_1}^1 \subseteq A$ με $\mathrm{diam}(C_i^1) \leq 1$ για $i = 1, \ldots, k_1$ και $A = \bigcup_{i=1}^{k_1} C_i^1$ (ως $\{C_i^1\}$ παίρνουμε τις τομές του A με πεπερασμένες το πλήθος ανοικτές μπάλες ακτίνας $1/2$ που η ένωσή τους καλύπτει το A). Επειδή το A περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας (σαν σύνολο βέβαια μπορεί να είναι πεπερασμένο) και τα C_i^1 είναι πεπερασμένα το πλήθος, κάποιο από αυτά περιέχει άπειρους όρους της (x_n)– έστω το C^1. Τότε, το C^1 είναι υποσύνολο του ολικά φραγμένου συνόλου A και περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας (x_n). Δουλεύοντας τώρα με το C^1 έχουμε ότι αυτό είναι ολικά φραγμένο, άρα μπορούμε να το καλύψουμε με πεπερασμένα το πλήθος υποσύνολά του $C_1^2, \ldots, C_{k_2}^2$ διαμέτρου μικρότερης ή ίσης με $\frac{1}{2}$. Δηλαδή, $C^1 = \bigcup_{i=1}^{k_2} C_i^2$ με $\mathrm{diam}(C_i^2) \leq \frac{1}{2}$ για $i = 1, \ldots, k_2$. Όπως πριν, το C^1 περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας (x_n) και, επειδή τα C_i^2 είναι πεπερασμένα το πλήθος, κάποιο από αυτά περιέχει άπειρους όρους (από αυτούς που περιέχει το C^1) της (x_n). Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του A, την $C^1 \supseteq C^2 \supseteq \ldots \supseteq C^n \supseteq \ldots$ με $\mathrm{diam}(C^n) \leq \frac{1}{n}$ για $n = 1, 2, \ldots$, όπου κάθε C^n περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας (x_n). Από κάθε C^n επιλέγουμε ένα στοιχείο x_{m_n} ώστε να σχηματιστεί υπακολουθία της (x_n) δηλαδή να ισχύει $m_1 < m_2 < \cdots < m_n < \cdots$. Αυτό μπορεί να γίνει, διότι κάθε C^n περιέχει άπειρους όρους της (x_n).

Ισχυρισμός. Η υπακολουθία (x_{m_n}) είναι βασική.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Αν $i, j \geq n_0$ τότε $C^i, C^j \subseteq C^{n_0}$ και άρα $x_{m_i}, x_{m_j} \in C^{n_0}$. Συνεπώς $\rho(x_{m_i}, x_{m_j}) \leq \mathrm{diam}(C^{n_0}) \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. □

Σημείωση 6.2.6. Η ακολουθία $x_n = (-1)^n$ έχει ολικά φραγμένο σύνολο όρων και δεν είναι βασική. Άρα, η εύρεση βασικής υπακολουθίας είναι το καλύτερο στο οποίο μπορούμε να ελπίζουμε.

Πρόταση 6.2.7. *Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος αν και μόνον αν κάθε ακολουθία (x_n) στον X έχει βασική υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος και έστω (x_n) ακολουθία στον X. Το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο ως υποσύνολο του X και από το λήμμα 6.2.5(β) έπεται το ζητούμενο.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι κάθε ακολουθία στον X έχει βασική υπακολουθία. Θα δείξουμε ότι ο (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος. Αν όχι, τότε υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in X$ να ισχύει $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon_0) \neq \emptyset$. Επιλέγουμε τυχόν $x_1 \in X$. Τότε, $X \setminus B(x_1, \varepsilon_0) \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $x_2 \in X$ ώστε $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$. Όμοια,

$X \setminus \bigcup_{i=1}^{2} B(x_i, \varepsilon_0) \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $x_3 \in X$ ώστε $\rho(x_3, x_i) \geq \varepsilon_0$ για $i = 1, 2$. Συνεχίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο, ορίζουμε επαγωγικά ακολουθία (x_n) στον X με την ιδιότητα $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0$ για $n \neq m$. Προφανώς, αυτή η ακολουθία δεν έχει καμία βασική υπακολουθία και έτσι έχουμε καταλήξει σε άτοπο. □

Πρόταση 6.2.8. *Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε άπειρο, ολικά φραγμένο υποσύνολο του X έχει σημείο συσσώρευσης.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο (X, ρ) είναι πλήρης. Έστω A άπειρο, ολικά φραγμένο υποσύνολο του X. Υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $a_n \neq a_m$ για $n \neq m$. Το σύνολο $B = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ περιέχεται στο ολικά φραγμένο σύνολο A, άρα είναι κι αυτό ολικά φραγμένο. Από το λήμμα 6.2.5(β) η (a_n) έχει βασική υπακολουθία (a_{k_n}). Αφού ο X είναι πλήρης, υπάρχει $x \in X$ ώστε $a_{k_n} \to x$. Η (a_{k_n}) αποτελείται από όρους διαφορετικούς ανά δύο και περιέχεται στο A. Έπεται ότι $x \in A'$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι κάθε άπειρο, ολικά φραγμένο υποσύνολο του X έχει σημείο συσσώρευσης. Θεωρούμε τυχούσα βασική ακολουθία (x_n) στον X. Το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη της συνεπαγωγής (ii) ⇒ (iii) του θεωρήματος 6.2.4 δείχνει ότι η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Αφού είναι και βασική, είναι συγκλίνουσα. Άρα, ο (X, ρ) είναι πλήρης. □

6.3 Βασικές ιδιότητες των συμπαγών συνόλων

Έχουμε ήδη αποδείξει κάποιες βασικές ιδιότητες των συμπαγών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου. Αν K είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, ρ) τότε:

(i) Το K είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X.

(ii) Κάθε ακολουθία (x_n) στο K έχει υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in K$.

Επίσης, κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι πλήρης και ολικά φραγμένος. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι οι συμπαγείς μετρικοί χώροι είναι διαχωρίσιμοι.

Θεώρημα 6.3.1. *Κάθε ολικά φραγμένος μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος. Ειδικότερα, κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Έστω (X, ρ) ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. Σύμφωνα με τον ορισμό, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $\mathcal{F}_\varepsilon$ του X ώστε οι ανοικτές μπάλες με κέντρα στο $\mathcal{F}_\varepsilon$ και ακτίνα $\varepsilon > 0$ να καλύπτουν τον X. Εφαρμόζοντας διαδοχικά τον ορισμό για $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ παίρνουμε μια ακολουθία $D_1, D_2, D_3, \ldots$ πεπερασμένων υποσυνόλων του X ώστε

$$X = \bigcup_{x \in D_n} B\Big(x, \frac{1}{n}\Big)$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Θέτουμε $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Το D είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων.

Ισχυρισμός. Το D είναι πυκνό στον X.

Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ανοικτή μπάλα τέμνει το D. Έστω $B(x, \varepsilon)$ μια ανοικτή μπάλα στον X. Τότε, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Επίσης, $X = \bigcup_{y \in D_n} B(y, \frac{1}{n})$. Συνεπώς, $x \in \bigcup_{y \in D_n} B(y, \frac{1}{n})$ δηλαδή υπάρχει $y \in D_n$ ώστε $x \in B(y, \frac{1}{n})$. Τότε, $x \in B(y, \varepsilon)$, ή ισοδύναμα, $y \in B(x, \varepsilon)$. Άρα, $D_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, δηλαδή $D \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. □

Ορισμός 6.3.2 (ιδιότητα πεπερασμένων τομών)**.** Έστω X μη κενό σύνολο και $(F_i)_{i \in I}$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Λέμε ότι η $(F_i)_{i \in I}$ έχει την **ιδιότητα πεπερασμένων τομών** αν για κάθε μη κενό πεπερασμένο $J \subseteq I$ ισχύει

$$\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset.$$

Για παράδειγμα, η οικογένεια $\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών. Το ίδιο ισχύει για την οικογένεια όλων των υποσυνόλων A του $\mathbb{N}$ για τα οποία το $\mathbb{N} \setminus A$ είναι πεπερασμένο σύνολο (εξηγήστε γιατί).

Θεώρημα 6.3.3. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο (X, ρ) είναι συμπαγής.*

(ii) *Αν $(F_i)_{i \in I}$ είναι οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X που έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών, τότε*

$$\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset.$$

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii): Υποθέτουμε ότι υπάρχει οικογένεια $(F_i)_{i \in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X που έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών, αλλά $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Τότε,

$$X = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i).$$

Δηλαδή, η οικογένεια $(X \setminus F_i)_{i \in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $i_1, \ldots, i_m \in I$ ώστε $X = \bigcup_{j=1}^{m} (X \setminus F_{i_j})$. Τότε, $\bigcap_{j=1}^{m} F_{i_j} = \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Υποθέτουμε ότι ο X δεν είναι συμπαγής. Τότε, υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $(G_i)_{i \in I}$ του X για το οποίο δεν μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο υποκάλυμμα. Θέτουμε $F_i = X \setminus G_i$, $i \in I$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $i_1, \ldots, i_m \in I$ έχουμε $X \neq G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m}$, άρα

$$F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_m} = (X \setminus G_{i_1}) \cap \cdots \cap (X \setminus G_{i_m}) = X \setminus \bigcup_{j=1}^{m} G_{i_j} \neq \emptyset.$$

Δηλαδή, η οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών. Από την υπόθεση, $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$, άρα

$$\bigcup_{i\in I} G_i = X \setminus \bigcap_{i\in I} F_i \neq X,$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Ορισμός 6.3.4 (αριθμός Lebesgue)**.** Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Λέμε ότι ένα ανοικτό κάλυμμα $(V_i)_{i\in I}$ του X έχει **αριθμό Lebesgue**, αν υπάρχει $\delta > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα:

Για κάθε $E \subseteq X$ με $\mathrm{diam}(E) < \delta$ υπάρχει $i \in I$ ώστε $E \subseteq V_i$.

Κάθε αριθμός δ που ικανοποιεί το παραπάνω λέγεται αριθμός Lebesgue του καλύμματος. Λέμε επίσης ότι ο X είναι **χώρος Lebesgue** αν κάθε ανοικτό κάλυμμα $(V_i)_{i\in I}$ του X έχει αριθμό Lebesgue.

Για παράδειγμα, ο μετρικός χώρος $(\mathbb{Z}, d)$ με $d(n,m) = |n-m|$ είναι χώρος Lebesgue. Πράγματι, έστω $(V_i)_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του $\mathbb{Z}$. Τότε, για $\delta = 1$ έχουμε: αν $E \subseteq \mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z} \neq \emptyset$ με $\mathrm{diam}(E) < 1$ έπεται ότι υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $E = \{n\}$. Όμως, υπάρχει $i_n \in I$ ώστε $n \in V_{i_n}$, δηλαδή $E \subseteq V_{i_n}$. Παρόμοια, αν (X,δ) είναι ένας διακριτός χώρος, τότε αυτός είναι χώρος Lebesgue.

Ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ δεν είναι χώρος Lebesgue. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $r : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ με $x \mapsto r_x := \frac{1}{1+|x|}$ και το ανοικτό κάλυμμα

$$U_x = B(x, r_x) = (x - r_x, x + r_x),\ x \in \mathbb{R}$$

τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $E_\delta \subseteq \mathbb{R}$ με $\mathrm{diam}(E_\delta) < \delta$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $E_\delta \nsubseteq U_x$. Πράγματι, αν μας δώσουν $\delta > 0$, τότε υπάρχει $x_0 > 0$ ώστε $r_{x_0} < \delta/4$. Θεωρούμε $y_0 > x_0 + 1$. Θέτουμε $E_\delta = [y_0, y_0 + \delta/2]$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $E_\delta \nsubseteq U_x$. Πράγματι, αν υπήρχε $x \in \mathbb{R}$ ώστε $E_\delta \subseteq U_x$, τότε

$$x - r_x < y_0 < y_0 + \delta/2 < x + r_x$$

Από την τελευταία έπεται ότι $r_x > \delta/4$, άρα $x < x_0$ (εφόσον $r_{x_0} < \delta/4$). Έτσι, $y_0 < x + r_x < x_0 + 1$, άτοπο.

Θεώρημα 6.3.5 (Lebesgue)**.** *Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος. Κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει αριθμό Lebesgue. Δηλαδή, κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι χώρος Lebesgue.*

Απόδειξη. Έστω $(U_i)_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $\varepsilon_x > 0$ και $i_x \in I$ ώστε $B(x,\varepsilon_x) \subseteq U_{i_x}$. Η οικογένεια $\{B(x,\varepsilon_x/2)\}_{x\in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ ώστε $X = \bigcup_{j=1}^k B(x_j, \varepsilon_{x_j}/2)$. Θέτουμε

$$\delta := \frac{1}{2}\min\{\varepsilon_{x_j} : j = 1, 2, \dots, k\} > 0$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $A \subseteq X$ με $\mathrm{diam}(A) < \delta$, υπάρχει $i \in I$ ώστε $A \subseteq U_i$. Έστω $A \subseteq X$ μη κενό, με $\mathrm{diam}(A) < \delta$. Αν $a \in A$ τότε υπάρχει $x_j \in X$ ώστε $a \in B(x_j, \varepsilon_{x_j}/2)$. Τότε, $A \subseteq U_{i_{x_j}}$. Πράγματι, αν $z \in A$ τότε ισχύει

$$\rho(z, x_j) \leq \rho(z, a) + \rho(a, x_j) < \delta + \varepsilon_{x_j}/2 \leq \varepsilon_{x_j}$$

δηλαδή, $z \in B(x_j, \varepsilon_{x_j}) \subseteq U_{i_{x_j}}$. □

Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει, σε κάποιες περιπτώσεις, τη συμπάγεια για τον χώρο γινόμενο συμπαγών μετρικών χώρων.

Θεώρημα 6.3.6. (α) *Έστω $(X_i, d_i)_{i=1}^m$ συμπαγείς μετρικοί χώροι. Αν $X = \prod_{i=1}^m X_i$ είναι ο χώρος γινόμενο των X_i και d είναι οποιαδήποτε μετρική γινόμενο στο X, τότε ο (X, d) είναι συμπαγής.*

(β) *Έστω (X_n, d_n), $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία συμπαγών μετρικών χώρων με $d_n(x(n), y(n)) \leq 1$ για κάθε $x(n), y(n) \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Τότε, ο χώρος γινόμενο $\prod_{n=1}^\infty X_n$ με μετρική την $d(x, y) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} d_n(x(n), y(n))$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. (α) Θα δείξουμε ότι ο (X, d) είναι ακολουθιακά συμπαγής. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν του θεωρήματος 2.1.13. Έστω $x_n = (x_n(1), \ldots, x_n(m))$ ακολουθία στον (X, d). Αφού ο X_1 είναι συμπαγής, η ακολουθία $(x_n(1))$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n}(1))$:

$$x_{k_n}(1) \to x(1) \in X_1.$$

Αφού ο X_2 είναι συμπαγής, η $(x_{k_n}(2))$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}}(2))$:

$$x_{k_{\lambda_n}}(2) \to x(2) \in X_2.$$

Παρατηρήστε ότι

$$x_{k_{\lambda_n}}(1) \to x(1),$$

διότι η $x_{k_n}(1) \to x(1)$ και η $(x_{k_{\lambda_n}}(1))$ είναι υπακολουθία της $x_{k_n}(1)$. Άρα, η υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}})$ έχει συγκλίνουσα πρώτη και δεύτερη συντεταγμένη. Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο μέχρι την m-οστή συντεταγμένη και παίρνοντας m διαδοχικές υπακολουθίες της (x_n) βρίσκουμε υπακολουθία της η οποία έχει κάθε συντεταγμένη της συγκλίνουσα. Η d είναι μετρική γινόμενο στο X, άρα η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. □

(β) Αφήνεται για τις ασκήσεις. □

Πόρισμα 6.3.7. *Ο κύβος του Hilbert $\mathcal{H}^\infty$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.*

Στο κεφάλαιο 2 (θεώρημα 2.1.13) είδαμε ότι κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^m$ (με την Ευκλείδεια μετρική) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Από αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει ο εξής χαρακτηρισμός των συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^m$.

Θεώρημα 6.3.8. *Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, με την Ευκλείδεια μετρική. Ένα υποσύνολο K του $\mathbb{R}^m$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση ισχύει γενικά: σε κάθε μετρικό χώρο, κάθε συμπαγές σύνολο είναι κλειστό και φραγμένο. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Θα δείξουμε ότι το K είναι ακολουθιακά συμπαγές. Έστω (x_n) ακολουθία στο K. Αφού το K είναι φραγμένο, η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη. Από το θεώρημα 2.1.13, υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}^m$. Όμως, το K είναι κλειστό και η (x_{k_n}) περιέχεται στο K. Άρα, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} \in K$.

Αφού κάθε ακολουθία στο K έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του K, το K είναι συμπαγές. □

Σημείωση. Ειδικότερα, κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Όμοια, κάθε ορθογώνιο $R_m = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]$ και κάθε κλειστή μπάλα $\hat{B}_{\rho_2}(x, \varepsilon)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}^m, \rho_2)$.

Στο γενικότερο πλαίσιο των πλήρων μετρικών χώρων δεν ισχύει ότι κάθε κλειστό και φραγμένο σύνολο είναι συμπαγές: στο παράδειγμα 6.1.4(γ) είδαμε ότι, στον $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, η σφαίρα S_{ℓ_∞}, άρα και η κλειστή μπάλα $\hat{B}(0, 1)$, δεν είναι συμπαγές σύνολο.

6.4 Συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγή σύνολα

Σε αυτή την παράγραφο δείχνουμε ότι τα περισσότερα αποτελέσματα που ισχύουν για συνεχείς συναρτήσεις $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ εξακολουθούν να ισχύουν για συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο.

Θεώρημα 6.4.1. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y, σ) μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Θα δώσουμε δύο αποδείξεις. Η πρώτη βασίζεται στο γεγονός ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι χώρος Lebesgue, ενώ η δεύτερη βασίζεται στην ακολουθιακή συμπάγεια.

Πρώτη απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\delta_x = \delta_x(\varepsilon) > 0$ ώστε $f(B(x, \delta_x)) \subseteq B(f(x), \varepsilon/2)$. Η οικογένεια $\{B(x, \delta_x) : x \in X\}$ αποτελεί ανοικτό κάλυμμα του X, άρα υπάρχει αριθμός Lebesgue $\delta > 0$ ώστε: αν $A \subseteq X$ με $\mathrm{diam}(A) < \delta$ τότε υπάρχει $x \in X$ ώστε $A \subseteq B(x, \delta_x)$. Έστω $z_1, z_2 \in X$ με $\rho(z_1, z_2) < \delta$. Τότε, το $A = \{z_1, z_2\}$ έχει διάμετρο $\rho(z_1, z_2) < \delta$, οπότε υπάρχει $x \in X$ ώστε $A \subseteq B(x, \delta_x)$. Έτσι, από τη συνέχεια της f στο x και την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$\sigma(f(z_1), f(z_2)) \leq \sigma(f(z_1), f(x)) + \sigma(f(z_2), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Συνεπώς, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Δεύτερη απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ και ακολουθίες (x_n), (y_n) στον X ώστε $\rho(x_n, y_n) \to 0$ αλλά

$\sigma(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την (ακολουθιακή) συμπάγεια του X μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) και $x \in X$ ώστε $x_{k_n} \to x$. Τότε, από την

$$\rho(y_{k_n}, x) \leq \rho(y_{k_n}, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, x) \to 0 + 0 = 0$$

βλέπουμε ότι $y_{k_n} \to x$. Από τη συνέχεια της f στο x συμπεραίνουμε ότι $f(x_{k_n}) \to f(x)$ και $f(y_{k_n}) \to f(x)$. Τότε, $\sigma(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \to 0$, το οποίο είναι άτοπο (θυμηθείτε ότι $\sigma(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). $\square$

Θεώρημα 6.4.2. *Έστω (X, d), (Y, ρ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f απεικονίζει συμπαγή υποσύνολα του X σε συμπαγή υποσύνολα του Y.*

Απόδειξη. Έστω $K \subseteq X$ συμπαγές. Θα δείξουμε ότι το $f(K)$ είναι συμπαγές στον Y. Αν $(V_i)_{i\in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $f(K)$, τότε το $\{f^{-1}(V_i) : i \in I\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του K. Άρα, υπάρχουν $i_1, \ldots, i_m \in I$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} f^{-1}(V_{i_j})$. Τότε, $f(K) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_{i_j}$. $\square$

Πόρισμα 6.4.3. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y, σ) μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.*

Θεώρημα 6.4.4. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη. Από το πόρισμα 6.4.3 έχουμε ότι το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα κλειστό και φραγμένο. Τότε, υπάρχουν τα $\min f(X)$ και $\max f(X)$ (εξηγήστε γιατί). $\square$

Μια άλλη χρήσιμη συνέπεια του θεωρήματος 6.4.2 είναι η εξής:

Πρόταση 6.4.5. *Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ συνεχής, $1 - 1$ και επί συνάρτηση. Αν ο (X, ρ) είναι συμπαγής, τότε η $g = f^{-1} : (Y, \sigma) \to (X, \rho)$ είναι επίσης συνεχής. Δηλαδή, η f είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη. Έστω F κλειστό υποσύνολο του X. Από το θεώρημα 6.4.2, το $B = f(F)$ είναι συμπαγές, άρα κλειστό, υποσύνολο του Y. Αφού το $g^{-1}(F) = f(F) = B$ είναι κλειστό στον Y και το F ήταν τυχόν, έχουμε ότι τα κλειστά υποσύνολα του X αντιστρέφονται σε κλειστά υποσύνολα του Y μέσω της g, άρα η g είναι συνεχής. $\square$

Σημείωση. Η υπόθεση ότι ο (X, ρ) είναι συμπαγής δεν μπορεί να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, θεωρήστε τη συνάρτηση $f : [0, 1) \cup [2, 3] \to [0, 2]$ με $f(x) = x$ αν $0 \leq x < 1$ και $f(x) = x - 1$ αν $2 \leq x \leq 3$. Παρατηρήστε ότι η f είναι συνεχής, 1-1 και επί, όμως η f^{-1} δεν είναι συνεχής (η f^{-1} είναι ασυνεχής στο σημείο $y = 1$).

6.5 Το σύνολο του Cantor

1. Κατασκευή. Θεωρούμε το διάστημα $C_0 = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία διαδοχικά ίσα διαστήματα. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα $\big(1/3, 2/3\big)$. Ονομάζουμε C_1 το σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$C_1 = \big[0, 1/3\big] \cup \big[2/3, 1\big].$$

Το C_1 είναι προφανώς κλειστό σύνολο. Χωρίζουμε καθένα από τα διαστήματα $\big[0, 1/3\big]$ και $\big[2/3, 1\big]$ σε τρία διαδοχικά ίσα διαστήματα και αφαιρούμε, από καθένα, το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε C_2 το κλειστό σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$C_2 = \big[0, 1/9\big] \cup \big[2/9, 1/3\big] \cup \big[2/3, 7/9\big] \cup \big[8/9, 1\big].$$

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ένα κλειστό σύνολο C_n έτσι ώστε η ακολουθία (C_n) να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$.

(ii) Το C_n είναι η ένωση 2^n ξένων ανά δύο κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $1/3^n$.

Το **σύνολο του Cantor** είναι το σύνολο

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Τα διαστήματα της μορφής $\big[k/3^n, (k+1)/3^n\big]$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, 3^n - 1$, ονομάζονται *τριαδικά διαστήματα*.

2. Ιδιότητες. Το C είναι σίγουρα μη κενό, αφού περιέχει τα άκρα όλων των τριαδικών διαστημάτων που απαρτίζουν κάθε C_n (όπως θα δούμε παρακάτω περιέχει και πολλά άλλα σημεία). Επίσης το C είναι κλειστό, αφού η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. Επιπλέον, το C έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) *Το C είναι τέλειο σύνολο*, δηλαδή είναι κλειστό και κάθε σημείο του C είναι σημείο συσσώρευσης του C.

Είδαμε ότι το C είναι κλειστό. Για να δείξουμε ότι κάθε $x \in C$ είναι σημείο συσσώρευσης του C, παρατηρούμε ότι για το τυχόν $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών τριαδικών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, με $x \in I_n(x)$, $I_n(x) \subset C_n$ και μήκος $\ell(I_n(x)) = \frac{1}{3^n}$. Οι ακολουθίες $(\alpha_n(x))$ και $(\delta_n(x))$ των αριστερών και δεξιών άκρων των $I_n(x)$ αντίστοιχα περιέχονται στο C, καθεμία από αυτές συγκλίνει στο x, και η μία τουλάχιστον από τις δύο δεν είναι τελικά σταθερή. Άρα, το x είναι σημείο συσσώρευσης του C. □

(2) *Το C δεν περιέχει κανένα διάστημα*. Ας υποθέσουμε ότι, για κάποια $a < b$ έχουμε $[a, b] \subseteq C$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $C \subset C_n$, άρα $[a, b] \subseteq C_n$. Αφού το C_n είναι ένωση

2^n ξένων ανά δύο κλειστών διαστημάτων μήκους $1/3^n$, το $[a, b]$ πρέπει να περιέχεται σε κάποιο από αυτά, και συνεπώς, πρέπει να ισχύει η ανισότητα $b - a \leq 1/3^n$. Αυτό οδηγεί σε αντίφαση, αφού $b - a > 0$ και $1/3^n \to 0$. □

(3) *Το C είναι υπεραριθμήσιμο.* Στις ασκήσεις του κεφαλαίου 3 είδαμε ότι κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αφού δείξαμε ότι το C είναι τέλειο, έπεται ο ισχυρισμός. Θα δώσουμε όμως μια δεύτερη απόδειξη, η οποία μας δίνει την αφορμή να δούμε μια διαφορετική περιγραφή του συνόλου C: μπορούμε να ορίσουμε μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση Φ του C στο σύνολο

$$\{0, 2\}^{\mathbb{N}} = \big\{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \mid \text{για κάθε } n,\ \alpha_n = 0 \text{ ή } \alpha_n = 2\big\}.$$

Το $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ είναι υπεραριθμήσιμο (θυμηθείτε το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor). Άρα, το C είναι υπεραριθμήσιμο. Η απεικόνιση Φ ορίζεται ως εξής:

Για κάθε $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, τέτοια ώστε: $I_1(x) \supset I_2(x) \supset \cdots$, και για κάθε n, $x \in I_n(x)$ και το $I_n(x)$ είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n.

Με βάση αυτήν την ακολουθία διαστημάτων ορίζουμε μια ακολουθία $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ ως εξής:

(α) $n = 1$: Θέτουμε $\alpha_1^x = 0$ αν $I_1(x) = \big[0, 1/3\big]$ (δηλαδή, αν $x \in \big[0, 1/3\big]$) και $\alpha_1^x = 2$ αν $I_1(x) = \big[2/3, 1\big]$ (δηλαδή, αν $x \in \big[2/3, 1\big]$).

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Για κάθε n, αν $I_n(x) = \big[k/3^n, (k+1)/3^n\big]$ τότε το $I_{n+1}(x)$ είναι ένα από τα δύο διαστήματα $\big[k/3^n, (k/3^n) + (1/3^{n+1})\big]$, $\big[(k/3^n) + (2/3^{n+1}), (k+1)/3^n\big]$: εκείνο που περιέχει το x. Θέτουμε $\alpha_{n+1}^x = 0$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το πρώτο διάστημα, και $\alpha_{n+1}^x = 2$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το δεύτερο διάστημα.

Παρατηρούμε ότι αν $x \neq y$, τότε για κάποιο n θα ισχύει $I_n(x) \neq I_n(y)$, αλλιώς θα έπρεπε να έχουμε $|x - y| \leq \frac{1}{3^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν n_0 είναι ο πρώτος φυσικός για τον οποίο $I_{n_0}(x) \neq I_{n_0}(y)$, τότε από τον ορισμό των α_n^x βλέπουμε ότι $\alpha_{n_0}^x \neq \alpha_{n_0}^y$, άρα οι δύο ακολουθίες $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty}$ και $(\alpha_n^y)_{n=1}^{\infty}$ είναι διαφορετικές. Αυτό αποδεικνύει ότι η απεικόνιση $\Phi : C \to \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ με $\Phi(x) = (\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα προς ένα.

Για το επί, αν $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία από 0 ή 2, η ακολουθία αυτή ορίζει μοναδική ακολουθία τριαδικών διαστημάτων $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ με $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, και τέτοια ώστε για κάθε n το I_n να είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n:

(α) $n = 1$: Θέτουμε $I_1 = \big[0, 1/3\big]$ αν $\alpha_1 = 0$ ή $I_1 = \big[2/3, 1\big]$ αν $\alpha_1 = 2$.

(β) Γενικά, το I_{n+1} είναι ένα από τα δύο τριαδικά υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{3^{n+1}}$ του I_n που περιέχονται στο C_{n+1}: το αριστερό αν $\alpha_{n+1} = 0$, ή το δεξιό αν $\alpha_{n+1} = 2$.

Αφού τα μήκη των διαστημάτων I_n φθίνουν στο 0, η τομή τους είναι μονοσύνολο: έστω

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

(Θυμηθείτε ότι η τομή είναι μη κενή λόγω του θεωρήματος των κιβωτισμένων διαστημάτων). Αφού $I_n \subset C_n$ για κάθε n, είναι φανερό ότι $x \in C$. Επίσης, $I_n(x) = I_n$ για κάθε n, και από τον τρόπο ορισμού των I_n έχουμε

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} = \Phi(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η Φ είναι επί του $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$, άρα το C είναι υπεραριθμήσιμο.

Ο τρόπος ορισμού της Φ μας οδηγεί σε μια άλλη περιγραφή του συνόλου του Cantor.

3. Τριαδική παράσταση αριθμού. Αν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία με $a_n \in \{0,1,2\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ συγκλίνει σε έναν αριθμό $x \in [0,1]$. Αν $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ με $a_n \in \{0,1,2\}$ για κάθε n, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ (ή η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$) λέγεται **τριαδική παράσταση** του x. Γράφουμε $x = (a_1, a_2, \ldots)$ αντί της $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

Κάθε αριθμός x στο διάστημα $[0,1]$ έχει μία τριαδική παράσταση. Η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ μπορεί να επιλεγεί ως εξής: Χωρίζουμε το $[0,1]$ στα τρία υποδιαστήματα $[0,1/3]$, $(1/3,2/3)$ και $[2/3,1]$. Θέτουμε

$$a_1 = \begin{cases} 0 & , x \in [0,1/3] \\ 1 & , x \in (1/3,2/3) \\ 2 & , x \in [2/3,1]. \end{cases}$$

Με αυτόν τον ορισμό, σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$\frac{a_1}{3} \leq x \leq \frac{a_1}{3} + \frac{1}{3}.$$

Ας υποθέσουμε ότι $x \in [0,1/3]$. Χωρίζουμε αυτό το διάστημα στα τρία υποδιαστήματα $[0,1/9]$, $(1/9,2/9)$, $[2/9,1/3]$ και θέτουμε $a_2 = 0, 1$ ή 2 αντίστοιχα αν το x ανήκει στο αριστερό, στο μεσαίο ή στο δεξιό από αυτά τα διαστήματα. Ανάλογα ορίζεται το a_2 όταν $x \in (1/3,2/3)$ ή $x \in [2/3,1]$, έτσι ώστε σε κάθε περίπτωση να έχουμε

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} \leq x \leq \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{1}{3^2}.$$

Συνεχίζουμε την επιλογή των a_n με αυτόν τον τρόπο έτσι ώστε για κάθε n να έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leq x \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n}.$$

Αφού λοιπόν

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leq \frac{1}{3^n},$$

έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ συγκλίνει στον x, δηλαδή

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}.$$

Παραδείγματα. Ελέγξτε ότι $1/8 = (0,1,0,1,0,1,\dots)$ και $1/4 = (2,0,2,0,2,0,\dots)$.

Είναι φανερό ότι αν $x \neq y$ τότε η τριαδική παράσταση του x είναι διαφορετική από αυτήν του y, αφού μια σειρά δεν μπορεί να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια. Υπάρχουν όμως αριθμοί $x \in [0,1]$ που έχουν δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις. Για παράδειγμα, αν $x = 1/3$ τότε

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{0}{3^k} \;\text{ και }\; \frac{1}{3} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{3^k}.$$

(Με τον τρόπο επιλογής της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ που παρουσιάσαμε παραπάνω, θα βρίσκαμε τη δεύτερη παράσταση).

Γενικότερα, ισχύει το εξής: Ο $x \in [0,1]$ έχει δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις αν και μόνο αν ο x είναι τριαδικός ρητός: δηλαδή αν $x = k/3^n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και κάποιον $1 \leq k \leq 3^n$ (άσκηση).

Το Θεώρημα που ακολουθεί δίνει έναν άλλο τρόπο περιγραφής του συνόλου του Cantor.

Θεώρημα 6.5.1. *Έστω $x \in [0,1]$. Τότε, $x \in C$ αν και μόνο αν ο x έχει μία τριαδική παράσταση η οποία περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2.* □

Απόδειξη. Έστω $x \in [0,1]$. Αν η ακολουθία (a_n) επιλεγεί με τον τρόπο που παρουσιάσαμε παραπάνω, τότε ισχύει το εξής: $x \in C$ αν και μόνο αν $a_n \neq 1$ για κάθε n. Αυτό αποδεικνύει ότι αν $x \in C$ τότε ο x έχει μία τριαδική παράσταση που περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2. Η ολοκλήρωση της απόδειξης αφήνεται σαν άσκηση. □