Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – Ενδιάμεση Εξέταση (14/6/2014)

1. (α) Έστω (α_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι η (α_n): είτε έχει υπακολουθία (α_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό ή έχει υπακολουθία (α_{s_n}) η οποία τείνει στο $+\infty$.

(β) Έστω (β_n) μια ακολουθία και έστω $\beta \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\beta_n \to \beta$ αν και μόνο αν οι υπακολουθίες (β_{2k}) και (β_{2k-1}) συγκλίνουν στο β.

(γ) Δίνεται η ακολουθία $\gamma_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Να βρεθούν όλα τα οριακά σημεία της (γ_n) και τα $\limsup \gamma_n$, $\liminf \gamma_n$.

(3 μονάδες)

2. (α) **(Θεωρία)** Έστω (α_k) ακολουθία πραματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(β) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^2 k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ημ}\left(\frac{1}{k}\right).$$

(2.5 μονάδες)

3. (α) Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $\alpha > 0$. Αποδείξτε ότι: αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha, \infty)$ τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, \infty)$.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι η συνάρτηση $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt[3]{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(2 μονάδες)

4. (α) **(Θεωρία)** Δείξτε ότι κάθε αύξουσα συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) Δώστε παράδειγμα ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες: για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $f(x) \geq 0$, υπάρχει $y \in [0, 1]$ ώστε $f(y) > 0$, και $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$.

Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με αυτές τις ιδιότητες.

(2 μονάδες)

5. (α) Έστω (α_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k}$ συγκλίνει.

(β) Έστω (β_k) ακολουθία θετικών πραγματικών. Ορίζουμε $A_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \beta_k)$, $n \geq 1$. Δείξτε ότι

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + \beta_k) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k\right)$$

για κάθε $n \geq 1$. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η ακολουθία (A_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(γ*) Έστω $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ μια φθίνουσα συνάρτηση. Ορίζουμε ακολουθία (γ_n) θέτοντας $\gamma_1 = 1$ και $\gamma_{n+1} = \gamma_n + f(\gamma_n)$ για κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι $\gamma_n \to +\infty$. **(3 μονάδες)**

Καλή Επιτυχία!