ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ (2005-06)

Εξέταση Προόδου – 6 Μαΐου 2006

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = a$, τότε $f'(a) = 0$.

(β) Αν $a_k \to 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ συγκλίνει.

(γ) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι φραγμένη και αν υπάρχει διαμέριση P ώστε $L(f,P) = U(f,P)$, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(2μ)

2. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{1+k^2} - k), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

(2μ)

3. Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι, αν η $\{a_k\}$ είναι φθίνουσα, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

(2μ)

4. (α) Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[2,+\infty)$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$.

(β) Δείξτε ότι η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$.

(2μ)

5. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε πλήρως ότι:

(α) Το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ της f είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση.

(β) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in (a,b)$, τότε

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

(2μ)

6. Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, η οποία ικανοποιεί την

$$f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)dt$$

για κάθε $x \geq 0$. Δείξτε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \geq 0$.

(2μ)

Καλή επιτυχία!

Απαντήσεις

1. (α) *Λάθος.* Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 - x$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = 0$, όμως $f'(x) = -1$ για κάθε $x \in [0,1]$, άρα $f'(0) = -1 \neq 0$.

(β) *Λάθος.* Αν θεωρήσουμε την $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$, τότε $a_k \to 0$. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(γ) *Σωστό.* Έστω $\varepsilon > 0$. Για την διαμέριση P που μας δόθηκε, έχουμε $U(f,P) - L(f,P) = 0 < \varepsilon$. Από το κριτήριο του Riemann έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

2. (α) Έχουμε $a_k = \sqrt{1+k^2} - k = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}+k}$. Παρατηρούμε ότι $\frac{a_k}{1/k} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}+k} \to \frac{1}{2} > 0$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(β) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας: έχουμε $\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{k} - 1 \to 0 < 1$, άρα η σειρά συγκλίνει.

(γ) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο λόγου. Έχουμε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!k^k}{k!(k+1)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^k} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \to \frac{1}{e} < 1,$$

άρα η σειρά συγκλίνει.

3. Παρατηρούμε ότι $0 \leq \sqrt{a_k a_{k+1}} \leq \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, το ίδιο ισχύει και για την $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}$. Άρα, η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k+a_{k+1}}{2}$ συγκλίνει κι αυτή. Από το κριτήριο σύγκρισης συμπεραίνουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει.

Με την υπόθεση ότι η (a_k) είναι φθίνουσα, παρατηρούμε ότι $0 \leq a_{k+1} \leq \sqrt{a_k a_{k+1}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}$ συγκλίνει, άρα και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

4. (α) Έχουμε υποθέσει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[2,+\infty)$. Επίσης, η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,2]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,2]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε: αν $x, y \geq 2$ και $|x-y| < \delta_1$, τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ομοίως, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε: αν $x, y \in [0,2]$ και $|x - y| < \delta_2$, τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Θα δείξουμε ότι αν $x, y \geq 0$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $x, y \geq 2$: αφού $|x - y| < \delta \leq \delta_1$, έχουμε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
2. $x, y \in [0,2]$: αφού $|x-y| < \delta \leq \delta_2$, έχουμε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
3. $0 \leq x < 2 < y$: παρατηρούμε ότι $x, 2 \in [0,2]$ και $|x-2| < |x-y| < \delta \leq \delta_2$. Επίσης, $y, 2 \geq 2$ και $|y-2| < |x-y| < \delta \leq \delta_1$. Συνεπώς,
$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(2)| + |f(2) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Αν $x, y \in [2,+\infty)$, τότε

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x-y|,$$

δηλαδή η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz στο $[2,+\infty)$. Συνεπώς, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[2,+\infty)$. Τώρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε το (α).

5. (α) Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι εξ ορισμού φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $M>0$ ώστε $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$. Έστω $x<y$ στο $[a,b]$. Τότε,

$$\begin{aligned}|F(x)-F(y)| &= \left|\int_a^y f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \\ &\leq \int_x^y |f(t)|dt \leq M|x-y|.\end{aligned}$$

Άρα, η F είναι Lipschitz συνεχής (με σταθερά M).

(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt\right)-f(x_0) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt-\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt\right) \\ &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)]dt.\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon>0$. Η f είναι συνεχής στο x_0, άρα υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $x_0\leq x<x_0+\delta$ τότε $x\in(a,b)$ και $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Αν $0<h<\delta$, τότε για κάθε $t\in[x_0,x_0+h]$ έχουμε $x_0\leq t\leq x_0+h<x_0+\delta$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)]dt\right| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt \\ &< \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon dt=\frac{1}{h}\cdot h\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα, $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.

6. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη, τότε παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της

$$f(x)^2=2\int_0^x f(t)dt \tag{1}$$

παίρνουμε

$$2f(x)f'(x)=2f(x)$$

για κάθε $x>0$, και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x)=1$ για κάθε $x>0$. Από την (1) βλέπουμε (θέτοντας $x=0$) ότι $f(0)=0$, άρα

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x dt=x$$

για κάθε $x\geq 0$. Μένει να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Από την (1) και την $f(x)>0$ έχουμε: για κάθε $x>0$ ισχύει $\int_0^x f(t)dt>0$ και

$$f(x)=\sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f(t)dt}. \tag{2}$$

Αφού η f είναι συνεχής, το δεξιό μέλος της (2) είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση (το αόριστο ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση). Έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ (2007-08)

Ενδιάμεση Εξέταση – 10 Μαΐου 2008

1. (α) Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

(ii) Αν $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(iii) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_k \to 0$, τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{s_k}) της (a_k) με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_{s_k} < +\infty$.

(β) Έστω $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ημ}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$. Να βρεθούν τα $\liminf a_n$ και $\limsup a_n$.

(2+1μ)

2. (α) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{ημ}^2 k}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k} - 1\right)^k, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}.$$

(β) Προσδιορίστε το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους συγκλίνει η δυναμοσειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k x^k}{k}.$$

(2+1μ)

3. (α) Έστω $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση: δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in X$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Είναι Lipschitz συνεχής;

(1+2μ)

4. (α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $f(x) = 1$ για κάθε $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1.$$

(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με τις εξής ιδιότητες: $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$ και $f(\frac{1}{2}) = 1$. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 f(x)\, dx > 0.$$

(γ) Έστω $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\, dx$$

συγκλίνει.

(1+1+1μ)

Καλή επιτυχία!

Απαντήσεις

1. (α) *Σωστό.* Αν $s=\sum_{k=1}^\infty a_k$ τότε η ακολουθία $s_n=a_1+\cdots+a_n$ των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει στον s. Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n\geq n_0$ έχουμε $|s-s_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. Θέτουμε $k_0=n_0+1$. Αν $k\geq k_0$, τότε $k\geq n_0$ και $k-1\geq n_0$. Συνεπώς,

$$|a_k|=|s_k-s_{k-1}|=|(s_k-s)+(s-s_{k-1})|\leq|s-s_k|+|s-s_{k-1}|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(β) *Λάθος.* Η ακολουθία $a_k=\frac{1}{k}$ είναι μηδενική αλλά η σειρά $\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(γ) *Σωστό.* Αφού $a_k\to 0$, υπάρχει $s_1\in\mathbb{N}$ ώστε $a_{s_1}<1$. Για τον ίδιο λόγο, υπάρχει $s_2>s_1$ ώστε $a_{s_2}<\frac{1}{2^4}$, οπότε

$$2^2a_{s_2}<\frac{1}{2^2}.$$

Για τον ίδιο λόγο, υπάρχει $s_3>s_2$ ώστε $a_{s_3}<\frac{1}{3^4}$, οπότε

$$3^2a_{s_3}<\frac{1}{3^2}.$$

Επαγωγικά, ορίζουμε $s_1<s_2<\cdots<s_k<\cdots$ ώστε

$$k^2a_{s_k}<\frac{1}{k^2}$$

για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, το κριτήριο σύγκρισης δείχνει ότι $\sum_{k=1}^\infty k^2a_{s_k}<+\infty$.

2. (α) Για την πρώτη παρατηρούμε ότι

$$0\leq a_k=\frac{\sin^2 k}{k^2}\leq\frac{1}{k^2}.$$

Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin^2 k}{k^2}$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης.

Για την δεύτερη χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας: έχουμε $\sqrt[k]{a_k}=\sqrt[k]{k}-1\to 0<1$, άρα η σειρά συγκλίνει.

Για την τρίτη χρησιμοποιούμε το κριτήριο συμπύκνωσης: η $a_k=\frac{1}{k\ln k}$ είναι φθίνουσα και μηδενική. Θεωρούμε την

$$\sum_{k=1}^\infty 2^ka_{2^k}=\sum_{k=1}^\infty 2^k\frac{1}{2^kk\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}.$$

Η $\sum_{k=1}^\infty 2^ka_{2^k}$ αποκλίνει (αρμονική σειρά), άρα η $\sum_{k=2}^\infty a_k$ αποκλίνει κι αυτή.

(β) Έστω $x\neq 0$. Αν $a_k=\frac{3^kx^k}{k}$, έχουμε

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\frac{3k|x|}{k+1}\to 3|x|.$$

Από το κριτήριο του λόγου έπεται ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως αν $|x|<1/3$ και αποκλίνει αν $|x|>1/3$.

Για $x=1/3$ παίρνουμε την αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}$ που αποκλίνει, ενώ για $x=-1/3$ την $\sum_{k=1}^\infty\frac{(-1)^k}{k}$ που συγκλίνει από το κριτήριο Leibniz.

Συνεπώς, η δυναμοσειρά συγκλίνει για τα $x\in[-1/3,1/3)$.

3. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Τότε, για κάθε $x, y \in X$ με $|x-y| < \delta$ έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| < M\delta = \varepsilon.$$

Έπεται ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο X.

(β) Έχουμε $|g'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ στο $[2, \infty)$. Άρα, η g είναι Lipschitz συνεχής στο $[2, \infty)$. Από το (α) η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[2, +\infty)$. Επίσης, η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, 2]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 2]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε: αν $x, y \geq 2$ και $|x-y| < \delta_1$, τότε $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ομοίως, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε: αν $x, y \in [0, 2]$ και $|x-y| < \delta_2$, τότε $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Θα δείξουμε ότι αν $x, y \geq 0$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $x, y \geq 2$: αφού $|x-y| < \delta \leq \delta_1$, έχουμε $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
2. $x, y \in [0, 2]$: αφού $|x-y| < \delta \leq \delta_2$, έχουμε $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
3. $0 \leq x < 2 < y$: παρατηρούμε ότι $x, 2 \in [0, 2]$ και $|x-2| < |x-y| < \delta \leq \delta_2$. Επίσης, $y, 2 \geq 2$ και $|y-2| < |x-y| < \delta \leq \delta_1$. Συνεπώς,

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - g(2)| + |g(2) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η g είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Η $g(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι Lipscitz συνεχής στο $[0, +\infty)$. Θα είχε φραγμένη παράγωγο. Όμως, $\lim\limits_{x \to 0^+} g'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$.

4. (α) Θεωρούμε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a, b]$. Σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχει ρητός αριθμός q_k. Από την υπόθεση έχουμε $f(q_k) = 1$, άρα $m_k \leq 1 \leq M_k$. Έπεται ότι

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = 1 \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = U(f, P).$$

Άρα, $\sup\limits_P L(f, P) \leq 1$ και $\inf\limits_P U(f, P) \geq 1$. Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_P L(f, P) \leq 1 \quad \text{και} \quad \int_a^b f(x)dx = \inf_P U(f, P) \geq 1.$$

Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

(β) Επιλέγουμε $\varepsilon = 1/2 > 0$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας στο $x_0 = 1/2$: μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $0 < 1/2 - \delta < 1/2 + \delta < 1$ και, για κάθε $x \in [1/2 - \delta, 1/2 + \delta]$,

$$|f(x) - 1| < \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad f(x) > \frac{1}{2}.$$

Αφού η f είναι μη αρνητική παντού στο $[0, 1]$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^{1/2-\delta} f(x)dx + \int_{1/2-\delta}^{1/2+\delta} f(x)dx + \int_{1/2+\delta}^1 f(x)dx \\ &\geq 0 + \int_{1/2-\delta}^{1/2+\delta} f(x)dx + 0 \geq 2\delta \cdot \frac{1}{2} = \delta > 0. \end{aligned}$$

(γ) Η f είναι φθίνουσα, άρα

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \right) \geq f(n) > 0$$

και

$$a_n - a_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \geq 0,$$

δηλαδή η (a_n) είναι φθίνουσα. Αφού είναι και κάτω φραγμένη από το 0, η (a_n) συγκλίνει.