**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ (2005-06)**

Εξέταση Προόδου – 6 Μαΐου 2006

**1.** Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = a$, τότε $f'(a) = 0$.

(β) Αν $a_k \to 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ συγκλίνει.

(γ) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν η $f$ είναι φραγμένη και αν υπάρχει διαμέριση $P$ ώστε $L(f,P) = U(f,P)$, τότε η $f$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

**(2μ)**

**2.** Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{1+k^2} - k), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

**(2μ)**

**3.** Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι, αν η $\{a_k\}$ είναι φθίνουσα, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

**(2μ)**

**4.** (α) Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[2,+\infty)$. Δείξτε ότι η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$.

(β) Δείξτε ότι η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$.

**(2μ)**

**5.** Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε πλήρως ότι:

(α) Το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ της $f$ είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση.

(β) Αν η $f$ είναι συνεχής στο $x_0 \in (a,b)$, τότε

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

**(2μ)**

**6.** Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, η οποία ικανοποιεί την

$$f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)dt$$

για κάθε $x \geq 0$. Δείξτε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \geq 0$.

**(2μ)**

---

**Καλή επιτυχία!**

## Απαντήσεις

**1.** (α) *Λάθος.* Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=1-x$. Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0=0$, όμως $f'(x)=-1$ για κάθε $x\in[0,1]$, άρα $f'(0)=-1\neq 0$.

(β) *Λάθος.* Αν θεωρήσουμε την $a_k=\frac{(-1)^k}{k}$, τότε $a_k\to 0$. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(γ) *Σωστό.* Έστω $\varepsilon>0$. Για την διαμέριση $P$ που μας δόθηκε, έχουμε $U(f,P)-L(f,P)=0<\varepsilon$. Από το κριτήριο του Riemann έπεται ότι η $f$ είναι ολοκληρώσιμη.

**2.** (α) Έχουμε $a_k=\sqrt{1+k^2}-k=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}+k}$. Παρατηρούμε ότι $\frac{a_k}{1/k}=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}+k}\to\frac{1}{2}>0$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ αποκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(β) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας: έχουμε $\sqrt[k]{a_k}=\sqrt[k]{k}-1\to 0<1$, άρα η σειρά συγκλίνει.

(γ) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο λόγου. Έχουμε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(k+1)!k^k}{k!(k+1)^{k+1}}=\frac{k^k}{(k+1)^k}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\to\frac{1}{e}<1,$$

άρα η σειρά συγκλίνει.

**3.** Παρατηρούμε ότι $0\leq\sqrt{a_ka_{k+1}}\leq\frac{a_k+a_{k+1}}{2}$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει, το ίδιο ισχύει και για την $\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+1}$. Άρα, η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k+a_{k+1}}{2}$ συγκλίνει κι αυτή. Από το κριτήριο σύγκρισης συμπεραίνουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{a_ka_{k+1}}$ συγκλίνει.

Με την υπόθεση ότι η $(a_k)$ είναι φθίνουσα, παρατηρούμε ότι $0\leq a_{k+1}\leq\sqrt{a_ka_{k+1}}$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+1}$ συγκλίνει, άρα και η $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει.

**4.** (α) Έχουμε υποθέσει ότι η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[2,+\infty)$. Επίσης, η $f$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,2]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,2]$. Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $\delta_1>0$ ώστε: αν $x,y\geq 2$ και $|x-y|<\delta_1$, τότε $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Ομοίως, υπάρχει $\delta_2>0$ ώστε: αν $x,y\in[0,2]$ και $|x-y|<\delta_2$, τότε $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Θέτουμε $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Θα δείξουμε ότι αν $x,y\geq 0$ και $|x-y|<\delta$ τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $x,y\geq 2$: αφού $|x-y|<\delta\leq\delta_1$, έχουμε $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.
2. $x,y\in[0,2]$: αφού $|x-y|<\delta\leq\delta_2$, έχουμε $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.
3. $0\leq x<2<y$: παρατηρούμε ότι $x,2\in[0,2]$ και $|x-2|<|x-y|<\delta\leq\delta_2$. Επίσης, $y,2\geq 2$ και $|y-2|<|x-y|<\delta\leq\delta_1$. Συνεπώς,

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(2)|+|f(2)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, άρα η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Η $f(x)=\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Αν $x,y\in[2,+\infty)$, τότε

$$|f(x)-f(y)|=|\sqrt{x}-\sqrt{y}|=\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leq\frac{1}{2\sqrt{2}}|x-y|,$$

δηλαδή η $f$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz στο $[2,+\infty)$. Συνεπώς, η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[2,+\infty)$. Τώρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε το (α).

**5.** (α) Αφού η $f$ είναι ολοκληρώσιμη, είναι εξ ορισμού φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $M>0$ ώστε $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$. Έστω $x<y$ στο $[a,b]$. Τότε,

$$\begin{aligned}|F(x)-F(y)| &= \left|\int_a^y f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right|=\left|\int_x^y f(t)dt\right|\\ &\leq \int_x^y |f(t)|dt\leq M|x-y|.\end{aligned}$$

Άρα, η $F$ είναι Lipschitz συνεχής (με σταθερά $M$).

(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt\right)-f(x_0)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt-\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt\right)\\ &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)]dt.\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon>0$. Η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$, άρα υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $x_0\leq x<x_0+\delta$ τότε $x\in(a,b)$ και $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Αν $0<h<\delta$, τότε για κάθε $t\in[x_0,x_0+h]$ έχουμε $x_0\leq t\leq x_0+h<x_0+\delta$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)]dt\right|\\ &\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt\\ &< \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon dt=\frac{1}{h}\cdot h\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα, $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.

**6.** Αν υποθέσουμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη, τότε παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της

$$f(x)^2=2\int_0^x f(t)dt \tag{1}$$

παίρνουμε

$$2f(x)f'(x)=2f(x)$$

για κάθε $x>0$, και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x)=1$ για κάθε $x>0$. Από την (1) βλέπουμε (θέτοντας $x=0$) ότι $f(0)=0$, άρα

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x dt=x$$

για κάθε $x\geq 0$. Μένει να δείξουμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη. Από την (1) και την $f(x)>0$ έχουμε: για κάθε $x>0$ ισχύει $\int_0^x f(t)dt>0$ και

$$f(x)=\sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f(t)dt}. \tag{2}$$

Αφού η $f$ είναι συνεχής, το δεξιό μέλος της (2) είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση (το αόριστο ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση). Έπεται ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη.