

## Εξετάσεις Απειροστικού Λογισμού II

6 Ιουνίου 2005

1. (α) Βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

(β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right).$$

2. (α) Έστω  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση. Υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x \varphi\left(\frac{x}{t}\right) dt, \quad x > 0.$$

(β) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

3. Έστω  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  φραγμένη συνάρτηση, ώστε για κάθε  $\alpha$  με  $0 < \alpha < 1$  η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη στο  $[\alpha, 1]$ . Αποδείξτε ότι η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη στο  $[0, 1]$ .

4. Έστω  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $\alpha < \beta$  και  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν  $\mathcal{P} = \{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta\}$  είναι διαμέριση του  $[\alpha, \beta]$ , αποδείξτε ότι

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f'(t)| dt.$$

5. (α) Βρείτε δύο κυρτές συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ώστε η  $f$  να είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του  $\mathbb{R}$  και η  $g$  όχι.

(β) Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  κυρτή συνάρτηση. Αν η  $f$  είναι άνω φραγμένη αποδείξτε ότι είναι σταθερή.

6. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα

$$g(x) = 1 + \int_0^x g(t) dt$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Βρείτε την  $g$ .

7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} dx, \quad \int \frac{\log(\varepsilon\varphi x)}{\eta\mu^2 x} dx.$$

8. (α) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης  $R$  της δυναμοσειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ . Με ποιά γνωστή συνάρτηση στο  $(-R, R)$  ισούται αυτή η δυναμοσειρά; Τι συμβαίνει για  $x = R$  και  $x = -R$ ;

(β) Δώστε παράδειγμα δυναμοσειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  με ακτίνα σύγκλισης 10, που να συγκλίνει για  $x = 10$ , αλλά όχι για  $x = -10$ .

Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα. Κυκλώστε στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας τα θέματα που απαντήσατε.

**Καλή Επιτυχία!**