Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Εξετάσεις 4 Ιουλίου 2003

1. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Επίσης αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει, εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

2. Εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}.$$

3. (ι) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση και $\xi \in [a,b]$ με $f(\xi) \neq 0$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f(t)dt \neq 0$.

(ιι) Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, μη σταθερή και $\int_a^b f(t)dt = 0$, αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a,b]$ με $f(x_1)f(x_2) < 0$.

4. Εξετάστε αν είναι ολοκληρώσιμη η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,, & x \notin \mathbb{Q} \\ 0\,, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

5. Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} e^t \,\text{ημ}\, t\, dt$.

6. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση που λαμβάνει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_o \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι η f στο x_o λαμβάνει *ολικό* ελάχιστο.

7. Να ορίσετε τη συνάρτηση $y = \log x$ $(x > 0)$ μέσω ολοκληρώματος και να αποδείξετε ότι ισχύουν:

$$(a) \quad \log(st) = \log s + \log t \quad \forall s,t > 0$$

$$(b) \quad 1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1 \quad \forall x > 0.$$

8. (ι) Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor βαθμού n στο σημείο 0 των συναρτήσεων

$$f(x) = e^x \ \text{ και } \ g(x) = x^2 e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ιι) Βρείτε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $g^{(n)}(0) = 156$.

9. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$(a) \int \frac{1}{1 + \text{ημ}\, x + \text{συν}\, x} dx \qquad (b) \int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx.$$

10. Βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη για τους αριθμούς $a, b, c > 0$ ώστε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^a \left(\text{ημ}\, \frac{1}{n^b}\right) \left(\text{συν}\, \frac{1}{n^c}\right)$$

να συγκλίνει (σε πραγματικό αριθμό).

Να γραφούν 8 θέματα.
Σημειώστε στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό).
Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!