Απειροστικός Λογισμός II

Εξετάσεις 22 Οκτωβρίου 2002

1. Εξηγείστε λεπτομερώς γιατί δεν ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $f(x) = 1 - |x-1|$, $x \in [0, 2]$.

2. Για το πολυώνυμο $p(x) = Ax^2 + Bx + C$ $(A \neq 0)$ αποδείξτε ότι ισχύει: Για κάθε διάστημα $[a, b]$ $(a < b)$ το σημείο ξ, για το οποίο ισχύει $\frac{p(b)-p(a)}{b-a} = p'(\xi)$, είναι το μέσο του διαστήματος $[a, b]$.

3. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \log(1 + e^x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι κυρτή.

Δώστε παράδειγμα μιάς συνάρτησης $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δεν είναι ούτε κυρτή ούτε κοίλη στο $\mathbb{R}$.

4. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση και $0 < x_1 < x_2 < 1$. Αν $f(0) = 0$, $f(x_1) = 0$ και $f(x_2) = x_2$, αποδείξτε ότι για κάθε $a \in (0, 1)$ υπάρχει $b \in (0, 1)$ ώστε $f'(b) = a$.

5. Έστω $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = b < 1$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως και ότι υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ με $\left|\sum_{n=n_o+1}^{\infty} a_n\right| \leq \dfrac{1+b}{1-b}|a_{n_o}|$.

(Υπόδειξη: Θεωρείστε τον αριθμό $\frac{1+b}{2}$).

6. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tan\left(\frac{1}{n^3}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{3^3}(1+2) - \frac{1}{4^3}(1+2+3) + \frac{1}{5^3}(1+2+3+4) + \ldots$$

7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int \sin(\log x)dx \quad \text{και} \quad \int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx.$$

8. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $f(x_o) > 0$ για κάποιο $x_o \in [a, b]$, αποδείξτε ότι $\int_a^b f > 0$. Με ένα παράδειγμα δείξτε ότι αν η f δεν είναι συνεχής το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα.

9. Βρείτε φραγμένη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ώστε η $|f|$ να είναι ολοκληρώσιμη και για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[0, 1]$ να ισχύει

$$L(f, \mathcal{P}) \leq -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \leq U(f, \mathcal{P}).$$

Είναι η f ολοκληρώσιμη;

Γράψτε οκτώ (8) θέματα.

Σημειώστε στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό). Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!