3 Σειρές

3.1 Βασικές έννοιες

Ορισμός 3.1 *Μια ακολουθία (a_n) πραγματικών αριθμών λέγεται* ***αθροίσιμη (με άθροισμα** s**)*** *αν η ακολουθία (s_n) όπου*

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\cdots\cdots \\ s_n &= a_1 + \ldots + a_n \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

συγκλίνει (στο s). Γράφουμε $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Λέμε ότι η ***σειρά*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***ή*** $\sum a_n$ ***με γενικό όρο*** a_n ***και*** n***-οστό μερικό άθροισμα*** s_n ***συγκλίνει****. Αν η ακολουθία (s_n) δεν συγκλίνει λέμε ότι η σειρά $\sum a_n$* ***αποκλίνει****.*

Αν $\lim_n s_n = +\infty$ (αντίστοιχα $\lim_n s_n = -\infty$), λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***τείνει στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$)****.* [1]

Παραδείγματα 3.1 *Τα επόμενα παραδείγματα είναι βασικά. Για ορισμένα από αυτά θα δώσουμε παρακάτω διαφορετικές αποδείξεις ή γενικεύσεις.*
(α) *Έστω $x \in \mathbb{R}$. Η* ***γεωμετρική σειρά***

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

συγκλίνει (στον αριθμό $\frac{1}{1-x}$) αν και μόνον αν $|x| < 1$.
(β) *Η* ***αρμονική σειρά***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

αποκλίνει. Μάλιστα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

(γ) *Γενικότερα, αν $k \in \mathbb{Z}$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ συγκλίνει αν $k > 1$ και αποκλίνει αν $k \leq 1$.*

[1] **Υπενθύμιση** Μια ακολουθία (x_n) πραγματικών αριθμών συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό x αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_o$ να έχουμε $|x_n - x| < \varepsilon$. Η ακολουθία (x_n) τείνει στο $+\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_o$ να έχουμε $x_n > M$.

*(δ) Η **εναλλάσσουσα αρμονική σειρά***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

συγκλίνει.

(ε) *Η σειρά* $\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη (α) Θέτουμε $s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ και παρατηρούμε ότι $|s_n - s_{n-1}| = |x|^n$. Επομένως αν η σειρά συγκλίνει, τότε $\lim_n s_n = \lim_n s_{n+1}$ άρα $\lim_n |x|^n = 0$, πράγμα που μπορεί να συμβεί μόνον αν $|x| < 1$. Αντίστροφα, αν $|x| < 1$ τότε

$$s_n - x s_n = (1 + x + \dots + x^{n-1} + x^n) - (x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1}$$

άρα

$$s_n = \frac{1}{1-x} - x^{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$ Αλλά η ακολουθία (x^n) συγκλίνει στο μηδέν (εφόσον $|x| < 1$) άρα το $\lim_n s_n$ υπάρχει και ισούται με $\frac{1}{1-x}$.

(β) Παρατηρούμε ότι, για κάθε $n = 1, 2, \dots,$

$$\text{αν } \ t_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n} \quad \text{τότε } \ t_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\text{άρα } \ t_{2n} - t_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

δηλαδή $t_{2n} - t_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία (t_n) των μερικών αθροισμάτων δεν συγκλίνει, διότι αν συνέκλινε, έστω στο $t \in \mathbb{R}$, τότε και η υπακολουθία της, (t_{2n}), θα συνέκλινε και αυτή στο t, οπότε θα έπρεπε να ισχύει $\lim_n (t_{2n} - t_n) = 0$.

(γ) Θέτουμε $r_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^k}$. Αν $k \leq 1$ τότε $\frac{1}{m^k} \geq \frac{1}{m}$ άρα $r_n \geq t_n$ και συνεπώς η (r_n) τείνει και αυτή στο $+\infty$.

Αν $k > 1$ τότε, για κάθε $m \geq 2$,

$$\frac{1}{m^k} \leq \frac{1}{m^2} \leq \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}$$

άρα

$$\begin{aligned} r_n = \ & 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{n^k} \\ \leq \ & 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$= 2 - \frac{1}{n} < 2$

και συνεπώς η (r_n) είναι αύξουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνει[2].

(δ) Αν $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, τότε

$$u_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-2}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

άρα, επειδή οι όροι που βρίσκονται σε κάθε παρένθεση είναι θετικοί, η (u_{2n}) είναι (γνησίως) αύξουσα. Είναι όμως και άνω φραγμένη, διότι

$$\begin{aligned} u_{2n} &\leq \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-2}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots \quad + \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n} < 1 \end{aligned}$$

και συνεπώς η (u_{2n}) συγκλίνει, έστω στο u. Αλλά $u_{2n+1} = u_{2n} + \frac{1}{2n+1}$ και συνεπώς (αφού $\frac{1}{2n+1} \to 0$) η (u_{2n+1}) συγκλίνει και αυτή στο ίδιο όριο. Αυτό όμως δείχνει ότι η (u_n) συγκλίνει[3] στο u.

(ε) Αν συμβολίσουμε v_n το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς, τότε $v_{2n} = 1$ και $v_{2n+1} = 0$, άρα η (v_n) έχει δύο υπακολουθίες που δεν συγκλίνουν στο ίδιο όριο, και συνεπώς η (v_n) αποκλίνει.

Παρατήρηση 3.2 *Αν η $\sum a_n$ συγκλίνει τότε $a_n \to 0$ (το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει πάντα: παράδειγμα η αρμονική σειρά).*

Απόδειξη Αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει, έστω στο s, τότε $\lim_n s_{n-1} = s = \lim_n s_n$ άρα $\lim_n (s_n - s_{n-1}) = 0$. Αλλά $a_n = s_n - s_{n-1}$ και συνεπώς $\lim_n a_n = 0$.

Σημείωση Η προηγούμενη παρατήρηση συχνά χρησιμοποιείται στην μορφή:

> *Αν $a_n \nrightarrow 0$ τότε η σειρά $\sum a_n$ δεν συγκλίνει.*

Παρατήρηση 3.3 *Αν δύο ακολουθίες (a_n) και (b_n) είναι* τελικά *ίσες, δηλ. υπάρχει n_o ώστε $a_n = b_n$ για κάθε $n \geq n_o$, τότε οι σειρές $\sum a_n$ και $\sum b_n$ ή αποκλίνουν και οι δύο, ή συγκλίνουν και οι δύο (όχι βέβαια κατ'ανάγκη στο ίδιο άθροισμα).*

---

[2] Το συμπέρασμα ισχύει και όταν ο k δεν είναι ακέραιος. Δες Πόρισμα 3.26.

[3] Δες μια διαφορετική απόδειξη στο Πόρισμα 3.20

Πράγματι, αν (s_n) και (t_n) είναι τα μερικά αθροίσματα των δύο σειρών, τότε για κάθε $n \geq n_o$ έχουμε

$$s_n = t_n + c,$$

όπου $c = \sum_{k=1}^{n_o}(a_k - b_k)$, σταθερά.

Οι επόμενες δυο προτάσεις είναι αναδιατυπώσεις των αντίστοιχων ιδιοτήτων των ακολουθιών.

Πρόταση 3.4 *Αν οι $\sum a_n$ και $\sum b_n$ συγκλίνουν και οι δύο και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε οι $\sum(a_n + b_n)$ και $\sum \lambda a_n$ συγκλίνουν και*

$$\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n, \quad \sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n.$$

Επομένως, αν η $\sum a_n$ συγκλίνει και η $\sum b_n$ αποκλίνει τότε η $\sum(a_n + b_n)$ αποκλίνει.

Πρόταση 3.5 *Αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, τότε η ακολουθία (s_n) είναι φραγμένη (το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα: παράδειγμα η $\sum(-1)^n$).*

Πρόταση 3.6 (κριτήριο Cauchy) *Η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε*

$$m > n \geq n_o \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Απόδειξη Η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει αν και μόνον αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων είναι βασική ακολουθία (ακολουθία Cauchy). Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m, n \geq n_o$ ισχύει $|s_m - s_n| < \varepsilon$. Επειδή $|s_m - s_n| = |s_n - s_m|$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m > n$, οπότε

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right|.$$

Δηλαδή η (s_n) είναι βασική ακολουθία αν και μόνον αν ισχύει η (1). $\square$

Πόρισμα 3.7 *Αν η σειρά $\sum |a_n|$ συγκλίνει, τότε η $\sum a_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη Άμεση από το κριτήριο Cauchy, εφόσον

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|.$$

Ορισμός 3.2 *Λέμε ότι η σειρά $\sum a_n$* ***συγκλίνει απόλυτα*** *όταν η σειρά $\sum |a_n|$ συγκλίνει.*

Παρατήρηση 3.8 Το αντίστροφο του τελευταίου πορίσματος δεν ισχύει πάντα: Για παράδειγμα η εναλλάσσουσα αρμονική σειρά $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει, αλλά δεν συγκλίνει απόλυτα, αφού η $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

Παρατήρηση 3.9 (σειρές θετικών όρων) Αν $b_n \geq 0$ για κάθε n, τότε η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ είναι αύξουσα. Επομένως η $\sum b_n$ ή συγκλίνει ή τείνει στο $+\infty$. Μάλιστα

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Πρόταση 3.10 (Κριτήριο σύγκρισης) *Αν $0 \leq a_n \leq b_n$ για κάθε n, τότε*

$$\text{η } \sum b_n \textit{ συγκλίνει} \implies \text{η } \sum a_n \textit{ συγκλίνει}$$
$$\text{η } \sum a_n \textit{ αποκλίνει} \implies \text{η } \sum b_n \textit{ αποκλίνει}$$

Απόδειξη Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \equiv s_n \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \equiv t_n.$$

Αν λοιπόν η $\sum a_n$ αποκλίνει, οπότε $s_n \to +\infty$, τότε και $t_n \to +\infty$. Αν η $\sum b_n$ συγκλίνει, έστω στο t, τότε $s_n \leq t$ για κάθε n, οπότε $\lim_n s_n = \sup_n s_n \leq t$.

Παρατηρήσεις 3.11 (α) Αν $0 \leq a_n \leq b_n$ για κάθε n και η $\sum b_n$ συγκλίνει, τότε $\sum a_n \leq \sum b_n$, όπως μόλις δείξαμε. Αν μάλιστα $a_k < b_k$ για κάποιο k, τότε $\sum a_n < \sum b_n$.

Πράγματι, για κάθε $n \geq k$ έχουμε

$$t_n - s_n = \sum_{m=1}^{n}(b_m - a_m) \geq b_k - a_k > 0$$

επομένως $\lim_n(t_n - s_n) \geq b_k - a_k > 0$, άρα $\sum a_n < \sum b_n$.

(β) Το συμπέρασμα του Κριτηρίου Σύγκρισης ισχύει και όταν οι ανισότητες $0 \leq a_n \leq b_n$ ισχύουν *τελικά*, δηλαδή υπάρχει κάποιο n_o ώστε $0 \leq a_n \leq b_n$ για κάθε $n > n_o$. Πράγματι, όπως είδαμε στην Παρατήρηση 3.3, οι πρώτοι n_o όροι μιας σειράς δεν επηρεάζουν τη σύγκλιση της σειράς (αλλά μόνον την τιμή του αθροίσματος).

Το επόμενο χρήσιμο Λήμμα γενικεύει την παρατήρηση αυτή.

Λήμμα 3.12 *Έστω (a_n), (b_n) δύο ακολουθίες* ***θετικών*** *αριθμών. Αν υπάρχουν $K, L > 0$ και $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε*

$$Kb_n \leq a_n \leq Lb_n \quad \textit{για κάθε } n \geq n_o,$$

τότε

$$\sum a_n < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum b_n < +\infty$$

Απόδειξη Αν η $\sum a_n$ συγκλίνει τότε από την ανισότητα $Kb_n \leq a_n$ για κάθε $n \geq n_o$ έπεται, σύμφωνα με την τελευταία παρατήρηση, ότι η $\sum Kb_n$ συγκλίνει και συνεπώς ότι η $\sum b_n$ συγκλίνει.

Αν πάλι η $\sum b_n$ συγκλίνει τότε από την ανισότητα $a_n \leq Lb_n$ για κάθε $n \geq n_o$ έπεται ότι η $\sum a_n$ συγκλίνει. $\square$

Πρόταση 3.13 (Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης) *Έστω (a_n), (b_n) δύο ακολουθίες* ***θετικών*** *αριθμών. Υποθέτουμε ότι το όριο $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \ell$ υπάρχει.*
Αν $0 < \ell < +\infty$ τότε

$$\sum b_n < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum a_n < +\infty$$

Αν $\ell = 0$ τότε

$$\begin{aligned} \sum b_n < +\infty \quad &\Longrightarrow \quad \sum a_n < +\infty \\ (\textit{άρα} \ \sum a_n = +\infty \quad &\Longrightarrow \quad \sum b_n = +\infty) \end{aligned}$$

Αν $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ τότε

$$\begin{aligned} \sum a_n < +\infty \quad &\Longrightarrow \quad \sum b_n < +\infty \\ (\textit{άρα} \ \sum b_n = +\infty \quad &\Longrightarrow \quad \sum a_n = +\infty) \end{aligned}$$

Απόδειξη (α) Έστω $0 < \ell < +\infty$. Εφόσον η ακολουθία $(\frac{a_n}{b_n})$ συγκλίνει στον θετικό αριθμό ℓ, από τον ορισμό της σύγκλισης υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_o$ να ισχύει $\left|\frac{a_n}{b_n} - \ell\right| < \frac{\ell}{2}$, άρα $\frac{\ell}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\ell}{2}$, οπότε η ανισότητα του Λήμματος 3.12 ισχύει για κάθε $n \geq n_o$ με $K = \frac{\ell}{2}$ και $L = \frac{3\ell}{2}$.
(β) Έστω $\ell = 0$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_o$ να ισχύει $\frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$ άρα $a_n < \varepsilon b_n$. Από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι, αν η $\sum b_n$ συγκλίνει, οπότε και η $\sum \varepsilon b_n$ θα συγκλίνει, τότε η $\sum a_n$ συγκλίνει. Επομένως αν η $\sum a_n$ αποκλίνει δεν μπορεί να συγκλίνει η $\sum b_n$.
(γ) Έστω $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = +\infty$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_o$ να ισχύει $\frac{a_n}{b_n} > \varepsilon$ άρα $a_n > \varepsilon b_n$. Το συμπέρασμα έπεται πάλι από το κριτήριο σύγκρισης όπως πριν. $\square$

Πρόταση 3.14 (Κριτήριο ρίζας) *Έστω ότι το* $\lim_n |a_n|^{1/n} = \rho$ *υπάρχει ή είναι* $+\infty$.

(ι) *Αν* $0 \le \rho < 1$ *τότε η* $\sum a_n$ *συγκλίνει απόλυτα.*

(ιι) *Αν* $\rho > 1$ *τότε η* $\sum a_n$ *αποκλίνει.*

Σημείωση Στην περίπτωση $\rho = 1$ η σειρά μπορεί να συγκλίνει απόλυτα, να συγκλίνει απλά ή να αποκλίνει.

Παραδείγματα 3.15 *Υπενθυμίζουμε ότι* $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$ *οπότε* $\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ *και* $\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

(α) Η $\sum \frac{1}{n}$ *αποκλίνει.*

(β) Η $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *συγκλίνει, αλλά όχι απόλυτα.*

(γ) Η $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ *συγκλίνει απόλυτα.*

Απόδειξη του κριτηρίου ρίζας (ι) Έστω $\rho < 1$. Υπάρχει τότε $\varepsilon > 0$ ώστε $\rho + \varepsilon < 1$. Από τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας έπεται ότι υπάρχει n_o ώστε $\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon$ για κάθε $n \ge n_o$. Έχουμε λοιπόν

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{n_o-1} |a_n| + \sum_{n=n_o}^{\infty} |a_n| \le \sum_{n=1}^{n_o-1} |a_n| + \sum_{n=n_o}^{\infty} (\rho+\varepsilon)^n.$$

Αλλά η σειρά $\sum(\rho+\varepsilon)^n$ είναι γεωμετρική με λόγο μικρότερο από 1, άρα συγκλίνει, και επομένως συγκλίνει και η $\sum |a_n|$ από το κριτήριο σύγκρισης.

(ιι) Αν $\rho > 1$ υπάρχουν άπειροι δείκτες n ώστε $|a_n|^{1/n} > 1 \Rightarrow |a_n| > 1$ και άρα $a_n \nrightarrow 0$, οπότε η σειρά αποκλίνει (Πόρισμα 3.2). $\square$

Παρατηρούμε ότι στην απόδειξη του κριτηρίου ρίζας δεν χρησιμοποιήθηκε πλήρως η υπόθεση ότι η ακολουθία $(|a_n|^{1/n})$ συγκλίνει στον αριθμό ρ, αλλά μόνον ότι δεν έχει υπακολουθία που να συγκλίνει σε μεγαλύτερο αριθμό. Αυτή είναι η ιδέα για την εκλέπτυνση του κριτηρίου που θα δούμε αργότερα, κι η οποία βασίζεται στην έννοια του *ανώτερου ορίου (limes superior)* μιας ακολουθίας.

Πρόταση 3.16 (Κριτήριο λόγου) *Έστω ότι* $a_n \neq 0$ *για κάθε* n *και ότι το όριο* $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \theta$ *υπάρχει ή είναι* $+\infty$.

(ι) *Αν* $0 \le \theta < 1$ *τότε η* $\sum a_n$ *συγκλίνει απόλυτα.*

(ιι) *Αν* $\theta > 1$ *τότε η* $\sum a_n$ *αποκλίνει.*

(ιιι) *Αν* $\theta = 1$ *δεν έχουμε κανένα συμπέρασμα.*

Σημείωση Στην περίπτωση $\theta = 1$ η σειρά μπορεί να συγκλίνει απόλυτα, να συγκλίνει απλά ή να αποκλίνει. Δες πχ. τα Παραδείγματα 3.15.

Το κριτήριο λόγου είναι άμεση συνέπεια του κριτηρίου ρίζας[4], αν χρησιμοποιήσει κανείς το γνωστό

[4] Δες μια άλλη απόδειξη μετά την Πρόταση 3.27

Λήμμα 3.17 *Έστω (b_n) ακολουθία με $b_n > 0$ για κάθε n. Αν το όριο $\lim_n \frac{b_{n+1}}{b_n}$ υπάρχει, τότε υπάρχει και το $\lim \sqrt[n]{b_n}$ και είναι ίσα. (Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.)*

Πρόταση 3.18 (Leibniz) *Αν $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq 0$ και $b_n \to 0$, τότε η σειρά*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_k = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots$$

συγκλίνει.[5]

Απόδειξη Αν (s_n) είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων, παρατηρούμε ότι η υπακολουθία (s_{2n}) είναι αύξουσα και φραγμένη (και η υπακολουθία (s_{2n-1}) είναι φθίνουσα και φραγμένη). Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εφόσον η (b_n) είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= s_{2n} + (b_{2n+1} - b_{2n+2}) \geq s_{2n} \\ s_{2n+1} &= s_{2n-1} - (b_{2n} - b_{2n+1}) \leq s_{2n-1} \\ \text{και} \quad s_{2n} &= s_{2n-1} - b_{2n} \leq s_{2n-1}. \end{aligned}$$

άρα

$$s_2 \leq s_4 \leq \ldots \leq s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq \ldots \leq s_3 \leq s_1.$$

Επομένως η (s_{2n}) συγκλίνει, έστω στο s. Επειδή όμως $b_n \to 0$, η σχέση

$$s_{2n-1} = s_{2n} + b_{2n}$$

δείχνει ότι και η (s_{2n-1}) συγκλίνει στο ίδιο όριο.

Συνεπώς η (s_n) συγκλίνει. $\square$

Παρατήρηση 3.19 Μπορούμε μάλιστα να εκτιμήσουμε και το «σφάλμα» $|s_n - s|$ ως εξής:

Αφού η (s_{2n}) αυξάνει προς το s και η (s_{2n-1}) φθίνει προς το s, έχουμε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned} s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1} \quad &\Rightarrow 0 \leq s - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = b_{2n+1} \\ s_{2n} \leq s \leq s_{2n-1} \quad &\Rightarrow s_{2n} - s_{2n-1} \leq s - s_{2n-1} \leq 0 \\ &\Rightarrow |s - s_{2n-1}| \leq |s_{2n} - s_{2n-1}| = |b_{2n}| \end{aligned}$$

και άρα $\qquad |s_n - s| \leq |b_{n+1}| \quad$ για κάθε n.

Πόρισμα 3.20 *Η εναλλάσσουσα αρμονική σειρά $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει.*

[5] Δες μια άλλη απόδειξη μετά την Πρόταση 3.24.

3.2 Το δεκαδικό ανάπτυγμα

Ο συμβολισμός $\frac{1}{3} = 0,33\ldots$ σημαίνει $\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \ldots$ δηλαδή $\displaystyle\frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$.

Πράγματι, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ είναι γεωμετρική με λόγο $\frac{1}{10} < 1$, άρα συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 3\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{3}.$$

Για τον ίδιο λόγο,

$$0,999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1.$$

Γενικότερα, αν $a_n \in \{0,1,\ldots,9\}$ $(n \in \mathbb{N})$ είναι «δεκαδικά ψηφία», η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό (στο $[0,1]$). Πράγματι, εφόσον $0 \leq a_n \leq 9$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 1$$

(κριτήριο σύγκρισης).

Αντίστροφα, κάθε πραγματικός αριθμός (ρητός ή άρρητος) έχει ένα δεκαδικό ανάπτυγμα. Πράγματι, αφαιρώντας το ακέραιο μέρος του αριθμού, βλέπουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε την

Πρόταση 3.21 *Αν $a \in (0,1)$ υπάρχουν $a_n \in \{0,1,\ldots,9\}$ $(n \in \mathbb{N})$ ώστε*

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Απόδειξη Θέτω $a_1 = [10a]$ (το ακέραιο μέρος του $10a$) οπότε $a_1 \in \{0,1,\ldots,9\}$ και $a_1 \leq 10a < a_1 + 1$ άρα $\frac{a_1}{10} \leq a < \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$ επομένως

$$0 \leq a - \frac{a_1}{10} < \frac{1}{10}$$

(σφάλμα μικρότερο από $\frac{1}{10}$). Έπεται ότι $0 \leq 100\left(a - \frac{a_1}{10}\right) < 10$. Αν λοιπόν θέσω $a_2 = \left[100\left(a - \frac{a_1}{10}\right)\right]$ τότε $a_2 \in \{0,1,\ldots,9\}$ και $a_2 \leq 100\left(a - \frac{a_1}{10}\right) < a_2 + 1$ άρα $\frac{a_2}{100} \leq a - \frac{a_1}{10} < \frac{a_2}{100} + \frac{1}{100}$, επομένως

$$0 \leq a - \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}\right) < \frac{1}{10^2}$$

(σφάλμα μικρότερο από $\frac{1}{100}$). Συνεχίζω επαγωγικά: Αν έχω βρεί $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ώστε

$$0 \leq a - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} < \frac{1}{10^{n-1}}$$

τότε $0 \leq 10^n \left(a - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{10^k}\right) < 10$, άρα υπάρχει $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ώστε $a_n \leq 10^n \left(a - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{10^k}\right) < a_n + 1$ οπότε

$$0 \leq a - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{a_n}{10^n}\right) < \frac{1}{10^n}.$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει λοιπόν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και δείχνει (αφού $\frac{1}{10^n} \to 0$) ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ συγκλίνει στο a. $\square$

Ερωτήσεις

(1) Πότε ένας αριθμός έχει μοναδικό δεκαδικό ανάπτυγμα;
(2) Πότε ένας αριθμός έχει δεκαδικό ανάπτυγμα που τερματίζεται;
(3) Πότε ένα δεκαδικό ανάπτυγμα αναπαριστά ρητό αριθμό;

3.3 Ο αριθμός e του Euler

Υπενθυμίζουμε ότι η ακολουθία $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ συγκλίνει σ'έναν αριθμό μεταξύ 2 και 3, ο οποίος ονομάζεται αριθμός του Euler και συμβολίζεται e.

Πρόταση 3.22 *Έστω $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Τότε*

(ι) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.
(ιι) $0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}$ *για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$.
(ιιι) Ο αριθμός e είναι άρρητος.

Απόδειξη (ι) Η σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ συγκλίνει από το κριτήριο λόγου. Έστω a το άθροισμά της. Θα δείξουμε ότι $e \leq a$ και ότι $e \geq a$, άρα $e = a$. Από το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε για κάθε n

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \ldots \frac{n-k+1}{n} \\
&< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = a
\end{aligned}$$

άρα $e = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq a$.

Από την άλλη μεριά, αν σταθεροποιήσουμε ένα $m \in \mathbb{N}$, για κάθε $n > m$ έχουμε,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\ &> 1+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Στην ανισότητα αυτή «παίρνουμε όρια» καθώς $n \to \infty$ (το m είναι σταθερό): το άθροισμα έχει **πεπερασμένο πλήθος** προσθετέων και κάθε προσθετέος $\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$ του αθροίσματος τείνει στο $\frac{1}{k!}$ καθώς $n \to \infty$, άρα το όριο $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)$ υπάρχει και ισούται με
$\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\lim\limits_{n}(1-\frac{1}{n})\dots\lim\limits_{n}(1-\frac{k-1}{n}) = 1+\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n &\geq 1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\ &= 1+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!} = s_m.\end{aligned}$$

Επομένως $e \geq s_m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και άρα $e \geq \lim\limits_{m} s_m = a$. Τελικώς λοιπόν $e = a$.

(ιι) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}0 < e - s_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\dots\right)\\ &\leq \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\dots\right) = \frac{1}{n!}\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}.\end{aligned}$$

(ιιι) Υποθέτουμε ότι $e \in \mathbb{Q}$ και γράφουμε[6] $e = \frac{m}{n}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}0 < e - s_n \leq \frac{1}{n!n} &\Rightarrow 0 < \frac{m}{n} - s_n \leq \frac{1}{n!n}\\ &\Rightarrow 0 < (n-1)!m - n!s_n \leq \frac{1}{n} < 1.\end{aligned}$$

Ο αριθμός $(n-1)!m$ είναι ακέραιος. Ο αριθμός

$$n!s_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1\cdot 2\dots(k-1)k(k+1)\dots n}{1\cdot 2\dots(k-1)k} = \sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)\dots n$$

[6] Έχουμε δείξει ότι $2 < e < 3$ άρα ο e δεν είναι ακέραιος (οπότε $n > 1$).

είναι επίσης ακέραιος. Επομένως η διαφορά τους δεν μπορεί να βρίσκεται στο $(0,1)$.

3.4 Συμπληρώματα

Λήμμα 3.23 (άθροιση κατά μέρη) *Αν $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$ και $a_k \in \mathbb{R}$, τότε θέτοντας $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ και $s_0 = 0$, έχουμε για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $n \geq m \geq 1$,*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m$$

Απόδειξη Έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n} s_{k-1} b_k \\
&\overset{(j=k-1)}{=} \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{j=m-1}^{n-1} s_j b_{j+1} \\
&= \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_k + s_n b_n - s_{m-1} b_m - \sum_{j=m}^{n-1} s_j b_{j+1} \\
&\overset{(k=j)}{=} \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_k + s_n b_n - s_{m-1} b_m - \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_{k+1} \\
&= \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m.
\end{aligned}$$

Πρόταση 3.24 (Dirichlet)
Έστω (a_k) και (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αν η (b_n) είναι φθίνουσα και τείνει στο 0 και τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum a_k$ είναι φραγμένα, δηλαδή

$$(i) \text{ υπάρχει } M < \infty \text{ με } \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq M \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

$$(ii)\ b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{και } (iii)\ b_n \to 0,$$

τότε η σειρά $\sum b_k a_k$ συγκλίνει.

Απόδειξη Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n > m$, έχουμε από το Λήμμα

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m\right| \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} |s_k|(b_k - b_{k+1}) + |s_n| b_n + |s_{m-1}| b_m \;\; (\text{γιατί } b_n, b_m, b_k - b_{k+1} \geq 0) \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} M(b_k - b_{k+1}) + M b_n + M b_m \\
&= M(b_m - b_n) + M b_n + M b_m = 2 M b_m.
\end{aligned}$$

Επομένως, αν δοθεί $\epsilon > 0$, αφού $b_n \to 0$, βρίσκουμε $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $b_m < \frac{\epsilon}{2M}$ όταν $m \geq n_o$, οπότε, για κάθε $n > m \geq n_o$ έχουμε από την προηγούμενη ανισότητα

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| < \epsilon.$$

Δηλαδή η σειρά ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy και συνεπώς συγκλίνει. □

Η Πρόταση 3.18 (Leibniz) είναι άμεσο πόρισμα. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\right| \leq 1$ για κάθε n. □

Πρόταση 3.25 (Κριτήριο συμπύκνωσης) *Αν $a_n \geq 0$ για κάθε n και η (a_n) είναι φθίνουσα, τότε η $\sum a_n$ συγκλίνει αν και μόνον αν η $\sum 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη Έχουμε

$$\begin{aligned}
&0 \leq 2a_2 \leq 2(a_1 + a_2) \\
&0 \leq 4a_4 \leq 2(a_3 + a_4) \\
&0 \leq 8a_8 \leq 2(a_5 + a_6 + a_7 + a_8) \\
&\;\;\cdots\cdots \\
&0 \leq 2^n a_{2^n} \leq 2 \sum_{m=2^{n-1}+1}^{2^n} a_m \quad (n \geq 2)
\end{aligned}$$

προσθέτοντας κατά μέλη

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \leq 2 \sum_{m=1}^{2^n} a_m$$

άρα αν $\sum a_n < \infty$ τότε η $\left(\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k}\right)_n$ είναι φραγμένη και συνεπώς συγκλίνει.

Από την άλλη μεριά,

$$\begin{aligned} a_1 &\leq a_1 \\ a_2 + a_3 &\leq 2a_2 \\ a_4 + a_5 + a_6 + a_7 &\leq 4a_4 \\ a_8 + a_9 + \ldots + a_{15} &\leq 8a_8 \\ &\ldots\ldots \\ \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} a_k &\leq 2^{n-1} a_{2^{n-1}} \end{aligned}$$

προσθέτοντας κατά μέλη

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} a_k \leq \sum_{m=1}^{n} 2^{m-1} a_{2^{m-1}}$$

άρα αν $\sum 2^n a_{2^n} < \infty$ τότε η σειρά θετικών όρων $\sum a_n$ είναι φραγμένη, οπότε συγκλίνει και μάλιστα

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m}.$$

Πόρισμα 3.26 *Έστω $q \in \mathbb{Q}$. Η σειρά* [7] $\sum \frac{1}{n^q}$ *συγκλίνει αν και μόνον αν $q > 1$ και τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} < \left(1 - \frac{1}{2^{q-1}}\right)^{-1}.$$

Απόδειξη Αν $q \leq 0$ τότε η ακολουθία $\left(\frac{1}{n^q}\right)$ δεν τείνει στο 0 και άρα η $\sum \frac{1}{n^q}$ αποκλίνει.

Έστω $q > 0$. Η ακολουθία $(\frac{1}{n^q})$ είναι φθίνουσα και συνεπώς η σειρά $\sum \frac{1}{n^q}$ έχει την ίδια συμπεριφορά (ως προς τη σύγκλιση) με την $\sum 2^n \frac{1}{(2^n)^q} = \sum \left(\frac{1}{2^{q-1}}\right)^n$. Αλλά η τελευταία είναι γεωμετρική, επομένως συγκλίνει αν και μόνον αν ο λόγος $\dfrac{1}{2^{q-1}}$ είναι γνησίως μικρότερος από 1, δηλαδή αν και μόνον αν $q - 1 > 0$. Όταν $q > 1$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} \leq \sum_{m=0}^{\infty} 2^m \frac{1}{(2^m)^q} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{q-1}}\right)^m = \left(1 - \frac{1}{2^{q-1}}\right)^{-1}. \qquad (2)$$

Μάλιστα, επειδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} = 1 + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^q} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^q}$$

ενώ

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^m \left(\frac{1}{2^q}\right)^m = 1 + \left(\frac{1}{2^q} + \frac{1}{2^q}\right) + \sum_{m=2}^{\infty} 2^m \left(\frac{1}{2^q}\right)^m$$

[7] Ο μόνος λόγος που περιοριζόμαστε στην περίπτωση $q \in \mathbb{Q}$ είναι ότι δεν έχουμε ορίσει (ακόμα) το n^x όταν ο x είναι άρρητος.

η ανισότητα (2) είναι γνήσια. $\square$

Παραδείγματα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{4}{3}.$$

Δεύτερη απόδειξη (Καραθεοδωρή) Υπενθύμιση: Δείξαμε στο παράδειγμα 3.1 (γ) ότι η σειρά $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Επεκτείνοντας την ιδέα της απόδειξης αυτής, θα δείξουμε ότι η $\sum \frac{1}{n^q}$ συγκλίνει για κάθε $q > 1$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

Ισχυρισμός Αν $p > 0$, τότε για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ισχύει η ανισότητα

$$\frac{1}{(n+1)^{p+1}} < \frac{1}{p} \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^p} \right). \tag{3}$$

Αν δεχθούμε τον ισχυρισμό, θέτοντας $p = q - 1 > 0$, έχουμε για κάθε $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N+1} \frac{1}{m^q} &= 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^{p+1}} \\ &< 1 + \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^p} \right) = 1 + \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{(N+1)^p} \right) < 1 + \frac{1}{p} \end{aligned}$$

(διότι $p > 0$) οπότε η σειρά $\sum \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει, και μάλιστα το άθροισμά της δεν υπερβαίνει τον αριθμό $1 + \frac{1}{p}$.

Απόδειξη ισχυρισμού Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{t^p}$, $t > 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη και $f'(t) = -p\frac{1}{t^{p+1}}$. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στην f στο διάστημα $[n, n+1]$: Υπάρχει $x_n \in (n, n+1)$ ώστε

$$\begin{aligned} & f(n+1) - f(n) = f'(x_n) \\ \text{δηλαδή} \quad & \frac{1}{(n+1)^p} - \frac{1}{n^p} = -p\frac{1}{x_n^{p+1}} \\ \text{άρα} \quad & \frac{1}{p} \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^p} \right) = \frac{1}{x_n^{p+1}}. \end{aligned}$$

Αλλά $x_n < n + 1$ και $p + 1 > 0$ οπότε $\frac{1}{x_n^{p+1}} > \frac{1}{(n+1)^{p+1}}$ άρα η (3) αληθεύει.

Πρόταση 3.27 (Κριτήριο Λόγων) *Αν* $a_n > 0$, $b_n > 0$ *και υπάρχει* n_o *ώστε* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *για κάθε* $n \geq n_o$, *τότε*

(ι) Αν η $\sum b_n$ *συγκλίνει τότε και η* $\sum a_n$ *συγκλίνει,* *(ισοδύναμα)*

(ιι) Αν η $\sum a_n$ *αποκλίνει τότε και η* $\sum b_n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη Αν $n \geq n_o$,

$$a_n = a_{n_o} \frac{a_{n_o+1}}{a_{n_o}} \frac{a_{n_o+2}}{a_{n_o+1}} \ldots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_{n_o} \frac{b_{n_o+1}}{b_{n_o}} \frac{b_{n_o+2}}{b_{n_o+1}} \ldots \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{a_{n_o}}{b_{n_o}} b_n$$

άρα

$$\sum_{n=n_o}^{N} a_n \leq \frac{a_{n_o}}{b_{n_o}} \sum_{n=n_o}^{N} b_n \quad \text{για κάθε } N \geq n_o.$$

Το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο σύγκρισης. □

Εφαρμογή: Δεύτερη απόδειξη του κριτηρίου λόγου (Πρόταση 3.16)

Αν $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \theta > 1$ τότε υπάρχει n_o ώστε $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$ για κάθε $n \geq n_o$. Επομένως $|a_{n+1}| > |a_n|$ για κάθε $n \geq n_o$ και ειδικότερα $|a_n| > |a_{n_o}|$, πράγμα που δείχνει ότι η ακολουθία (a_n) δεν τείνει στο 0, άρα η $\sum a_n$ αποκλίνει.

Υποθέτουμε ότι $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \theta < 1$. Έστω $\rho \in (\theta, 1)$. Υπάρχει n_o ώστε $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \rho = \frac{\rho^{n+1}}{\rho^n}$ για κάθε $n \geq n_o$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγων: αφού η $\sum \rho^n$ συγκλίνει, το ίδιο ισχύει για την $\sum |a_n|$.