Κεφάλαιο 8

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Ομάδα Α΄

1. *Έστω $f, f_n : I \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n είναι κυρτή συνάρτηση και ότι $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in I$. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή.*

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in I$ και έστω $t \in [0,1]$. Από την υπόθεση έχουμε $f_n(x) \to f(x)$, $f_n(y) \to f(y)$ και $f_n((1-t)x+ty) \to f((1-t)x+ty)$ όταν το $n \to \infty$. Από την κυρτότητα των f_n έχουμε

$$f_n((1-t)x+ty) \leq (1-t)f_n(x) + tf_n(y)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\begin{aligned} f((1-t)x+ty) &= \lim_{n\to\infty} f_n((1-t)x+ty) \leq \lim_{n\to\infty}((1-t)f_n(x)+tf_n(y)) \\ &= (1-t)\lim_{n\to\infty} f_n(x) + t\lim_{n\to\infty} f_n(y) = (1-t)f(x)+tf(y). \end{aligned}$$

Αφού τα $x, y \in I$ και $t \in [0,1]$ ήταν τυχόντα, η f είναι κυρτή.

2. *Έστω $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία κυρτών συναρτήσεων $f_n : I \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : I \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. Αν η f είναι πεπερασμένη παντού στο I, τότε η f είναι κυρτή.*

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in I$ και έστω $t \in [0,1]$. Από τον ορισμό της f και την κυρτότητα των f_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$f_n((1-t)x+ty) \leq (1-t)f_n(x)+tf_n(y) \leq (1-t)f(x)+tf(y).$$

Ο αριθμός $(1-t)f(x)+tf(y)$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{f_n((1-t)x+ty) : n \in \mathbb{N}\}$, άρα

$$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y).$$

Αφού τα $x, y \in I$ και $t \in [0,1]$ ήταν τυχόντα, η f είναι κυρτή.

3. *Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτές συναρτήσεις. Υποθέτουμε ακόμα ότι η g είναι αύξουσα. Δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι κυρτή.*

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ και έστω $t \in [0,1]$. Αφού η f είναι κυρτή, έχουμε

$$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y).$$

Η g είναι αύξουσα, άρα

$$(g \circ f)((1-t)x+ty) = g(f((1-t)x+ty)) \leq g((1-t)f(x)+tf(y)).$$

Αφού η g είναι κυρτή, έχουμε

$$g((1-t)f(x)+tf(y)) \leq (1-t)g(f(x))+tg(f(y)) = (1-t)(g \circ f)(x)+t(g \circ f)(y).$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ανισότητες παίρνουμε

$$(g \circ f)((1-t)x+ty) \leq (1-t)(g \circ f)(x)+t(g \circ f)(y).$$

Αφού τα $x, y \in \mathbb{R}$ και $t \in [0,1]$ ήταν τυχόντα, η $g \circ f$ είναι κυρτή.

4. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$f(x_1+\delta)-f(x_1) \leq f(x_2+\delta)-f(x_2)$$

για κάθε $x_1 < x_2 \in I$ και $\delta > 0$ για το οποίο $x_1+\delta, x_2+\delta \in I$.

Υπόδειξη. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(α) $x_1+\delta < x_2$: Εφαρμόζοντας το λήμμα των τριών χορδών για τα $x_1 < x_1+\delta < x_2$ και $x_1+\delta < x_2 < x_2+\delta$, παίρνουμε

$$\frac{f(x_1+\delta)-f(x_1)}{\delta} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1+\delta)}{x_2-x_1-\delta} \leq \frac{f(x_2+\delta)-f(x_2)}{\delta}.$$

Συνεπώς, $f(x_1+\delta)-f(x_1) \leq f(x_2+\delta)-f(x_2)$.

(β) $x_2 < x_1+\delta$: Εφαρμόζοντας το λήμμα των τριών χορδών για τα $x_1 < x_2 < x_1+\delta$ και $x_2 < x_1+\delta < x_2+\delta$, παίρνουμε

$$\frac{f(x_1+\delta)-f(x_1)}{\delta} \leq \frac{f(x_1+\delta)-f(x_2)}{x_1+\delta-x_2} \leq \frac{f(x_2+\delta)-f(x_2)}{\delta}.$$

Συνεπώς, $f(x_1+\delta)-f(x_1) \leq f(x_2+\delta)-f(x_2)$.

(γ) $x_2 = x_1+\delta$: Το ζητούμενο έπεται άμεσα από το λήμμα των τριών χορδών για τα $x_1 < x_2 = x_1+\delta < x_2+\delta$.

5. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι η f δεν είναι αναγκαστικά συνάρτηση Lipschitz σε ολόκληρο το $[a,b]$, ακόμα και αν υποθέσουμε ότι η f είναι φραγμένη. Επίσης, δείξτε ότι η f δεν είναι αναγκαστικά συνεχής στο $[a,b]$.*

Υπόδειξη. (α) Η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1-\sqrt{x}$ είναι κυρτή και φραγμένη συνάρτηση. Δεν είναι όμως Lipschitz συνεχής στο $[0,1]$. Παρατηρήστε ότι

$$\frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty \quad \text{καθώς το} \quad x \to 0^+.$$

(β) Ελέγξτε ότι η $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ όταν $-1 < x < 1$ και $f(-1) = f(1) = 2$ είναι κυρτή συνάρτηση. Όμως, δεν είναι συνεχής στα άκρα του $[-1,1]$.

6. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $\xi \in (a,b)$. Δείξτε ότι:*

(α) *αν η f έχει ολικό μέγιστο στο ξ τότε η f είναι σταθερή.*

(β) *αν η f έχει ολικό ελάχιστο στο ξ τότε η f είναι φθίνουσα στο (a,ξ) και αύξουσα στο (ξ,b).*

(γ) *αν η f έχει τοπικό ελάχιστο στο ξ τότε έχει ολικό ελάχιστο στο ξ.*

(δ) *αν η f είναι γνησίως κυρτή, τότε έχει το πολύ ένα σημείο ολικού ελαχίστου.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι η f έχει ολικό μέγιστο στο ξ. Τότε, $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in (a,b)$. Επιλέγουμε τυχόντα $x_1, x_2 \in (a,b)$ με $x_1 < \xi < x_2$. Ψπάρχει $t \in (0,1)$ ώστε $\xi = (1-t)x_1 + tx_2$. Η f είναι κυρτή, άρα

$$f(\xi) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \leq (1-t)f(\xi) + tf(\xi) = f(\xi).$$

Αναγκαστικά, $f(x_1) = f(x_2) = f(\xi)$ (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι $f(x) = f(\xi)$ για κάθε $x \in (a,b)$ (δηλαδή, η f είναι σταθερή).

(β) Υποθέτουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο ξ. Έστω $a < x < y < \xi$. Υπάρχει $t \in (0,1)$ ώστε $y = (1-t)x + t\xi$. Η f είναι κυρτή και $f(\xi) \leq f(y)$, άρα

$$f(y) \leq (1-t)f(x) + tf(\xi) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

άρα $(1-t)f(y) \leq (1-t)f(x)$. Αφού $0 < 1-t < 1$, συμπεραίνουμε ότι $f(y) \leq f(x)$. Αυτό δείχνει ότι η f είναι φθίνουσα στο (a,ξ). Με τον ίδιο τρόπο ελέγχουμε ότι η f είναι αύξουσα στο (ξ,b).

(γ) Υποθέτουμε ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο ξ. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(\xi - 2\delta, \xi + 2\delta) \subset (a,b)$ και $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in (\xi - 2\delta, \xi + 2\delta)$.

Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $y \in (\xi, b)$ ισχύει $f(y) < f(\xi)$. Αναγκαστικά, έχουμε $y \geq \xi + 2\delta$. Υπάρχει $t \in (0,1)$ ώστε $\xi + \delta = (1-t)\xi + ty$. Από την κυρτότητα της f παίρνουμε

$$f(\xi) \leq f(\xi + \delta) \leq (1-t)f(\xi) + tf(y) < f(\xi)$$

το οποίο είναι άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι για κάποιο $y \in (a,\xi)$ ισχύει $f(y) < f(\xi)$, καταλήγουμε σε άτοπο με τον ίδιο τρόπο. Άρα, η f έχει ολικό ελάχιστο στο ξ.

(δ) Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως κυρτή. Έστω ότι η f έχει ολικό ελάχιστο m στα $x < y$. Τότε,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{m+m}{2} = m$$

από την γνήσια κυρτότητα της f. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα η f έχει το πολύ ένα σημείο ολικού ελαχίστου.

7. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν η f είναι άνω φραγμένη, τότε είναι σταθερή.*

Υπόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή. Υπάρχουν $x \neq y$ στο $\mathbb{R}$ με $f(x) < f(y)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) $x < y$: Έστω $z > y$. Τότε,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y},$$

δηλαδή

$$f(z) \geq A(z) := f(y) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-y).$$

Παρατηρήστε ότι $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$, άρα $\lim\limits_{z\to+\infty} A(z) = +\infty$. Έπεται ότι η f δεν είναι άνω φραγμένη.

(β) $y < x$: Έστω $z < y$. Τότε,

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y},$$

δηλαδή

$$f(z) \geq B(z) := f(y) - \frac{f(x)-f(y)}{x-y}(y-z).$$

Παρατηρήστε ότι $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0$, άρα $\lim\limits_{z\to-\infty} B(z) = +\infty$. Έπεται ότι η f δεν είναι άνω φραγμένη.

8. *Δείξτε ότι κάθε κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε φραγμένο διάστημα είναι κάτω φραγμένη.*

Υπόδειξη. Έστω I ένα φραγμένο διάστημα και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Θεωρούμε τυχόντα $a < b$ στο εσωτερικό του I. Ορίζουμε $g : I \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Η g είναι γραμμική και συμπίπτει με την f στα a και b. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η g είναι κάτω φραγμένη στο I: υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x) \geq m$ για κάθε $x \in I$.

(ii) Αν $x \in I$ και $x < a$ ή $x > b$, τότε $f(x) \geq g(x) \geq m$.

(iii) Η f παίρνει ελάχιστη τιμή m' στο $[a, b]$.

(iv) Η f είναι κάτω φραγμένη στο I: για κάθε $x \in I$ ισχύει η $f(x) \geq \min\{m, m'\}$.

9. *Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ κοίλη, αύξουσα, άνω φραγμένη και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\lim_{x\to+\infty} x f'(x) = 0.$$

Υπόδειξη. Η f είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \right) = 0.$$

Για κάθε $x > 0$ εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x/2, x]$: υπάρχει $\xi_x \in (x/2, x)$ ώστε

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = f'(\xi_x)\frac{x}{2}.$$

Αφού η f είναι κοίλη, η f' είναι φθίνουσα (και μη αρνητική, γιατί η f είναι αύξουσα). Άρα,

$$f'(\xi_x) \geq f'(x) \geq 0.$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις βλέπουμε ότι

$$0 \leq xf'(x) \leq 2\left(f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right) \to 0.$$

Άρα, $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

Ομάδα Β΄

10. *Δείξτε ότι αν η $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και $x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_m > 0$, τότε*

$$(x_1+\cdots+x_m)f\left(\frac{y_1+\cdots+y_m}{x_1+\cdots+x_m}\right) \leq \sum_{i=1}^m x_i f\left(\frac{y_i}{x_i}\right).$$

Δείξτε ότι η $f(x) = (1+x^p)^{1/p}$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ όταν $p \geq 1$, και συμπεράνατε ότι

$$((x_1+\cdots+x_m)^p + (y_1+\cdots+y_m)^p)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^m (x_i^p + y_i^p)^{1/p}.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $S = x_1+\cdots+x_m$ και εφαρμόζουμε την ανισότητα του Jensen ως εξής: αφού η f είναι κυρτή και

$$\frac{y_1+\cdots+y_m}{S} = \frac{x_1}{S}\frac{y_1}{x_1} + \cdots + \frac{x_m}{S}\frac{y_m}{x_m},$$

παίρνουμε

$$f\left(\frac{y_1+\cdots+y_m}{x_1+\cdots+x_m}\right) = f\left(\frac{y_1+\cdots+y_m}{S}\right) \leq \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{S} f\left(\frac{y_i}{x_i}\right).$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη αυτής της ανισότητας επί S παίρνουμε το ζητούμενο.

Έστω $p \geq 1$. Τότε, η $f(x) = (1+x^p)^{1/p}$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$: αυτό προκύπτει αν παραγωγίσουμε δύο φορές. Έχουμε $f'(x) = x^{p-1}(1+x^p)^{\frac{1}{p}-1}$ και

$$f''(x) = (p-1)x^{p-2}(1+x^p)^{\frac{1}{p}-1} - (p-1)x^{2p-2}(1+x^p)^{\frac{1}{p}-2} = (p-1)x^{p-2}(1+x^p)^{\frac{1}{p}-2} \geq 0.$$

Παρατηρούμε ότι

$$((x_1+\cdots+x_m)^p + (y_1+\cdots+y_m)^p)^{1/p} = (x_1+\cdots+x_m)f\left(\frac{y_1+\cdots+y_m}{x_1+\cdots+x_m}\right).$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα του πρώτου ερωτήματος βλέπουμε ότι η τελευταία ποσότητα φράσσεται από

$$\sum_{i=1}^m x_i f\left(\frac{y_i}{x_i}\right) = \sum_{i=1}^m x_i \left(1+\frac{y_i^p}{x_i^p}\right)^{1/p} = \sum_{i=1}^m (x_i^p + y_i^p)^{1/p}.$$

11. *Δείξτε ότι η συνάρτηση* $-\sin x$ *είναι κυρτή στο* $[0,\pi]$. *Χρησιμοποιώντας το δείξτε ότι η μέγιστη περίμετρος* n*-γώνου που εγγράφεται στο μοναδιαίο κύκλο είναι* $2n\sin(\pi/n)$.

Υπόδειξη. Έχουμε $(-\sin x)'' = \sin x \geq 0$ στο $[0,\pi]$, άρα η $f(x) = -\sin x$ είναι κυρτή στο $[0,\pi]$.

Έστω T ένα n-γωνο που εγγράφεται στο μοναδιαίο κύκλο. Αν $\phi_1,\dots,\phi_n$ είναι οι επίκεντρες γωνίες που αντιστοιχούν στις πλευρές του και $\ell_1,\dots,\ell_n$ είναι τα μήκη των πλευρών του, τότε

$$\ell_i = 2\sin\frac{\phi_i}{2} \quad \text{για κάθε } i = 1,\dots,n.$$

Άρα, η περίμετρος P του T ισούται με

$$P = 2\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\phi_i}{2}.$$

Όμως, $\sum_{i=1}^{n}\phi_i = 2\pi$, άρα $\sum_{i=1}^{n}\frac{\phi_i}{2} = \pi$. Η $g(x) = -\sin x$ είναι κυρτή στο $[0,\pi]$ και $\phi_i/2 \in [0,\pi]$ για κάθε $i = 1,\dots,n$. Από την ανισότητα του Jensen,

$$-\sin\left(\frac{1}{n}\frac{\phi_1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\frac{\phi_n}{2}\right) \leq -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{\phi_i}{2},$$

δηλαδή,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\phi_i}{2} \leq \sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right).$$

Άρα,

$$P = 2\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\phi_i}{2} \leq 2n\sin\frac{\pi}{n}.$$

12. *Έστω* $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ *θετικοί αριθμοί. Δείξτε ότι*

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_n) \geq \left(1+(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)^{1/n}\right)^n.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $x_i = \ln\alpha_i$ $(i = 1,\dots,n)$. Για να δείξουμε την

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_n) \geq \left(1+(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)^{1/n}\right)^n$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(1+e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}}\right)^n \leq (1+e^{x_1})(1+e^{x_2})\cdots(1+e^{x_n}),$$

ή, ισοδύναμα,

$$\ln\left(1+e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+e^{x_i}).$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα του Jensen, αν δείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln(1+e^x)$ είναι κυρτή. Παρατηρήστε ότι $g'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ και $g''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \geq 0$. Έπεται το ζητούμενο.

Ομάδα Γ′

13. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ θετική κοίλη συνάρτηση. Δείξτε ότι η $1/f$ είναι κυρτή.*

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in I$ και έστω $t \in (0,1)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\frac{1-t}{f(x)} + \frac{t}{f(y)} - \frac{1}{f((1-t)x+ty)} = \frac{(1-t)f(y)+tf(x)}{f(x)f(y)} - \frac{1}{f((1-t)x+ty)} \geq 0,$$

η οποία ισχύει αν και μόνο αν

$$A := f((1-t)x+ty)\cdot((1-t)f(y)+tf(x)) \geq f(x)f(y).$$

Αφού η f είναι κοίλη, έχουμε

$$\begin{aligned} A &\geq ((1-t)f(x)+tf(y))((1-t)f(y)+tf(x)) \\ &= [(1-t)^2+t^2]f(x)f(y)+t(1-t)[f^2(y)+f^2(x)] \\ &\geq [(1-t)^2+t^2]f(x)f(y)+t(1-t)\cdot 2f(x)f(y) \\ &= f(x)f(y), \end{aligned}$$

όπου, στο προτελευταίο βήμα, χρησιμοποιήσαμε την $a^2+b^2 \geq 2ab$.

Άλλος τρόπος: Έχουμε $\frac{1}{f} = \exp\left(\ln\frac{1}{f}\right)$. Αφού η exp είναι κυρτή και αύξουσα, αρκεί να δείξουμε ότι η $\ln\frac{1}{f}$ είναι κυρτή (Άσκηση 4). Όμως, $\ln\frac{1}{f} = -\ln f$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η $\ln f$ είναι κοίλη. Αφού η f είναι κοίλη και η ln είναι κοίλη και αύξουσα, επιχείρημα όμοιο με αυτό της Άσκησης 4 δείχνει ότι η $\ln f$ είναι κοίλη.

14. *Έστω $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $k \geq 1$,*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx \geq 0.$$

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx &= \frac{1}{k}\int_0^{2k\pi} f\left(\frac{y}{k}\right)\cos y\,dy \\ &= \frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\int_{2m\pi}^{2m\pi+2\pi} f\left(\frac{y}{k}\right)\cos y\,dy \\ &= \frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{y+2m\pi}{k}\right)\cos y\,dy. \end{aligned}$$

Για κάθε $m = 0, \ldots, k-1$, η συνάρτηση $g_m(y) = f\left(\frac{y+2m\pi}{k}\right)$ είναι κυρτή στο $[0,2\pi]$ (εξηγήστε γιατί). Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν $g : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ είναι μια κυρτή συνάρτηση τότε $\int_0^{2\pi} g(x)\cos x\,dx \geq 0$ (το ζητούμενο, για $k=1$). Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} g(x)\cos x\,dx &= \int_0^{\pi/2} g(x)\cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} g(x)\cos x\,dx \\ &\quad + \int_{\pi}^{3\pi/2} g(x)\cos x\,dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} g(x)\cos x\,dx. \end{aligned}$$

Κάνοντας τις αλλαγές μεταβλητής $y = \pi - x$, $z = x - \pi$, $w = 2\pi - x$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{\pi} g(x)\cos x\,dx &= -\int_0^{\pi/2} g(\pi - y)\cos y\,dy \\
\int_{\pi}^{3\pi/2} g(x)\cos x\,dx &= -\int_0^{\pi/2} g(z + \pi)\cos z\,dz \\
\int_{3\pi/2}^{2\pi} g(x)\cos x\,dx &= \int_0^{\pi/2} g(2\pi - w)\cos w\,dw,
\end{aligned}$$

άρα

$$\int_0^{2\pi} g(x)\cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} [g(x) - g(\pi - x) - g(\pi + x) + g(2\pi - x)]\cos x\,dx.$$

Αν $0 \le x \le \pi/2$ τότε $x \le \pi - x \le \pi + x \le 2\pi - x$. Η g είναι κυρτή, άρα

$$\frac{g(\pi - x) - g(x)}{(\pi - x) - x} \le \frac{g(2\pi - x) - g(\pi + x)}{(2\pi - x) - (\pi + x)}.$$

Όμως, $(\pi - x) - x = \pi - 2x = (2\pi - x) - (\pi + x)$. Άρα,

$$g(x) - g(\pi - x) - g(\pi + x) + g(2\pi - x) \ge 0.$$

Αφού $\cos x \ge 0$ στο $[0, \pi/2]$, έπεται ότι $\int_0^{2\pi} g(x)\cos x\,dx \ge 0$.

15. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν*

$$f(x) \le \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x + t)dt$$

για κάθε διάστημα $[x - h, x + h] \subset (a, b)$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι κυρτή. Έστω $x \in (a, b)$ και $h > 0$ για το οποίο $[x - h, x + h] \subset (a, b)$. Για κάθε $t \in [0, h]$ έχουμε

$$f(x) \le \frac{f(x + t) + f(x - t)}{2}$$

από την κυρτότητα της f. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{h} f(x + t)dt &= \int_0^h f(x + t)\,dt + \int_0^h f(x - t)\,dt \\
&= \int_0^h (f(x + t) + f(x - t))\,dt \\
&\ge \int_0^h 2f(x)\,dt \\
&= 2hf(x).
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$(*) \qquad f(x) \le \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x + t)\,dt.$$

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την $(*)$ για κάθε διάστημα $[x-h, x+h] \subset (a, b)$. Έστω $[x, y] \subset (a, b)$. Η f παίρνει μέγιστη τιμή στο $[x, y]$ (λόγω συνέχειας). Ας υποθέσουμε ότι αυτή η μέγιστη τιμή δεν πιάνεται σε κάποιο από τα x ή y. Δηλαδή, υπάρχει $c \in (x, y)$ ώστε $f(z) \leq f(c)$ για κάθε $z \in [x, y]$ και $\max\{f(x), f(y)\} < f(c)$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $h = c - x \leq y - c$. Τότε, η μέγιστη τιμή της f στο $[c-h, c+h]$ παίρνεται στο σημείο c και $f(c-h) = f(x) < f(c)$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[c-h, c+h]$, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-h}^{h} f(c+t)\,dt < 2h \cdot f(c).$$

Τότε, η υπόθεση $(*)$ οδηγεί σε άτοπο: έχουμε

$$f(c) \leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(c+t)\,dt < f(c).$$

Έχουμε λοιπόν δείξει το εξής:

> *Ισχυρισμός.* Αν η συνεχής συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την $(*)$ για κάθε διάστημα $[x-h, x+h] \subset (a, b)$, τότε για κάθε διάστημα $[x, y] \subset (a, b)$ η μέγιστη τιμή της f στο $[x, y]$ παίρνεται σε κάποιο από τα άκρα του $[x, y]$.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θα δείξουμε ότι η f είναι κυρτή. Έστω $x < y$ στο (a, b). Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση $\ell : (a, b) \to \mathbb{R}$ που συμπίπτει με την f στα x και y. Δηλαδή,

$$\ell(z) = f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x).$$

Παρατηρήστε ότι

$$\ell(z) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \ell(z+t)\,dt$$

για κάθε $z \in (a, b)$ και $[z-h, z+h] \subset (a, b)$. Άρα, η συνάρτηση $g := f - \ell$ ικανοποιεί την

$$g(z) \leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} g(z+t)\,dt$$

για κάθε $z \in (a, b)$ και $[z-h, z+h] \subset (a, b)$. Από τον ισχυρισμό, η g παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $[x, y]$ σε κάποιο από τα x, y. Όμως, $g(x) = f(x) - \ell(x) = 0$ και, όμοια, $g(y) = 0$. Άρα, $f(z) \leq \ell(z)$ για κάθε $z \in [x, y]$. Ισοδύναμα, για κάθε $t \in [0, 1]$ έχουμε

$$f((1-t)x + ty) \leq f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}[t(y - x)] = (1-t)f(x) + tf(y).$$

Αφού τα $x, y \in (a, b)$ και $t \in [0, 1]$ ήταν τυχόντα, η f είναι κυρτή.

16. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $c \in (a, b)$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο c αν και μόνο αν*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h} = 0.$$

Υπόδειξη. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο c, τότε

$$f'(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} = -\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c-h)-f(c)}{h},$$

άρα

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} + \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c-h)-f(c)}{h} = 0.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι

$$(*) \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h} = 0.$$

Αφού η f είναι κυρτή, υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι

$$f'_+(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \quad \text{και} \quad f'_-(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c-h)-f(c)}{-h}.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$f'_+(c) - f'_-(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h}.$$

Από την $(*)$, το τελευταίο όριο είναι ίσο με 0. Άρα, $f'_+(c) = f'_-(c)$. Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο c.

17. *Έστω $f : [0,+\infty)$ κυρτή, μη αρνητική συνάρτηση με $f(0)=0$. Ορίζουμε $F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $F(0)=0$ και*

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Δείξτε ότι η F είναι κυρτή.

Υπόδειξη. Έστω $x>0$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = xs$ βλέπουμε ότι

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(xs)\,ds.$$

Έστω $x,y>0$ και $t\in[0,1]$. Από την κυρτότητα της f έχουμε

$$f([(1-t)x+ty]s) \leq (1-t)f(xs) + tf(ys)$$

για κάθε $s\in[0,1]$. Άρα,

$$\begin{aligned} F((1-t)x+ty) &= \int_0^1 f([(1-t)x+ty]s)\,ds \\ &\leq (1-t)\int_0^1 f(xs)\,ds + t\int_0^1 f(ys)\,ds \\ &= (1-t)F(x) + tF(y). \end{aligned}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας τις $f(0) = 0$ και $F(0) = 0$ βλέπουμε ότι: για κάθε $x > 0$ και για κάθε $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} F((1-t)0 + tx) &= \int_0^1 f([(1-t)0 + tx]s)\, ds \\ &\leq (1-t)\int_0^1 f(0)\, ds + t\int_0^1 f(xs)\, ds \\ &= tF(x) = (1-t)F(0) + tF(x). \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι η F είναι κυρτή.