Κεφάλαιο 6

Τεχνικές Ολοκλήρωσης

Ομάδα Α΄

1. *Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:*

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+2}dx\ , \qquad \int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}dx\ , \qquad \int \frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}dx.$$

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{2x}{(x+1)^2+1}\,dx$$

και χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $y = x+1$.

(β) Ανάλυση σε απλά κλάσματα. Ζητάμε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

Ελέγξτε ότι $a = 1$, $b = 1$ και $c = 1$.

(γ) Παρατηρούμε ότι $x^3+2x^2+2x+1 = (x+1)(x^2+x+1)$ και κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα.

2. *Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:*

$$\int \frac{dx}{x^4+1}\ , \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\ , \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\ , \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\ .$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $x^4+1 = (x^2+1)^2-2x^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ και κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(β) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt[6]{x}$ προκύπτει το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{6u^5}{u^3+u^2}\,du = \int \frac{6u^3}{u+1}\,du$$

το οποίο υπολογίζεται εύκολα (μπορείτε να κάνετε τη νέα αντικατάσταση $y = u+1$).

(γ) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{x^2-1}$ έχουμε $\frac{dx}{x} = \frac{u\,du}{u^2+1}$, οπότε προκύπτει το ολοκλήρωμα
$$\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan(\sqrt{x^2-1}) + c.$$
(δ) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{1+e^x}$ έχουμε $du = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\,dx = \frac{u^2-1}{2u}\,dx$, οπότε προκύπτει το ολοκλήρωμα $\int \frac{2du}{u^2-1}$, το οποίο υπολογίζεται εύκολα με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

3. *Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:*
$$\int \cos^3 x\,dx\ , \quad \int \cos^2 x \sin^3 x\,dx\ , \quad \int \tan^2 x\,dx\ , \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x}\ , \quad \int \sqrt{\tan x}\,dx\ .$$

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε
$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)(\sin x)'dx$$
και θέτουμε $u = \sin x$.
(β) Γράφουμε
$$\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx = \int \cos^2 x(1-\cos^2 x)(-1)(\cos x)'dx$$
και θέτουμε $u = \cos x$.
(γ) Γράφουμε
$$\int \tan^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \tan x - x + c.$$
(δ) Γράφουμε
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^4 x}dx &= \int (\tan x)' \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' dx \\ &= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int \tan x \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int \frac{2(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x}\,dx \\ &= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx + 2\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx.\end{aligned}$$
Έπεται ότι
$$3\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} + 2\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} + \tan x + c.$$
(ε) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{\tan x}$ παίρνουμε
$$du = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}}(\tan^2 x + 1)\,dx = \frac{u^4+1}{2u}\,dx,$$
οπότε θεωρούμε το
$$\int \frac{2u^2}{u^4+1}\,du,$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

4. *Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, δείξτε ότι: για κάθε* $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} \ .$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} &= \int (x)' \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\, dx \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\, dx \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx - 2n \int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\, dx \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

5. *Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:*

$$\int \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2-1)}\, dx \ , \qquad \int \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\, dx \ , \qquad \int x \log x\, dx$$

$$\int x \cos x\, dx \ , \qquad \int e^x \sin x\, dx \ , \qquad \int x \sin^2 x\, dx$$

$$\int \log(x+\sqrt{x})\, dx \ , \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx \ , \qquad \int \frac{x+4}{(x^2+1)(x-1)}\, dx$$

$$\int \frac{x}{1+\sin x}\, dx \ , \qquad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\, dx \ , \qquad \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} \ .$$

Υπόδειξη. (α) Ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(β) Ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(γ) Ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int x \log x\, dx = \frac{1}{2}\int (x^2)' \log x\, dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} + c.$$

(δ) Ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int x \cos x\, dx = \int x (\sin x)'\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + c.$$

(ε) Ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned} I = \int e^x \sin x\, dx &= \int (e^x)' \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx \\ &= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x (\cos x)' dx \\ &= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x) - I. \end{aligned}$$

Έπεται ότι
$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + c.$$
(στ) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ παίρνουμε
$$\int x\sin^2 x\,dx = \int \frac{x}{2}\,dx - \int x\frac{\cos(2x)}{2}\,dx.$$
Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $u = 2x$ και ολοκλήρωση κατά μέρη όπως στο (δ).

(ζ) Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε
$$\int \log(x+\sqrt{x})\,dx = \int (x)'\log(x+\sqrt{x})\,dx = x\log(x+\sqrt{x}) - \int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.$$
Κατόπιν, εφαρμόστε την αντικατάσταση $u = \sqrt{x}$.

(η) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{1-x^2}$ βλέπουμε ότι $\frac{dx}{x} = \frac{udu}{u^2-1}$, οπότε καταλήγουμε στο
$$\int \frac{1}{u^2-1}\,du$$
το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(ϑ) Ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(ι) Θέτουμε $y = \tan\frac{x}{2}$. Ελέγξτε ότι $dx = \frac{2}{1+y^2}dy$ και $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$. Αναγόμαστε έτσι στο ολοκλήρωμα
$$\begin{aligned}\int 2\arctan y\frac{1}{1+\frac{2y}{1+y^2}}\frac{2}{1+y^2}\,dy &= 4\int \arctan y\frac{1}{(1+y)^2}\,dy\\ &= 4\int \arctan y\left(-\frac{1}{1+y}\right)'dy\\ &= -4\frac{\arctan y}{1+y} + 4\int \frac{1}{(1+y^2)(1+y)}\,dy.\end{aligned}$$
Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(κ) Γράφουμε
$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}(\sin x)'dx$$
και κάνουμε την αντικατάσταση $u = \sin x$.

(λ) Αντικατάσταση $y = x+1$.

6. *Υπολογίστε τα ολοκληρώματα*
$$\int \sin(\log x)\,dx\ , \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}}\log(1-x)\,dx.$$

Υπόδειξη. (α) Αν θέσουμε $u = \log x$, τότε $dx = e^u du$ και καταλήγουμε στο ολοκλήρωμα
$$\int e^u \sin u\,du,$$

το οποίο υπολογίζεται με ολοκλήρωση κατά μέρη.
(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\log(1-x)\,dx &= -2\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'\log(1-x)\,dx\\ &= -\frac{2\log(1-x)}{\sqrt{x}} - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{1-x}\,dx.\end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αντικατάσταση $u=\sqrt{x}$.

7. *Υπολογίστε τα ολοκληρώματα*

$$\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx\ , \qquad \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx.$$

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx &= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\arctan x\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\frac{\arctan x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx.\end{aligned}$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε τον αναγωγικό τύπο της Άσκησης 4.
(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx &= -\int\left(\frac{1}{1+x}\right)' xe^x\,dx\\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x}(xe^x)'dx\\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x}(1+x)e^x\,dx\\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + c.\end{aligned}$$

8. *Υπολογίστε τα ολοκληρώματα*

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx\ , \qquad \int \frac{\log(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx.$$

Υπόδειξη. (α) Με την αντικατάσταση $u=e^x$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης.
(β) Με την αντικατάσταση $u=\tan x$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int \log u\,du = u\log u - u + c.$$

9. *Υπολογίστε τα ολοκληρώματα*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx \quad , \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}dx$$

$$\int_0^5 x\log\left(\sqrt{1+x^2}\right)\,dx \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\,dx.$$

Υπόδειξη. Υπολογίστε πρώτα τα αόριστα ολοκληρώματα:
(α) Γράφουμε

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx = x\tan x - \int \tan x\, dx = x\tan x + \log(\cos x) + c.$$

(β) Γράφουμε

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^6 x}\, dx$$

και κάνουμε την αντικατάσταση $u = \cos x$.
(γ) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{1+x^2}$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int u\log u\, du,$$

το οποίο υπολογίζεται με ολοκλήρωση κατά μέρη.
(δ) Γράφουμε

$$\int x\tan^2 x\, dx = \int x\frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int x\, dx.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίστηκε στο (α).

10. *Υπολογίστε τα ακόλουθα εμβαδά:*

(α) *Του χωρίου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$ και από τον x-άξονα.*

(β) *Του χωρίου που φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \cos x$ και $g(x) = \sin x$ στο διάστημα $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.*

Υπόδειξη. (α) Το εμβαδόν είναι ίσο με

$$\int_0^2 \sqrt{x}\, dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\, dx.$$

Εξηγήστε γιατί και υπολογίστε το.
(β) Το εμβαδόν είναι ίσο με

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\, dx.$$

Εξηγήστε γιατί και υπολογίστε το.

Ομάδα Β΄

11. *Υπολογίστε τα ολοκληρώματα*

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\, dx\ , \quad \int \frac{1}{\sin x}\, dx\ , \quad \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx\ , \quad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx\ , \quad \int x\arctan x\, dx\ , \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx\ , \quad \int \sqrt{x^2-1}\, dx.$$

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $y = \tan \frac{x}{2}$. Ελέγξτε ότι $dx = \frac{2}{1+y^2}dy$, $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ και $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$. Αναγόμαστε έτσι στο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{(1+y)^2}{y^2(1+y^2)}\, dy,$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(β) Γράφουμε

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\, dx$$

και κάνοντας την αντικατάσταση $u = \cos x$ αναγόμαστε στο $\int \frac{1}{u^2-1}\, du$, το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(γ) Με την αντικατάσταση $u = x^2 + 1$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u} + c.$$

(δ) Με την αντικατάσταση $x = \sin u$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{1}{\sin u}\, du,$$

το οποίο υπολογίστηκε στο (β).

(ε) Χρησιμοποιούμε τον αναγωγικό τύπο της Άσκησης 4.

(στ) Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\int x \arctan x\, dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + c.$$

Για την τελευταία ισότητα παρατηρήστε ότι

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\, dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx.$$

(ζ) Με την αντικατάσταση $u = x^2 + 1$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + c.$$

(η) Θέτουμε $x^2 - 1 = (x-t)^2$. Ισοδύναμα, $x = \frac{t^2+1}{2t}$. Τότε, $dx = \frac{t^2-1}{2t^2}\, dt$ και $x - t = \frac{1-t^2}{2t}$, οπότε αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{-(t^2-1)^2}{4t^3}\, dt.$$

12. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

Υπόδειξη. Με την αντικατάσταση $y = \pi - x$ παίρνουμε

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - y)\sin y}{1+\cos^2 y}\, dy = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}\, dy - I,$$

δηλαδή

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}\, dy.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αντικατάσταση $u = \cos y$.

13. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx.$$

Υπόδειξη. Η αντικατάσταση $y = \frac{\pi}{2} - x$ δίνει (εξηγήστε γιατί)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos y}{\cos y + \sin y}\, dy = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx.$$

Αφού

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

14. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan x)\, dx.$$

Υπόδειξη. Η αντικατάσταση $y = \frac{\pi}{4} - x$ δίνει

$$I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\, dx = \int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan(\pi/4 - y))\, dy.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \frac{1 - \tan y}{1 + \tan y},$$

άρα,

$$1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \frac{2}{1 + \tan y}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\, dx &= \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1+\tan y}\right) dy \\ &= \int_0^{\pi/4} \left(\log 2 - \log(1+\tan y)\right) dy \\ &= \frac{\pi(\log 2)}{4} - I. \end{aligned}$$

Έπεται ότι
$$I = \frac{\pi(\log 2)}{8}.$$

15. *Δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα*
$$\int_0^\infty x^p dx$$
δεν είναι πεπερασμένο για κανένα $p \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις: αν $p > -1$ τότε
$$\int_1^\infty x^p dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M x^p dx = \lim_{M\to+\infty} \frac{M^{p+1}-1}{p+1} = +\infty.$$
Αν $p < -1$ τότε
$$\int_0^1 x^p dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^1 x^p dx = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1-\delta^{p+1}}{p+1} = +\infty.$$
Τέλος, αν $p = -1$ τότε
$$\int_1^\infty x^p dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M\to+\infty} \log M = +\infty.$$
Σε κάθε περίπτωση, έπεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty x^p dx$ απειρίζεται.

16. *Υπολογίστε τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα:*
$$\int_0^\infty xe^{-x^2} dx \ , \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \ , \quad \int_0^1 \log x \, dx \ .$$

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $M > 0$ έχουμε
$$\int_0^M xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^M = \frac{1-e^{-M^2}}{2}.$$
Έπεται ότι
$$\int_0^\infty xe^{-x^2} dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M xe^{-x^2} dx = \lim_{M\to\infty} \frac{1-e^{-M^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$
(β) Για κάθε $s \in (0,1)$ έχουμε
$$\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^s = \arcsin s - \arcsin 0 = \arcsin s.$$
Έπεται ότι
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{s\to 1^-} \int_0^s \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{s\to 1^-} \arcsin s = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$
Λόγω συμμετρίας,
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

(γ) Για κάθε $\delta \in (0,1)$ έχουμε

$$\int_\delta^1 \log x\, dx = x \log x - x\Big|_\delta^1 = -1 - \delta \log \delta + \delta.$$

Έπεται ότι

$$\int_0^1 \log x\, dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^1 \log x\, dx = \lim_{\delta\to 0^+} (-\delta\log\delta + \delta - 1) = -1.$$

17. *Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n!$$

Υπόδειξη. Με επαγωγή: για $n = 0$ έχουμε

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$$

Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε, για κάθε $M > 0$ έχουμε

$$\int_0^M e^{-x}x^n dx = \int_0^M (-e^{-x})' x^n dx = -e^{-x}x^n\Big|_0^M + n\int_0^M e^{-x}x^{n-1}dx.$$

Αφήνοντας το $M \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$I_n = \int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = nI_{n-1}.$$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι $I_{n-1} = (n-1)!$, τότε $I_n = n\cdot (n-1)! = n!$.

18. *Βρείτε τα όρια*

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x^6}\int_0^{x^3} e^{t^2}dt\ , \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} e^t \sin t\, dt.$$

Υπόδειξη. (α) Με την αντικατάσταση $y = x^3$ βλέπουμε ότι αρκεί να υπολογίσουμε το

$$\lim_{y\to+\infty} ye^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}dt.$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του L' Hospital:

$$\frac{\left(\int_0^y e^{t^2}dt\right)'}{(e^{y^2}/y)'} = \frac{e^{y^2}}{2e^{y^2} - e^{y^2}/y^2} = \frac{1}{2 - y^{-2}} \to \frac{1}{2}$$

όταν $y \to +\infty$. Άρα,

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x^6}\int_0^{x^3} e^{t^2}dt = \frac{1}{2}.$$

(α) Με την αντικατάσταση $y = x^2$ βλέπουμε ότι αρκεί να υπολογίσουμε το

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^2}\int_0^y e^t \sin t\, dt.$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του L' Hospital:

$$\frac{\left(\int_0^y e^t \sin t\, dt\right)'}{(y^2)'} = \frac{e^y \sin y}{2y} \to \frac{1}{2}$$

όταν $y \to 0^+$. Άρα,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} e^t \sin t\, dt = \frac{1}{2}.$$