Κεφάλαιο 5

Παράγωγος και Ολοκλήρωμα

Ομάδα Α΄

1. *Έστω* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει* $s \in [a,b]$ *ώστε*

$$\int_a^s f(t)dt = \int_s^b f(t)dt.$$

Μπορούμε πάντα να επιλέγουμε ένα τέτοιο s *στο ανοικτό διάστημα* (a,b)*;*

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_a^s f(t)dt - \int_s^b f(t)dt = \int_a^s f(t)dt - \left(\int_a^b f(t)dt - \int_a^s f(t)dt \right) \\ &= 2\int_a^s f(t)dt - \int_a^b f(t)dt. \end{aligned}$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, η g είναι συνεχής. Παρατηρήστε ότι

$$g(a) = -\int_a^b f(t)dt \qquad \text{και} \qquad g(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

Αφού $g(a)g(b) = -\left(\int_a^b f(t)dt \right)^2 \leq 0$, υπάρχει $s \in [a,b]$ ώστε $g(s) = 0$. Για κάθε τέτοιο s ισχύει η

$$\int_a^s f(t)dt = \int_s^b f(t)dt.$$

Μπορούμε να επιλέξουμε ένα τέτοιο s στο ανοικτό διάστημα (a,b) αν $\int_a^b f(t)dt \neq 0$ (εξηγήστε γιατί). Αν όμως πάρετε την $f(x) = x$ στο $[-1,1]$, τότε τα μόνα σημεία $s \in [-1,1]$ για τα οποία $g(s) = 0$ είναι τα $s = \pm 1$ (σε αυτό το παράδειγμα, το ολοκλήρωμα της f στο $[-1,1]$ ισούται με μηδέν).

2. *Έστω* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη και θετική συνάρτηση ώστε* $\int_0^1 f(x)dx = 1$*. Δείξτε ότι για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *υπάρχει διαμέριση* $\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ *ώστε* $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = \frac{1}{n}$ *για κάθε* $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $F(t)=\int_0^t f(x)dx$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη και θετική, η F είναι συνεχής και αύξουσα στο $[0,1]$. Αφού $\int_0^1 f(x)dx=1$, έχουμε $F(0)=0$ και $F(1)=1$.

Έστω $n\in\mathbb{N}$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, για κάθε $k=1,\dots,n-1$ υπάρχει $t_k\in[0,1]$ ώστε $F(t_k)=\frac{k}{n}$. Θέτουμε $t_0=0$ και $t_n=1$: τότε $F(t_0)=0=\frac{0}{n}$ και $F(t_n)=1=\frac{n}{n}$. Παρατηρήστε ότι $t_k<t_{k+1}$ για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$. Αν για κάποιο k είχαμε $t_k\geq t_{k+1}$, τότε θα παίρναμε

$$\frac{k}{n}=\int_0^{t_k} f(x)dx=\int_0^{t_{k+1}} f(x)dx+\int_{t_{k+1}}^{t_k} f(x)dx\geq\int_0^{t_{k+1}} f(x)dx=\frac{k+1}{n},$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ και

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx=\int_0^{t_{k+1}} f(x)dx-\int_0^{t_k} f(x)dx=\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}=\frac{1}{n}$$

για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$.

3. *Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s\in[0,1]$ ώστε*

$$\int_0^1 f(x)x^2dx=\frac{f(s)}{3}.$$

Υπόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, αν η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και η μη αρνητική συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $s\in[0,1]$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx=f(s)\int_0^1 g(x)dx.$$

Εφαρμόστε το παραπάνω για την $g(x)=x^2$.

4. *Υποθέτουμε ότι η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι*

$$\int_0^x f(t)dt=\int_x^1 f(t)dt$$

για κάθε $x\in[0,1]$. Δείξτε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση έπεται ότι

$$2\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt$$

για κάθε $x\in[0,1]$. Δηλαδή, η συνάρτηση $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ είναι σταθερή. Αφού η f είναι συνεχής, η F είναι παραγωγίσιμη και $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$. Αφού η F είναι σταθερή, έχουμε $F'\equiv 0$. Άρα, $f(x)=0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

5. *Έστω $f,h:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$. Υποθέτουμε ότι η h είναι συνεχής και η f είναι παραγωγίσιμη. Ορίζουμε*

$$F(x)=\int_0^{f(x)} h(t)dt.$$

Δείξτε ότι $F'(x) = h(f(x)) \cdot f'(x)$.

Υπόδειξη. Αφού η h είναι συνεχής, η συνάρτηση $G(y) = \int_0^y h(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και $G'(y) = h(y)$. Παρατηρήστε ότι $F(x) = G(f(x)) = (G \circ f)(x)$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$F'(x) = G'(f(x)) \cdot f'(x) = h(f(x)) \cdot f'(x).$$

6. *Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνεχής και έστω* $\delta > 0$. *Ορίζουμε*

$$g(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt.$$

Δείξτε ότι η g *είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την* g'.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$g(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt = \int_0^{x+\delta} f(t)dt - \int_0^{x-\delta} f(t)dt = H_1(x) - H_2(x),$$

όπου

$$H_1(x) = \int_0^{x+\delta} f(t)dt \qquad \text{και} \qquad H_2(x) = \int_0^{x-\delta} f(t)dt.$$

Το επιχείρημα της προηγούμενης Άσκησης δείχνει ότι οι H_1, H_2 είναι παραγωγίσιμες, $H_1'(x) = f(x+\delta)$ και $H_2'(x) = f(x-\delta)$ (αν $0 > x+\delta$ ή $0 > x-\delta$, το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει: θυμηθείτε τη σύμβαση $\int_b^a f = -\int_a^b f$). Έπεται ότι $g'(x) = f(x+\delta) - f(x-\delta)$.

7. *Έστω* $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ορίζουμε*

$$G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} t^2 dt.$$

Δείξτε ότι η G *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$ *και βρείτε την* G'.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} t^2 dt = \int_0^{g(x)} t^2 dt - \int_0^{h(x)} t^2 dt.$$

Αφού οι g, h είναι παραγωγίσιμες και η $f(t) = t^2$ είναι συνεχής, η G είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (δείτε τις προηγούμενες δύο Ασκήσεις) και $G'(x) = g^2(x)g'(x) - h^2(x)h'(x)$.

8. *Έστω* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε*

$$F(x) = \int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right) dt.$$

Βρείτε την F'.

Υπόδειξη. Θέτουμε $u = \frac{x}{t}$. Τότε, $dt = -\frac{x}{u^2}du$ και

$$F(x) = \int_x^1 -x\frac{\varphi(u)}{u^2}\,du = \int_1^x x\frac{\varphi(u)}{u^2}\,du = x\int_1^x \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du.$$

Άρα,

$$F'(x) = \int_1^x \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du + x\frac{\varphi(x)}{x^2} = \int_1^x \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du + \frac{\varphi(x)}{x}.$$

9. *Έστω $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι, για κάθε $x \in [0,a]$,*

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right) du.$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε τις συναρτήσεις

$$F(x) = \int_0^x f(u)(x-u)du = x\int_0^x f(u)du - \int_0^x f(u)u\,du$$

και

$$G(x) = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right) du = \int_0^x R(u)du,$$

όπου

$$R(u) = \int_0^u f(t)dt.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,a]$, το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού δείχνει ότι οι F, G και R είναι παραγωγίσιμες. Επίσης,

$$F'(x) = \int_0^x f(u)du + xf(x) - f(x)x = \int_0^x f(u)du$$

και

$$G'(x) = R(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x f(u)du.$$

Άρα,

$$(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = \int_0^x f(u)du - \int_0^x f(u)du = 0.$$

Έπεται ότι η $G - F$ είναι σταθερή στο $[0,a]$. Παρατηρώντας ότι $F(0) = G(0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι $G \equiv F$ στο $[0,a]$. Δηλαδή,

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right) du$$

για κάθε $x \in [0,a]$.

10. *Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$, δείξτε ότι*

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $k = 0, \ldots, n-1$, η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[x_k, x_{k+1}]$. Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (για τη συνεχή συνάρτηση f') έχουμε

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\,dx \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(x)|\,dx.$$

Άρα,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(x)|\,dx = \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

11. *Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $x > 0$,*

$$\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt = xf(x).$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $L, R : [0, +\infty) \to [0, \infty)$ με

$$L(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt \quad \text{και} \quad R(x) = xf(x).$$

Οι L, R είναι παραγωγίσιμες (εξηγήστε γιατί) και $L(0) = 0 = R(0)$. Παρατηρήστε ότι

$$L'(x) = f(x) + f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) = f(x) + xf'(x) = R'(x)$$

για κάθε $x \geq 0$. Έπεται ότι $L(x) = R(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

Ομάδα Β′

12. *Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει*

$$|f(x)| \leq \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Υπόδειξη. Η f' είναι συνεχής, άρα είναι ολοκληρώσιμη. Χρησιμοποιώντας την $f(0) = 0$, το δεύτερο θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού και την ανισότητα Cauchy-Schwarz, για κάθε $x \in [0, 1]$ γράφουμε

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(0)| = \left| \int_0^x f'(t)dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| \cdot 1\,dt \\ &\leq \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x 1^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \sqrt{x} \\ &\leq \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

13. *Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, η οποία ικανοποιεί την*

$$f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)dt$$

για κάθε $x \geq 0$. Δείξτε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \geq 0$.

Υπόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη, τότε παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της

$$(*) \qquad f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)dt$$

παίρνουμε

$$2f(x)f'(x) = 2f(x)$$

για κάθε $x > 0$, και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x) = 1$ για κάθε $x > 0$. Από την $(*)$ βλέπουμε (θέτοντας $x = 0$) ότι $f(0) = 0$, άρα

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x dt = x$$

για κάθε $x \geq 0$. Μένει να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Από την $(*)$ και την $f(x) \neq 0$ έχουμε: για κάθε $x > 0$ ισχύει $\int_0^x f(t)dt > 0$ και

$$f(x) = g(x) := \sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f(t)dt} \quad \text{ή} \quad f(x) = h(x) := -\sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f(t)dt}.$$

Αφού η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $(0,+\infty)$, το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής δείχνει ότι είτε $f \equiv g$ στο $[0,+\infty)$ ή $f \equiv h$ στο $[0,+\infty)$. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται, αφού η h παίρνει αρνητικές τιμές στο $(0,+\infty)$ και $\int_0^x f(t)dt > 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα,

$$f(x) = g(x) := \sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f(t)dt}$$

για κάθε $x \geq 0$. Αφού η f είναι συνεχής, έπεται ότι η g (δηλαδή, η f) είναι παραγωγίσιμη.

14. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)dx = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

Υπόδειξη. Αφού η f' είναι συνεχής, μπορούμε να εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cos(nx)dx &= \int_a^b f(x)\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)' dx \\ &= \frac{f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na)}{n} - \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)dx.\end{aligned}$$

Η f' είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα υπάρχει $M>0$ ώστε $|f'(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$. Έπεται ότι

$$\left|\frac{f(b)\sin(nb)-f(a)\sin(na)}{n}\right|\leq\frac{|f(a)|+|f(b)|}{n}\to 0$$

και

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)dx\right|\leq\frac{1}{n}\int_a^b|f'(x)|dx\leq\frac{M(b-a)}{n}\to 0$$

καθώς το $n\to\infty$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)dx=0,\quad \text{και όμοια,}\quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx=0.$$

15. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες*

$$a_n=\int_0^\pi\sin(nx)dx\quad\text{και}\quad b_n=\int_0^\pi|\sin(nx)|dx.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$a_n=\int_0^\pi\sin(nx)dx=\int_0^\pi\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)'dx=\frac{\cos 0-\cos(n\pi)}{n}.$$

Άρα, $|a_n|\leq 2/n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έπεται ότι $a_n\to 0$ καθώς το $n\to\infty$. Για την (b_n) κάνουμε την αντικατάσταση $y=nx$:

$$b_n=\int_0^\pi|\sin(nx)|\,dx=\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}|\sin y|\,dy.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin y|\,dy=\int_0^\pi|\sin y|\,dy$$

για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ (κάντε την αντικατάσταση $y=k\pi+u$). Άρα,

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{n}\int_0^{n\pi}|\sin y|\,dy=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin y|\,dy\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi|\sin y|\,dy=\int_0^\pi|\sin y|\,dy\\ &= \int_0^\pi\sin y\,dy=\cos(0)-\cos(\pi)=2\end{aligned}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έπεται ότι $b_n\to 2$.

16. *Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν συνεχείς, αύξουσες και θετικές συναρτήσεις $g,h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ώστε $f=g-h$.*

Υπόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής: αν $g, h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις τότε οι $\max\{g, h\}$ και $\min\{g, h\}$ είναι συνεχείς. Αυτό έπεται από τις

$$\max\{g, h\} = \frac{g + h + |g - h|}{2} \quad \text{και} \quad \min\{g, h\} = \frac{g + h - |g - h|}{2}.$$

Η $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, άρα οι συναρτήσεις

$$g := \max\{f', 0\} \qquad \text{και} \qquad h := -\min\{f', 0\}$$

είναι συνεχείς και μη αρνητικές στο $[0, +\infty)$. Επίσης,

$$g - h = \max\{f', 0\} + \min\{f', 0\} = f'.$$

Ορίζουμε

$$G_1(x) = \int_0^x g(t)dt \qquad \text{και} \qquad H_1(x) = \int_0^x h(t)dt.$$

Αφού οι g, h είναι συνεχείς και μη αρνητικές, οι G_1, H_1 είναι παραγωγίσιμες, αύξουσες και $G_1(0) = H_1(0) = 0$. Από τον τρόπο ορισμού τους και από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού βλέπουμε ότι

$$G_1(x) - H_1(x) = \int_0^x (g(t) - h(t))\, dt = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$$

για κάθε $x \geq 0$. Ορίζουμε

$$G(x) = 1 + |f(0)| + G_1(x) \qquad \text{και} \qquad H(x) = 1 + |f(0)| - f(0) + H_1(x).$$

Τότε, οι G, H είναι παραγωγίσιμες, αύξουσες, θετικές και

$$G(x) - H(x) = G_1(x) - H_1(x) + f(0) = f(x)$$

για κάθε $x \geq 0$. Δηλαδή, η f γράφεται σαν διαφορά δύο συνεχών, αυξουσών και θετικών συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$.