Κεφάλαιο 4

Ολοκλήρωμα Riemann

Ομάδα Α΄. Ερωτήσεις κατανόησης

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. *Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι φραγμένη.*

Σωστό. Από τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann: εξετάζουμε αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη μόνο αν η f είναι φραγμένη.

2. *Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε παίρνει μέγιστη τιμή.*

Λάθος. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(x) = 1 - x$ αν $0 < x \leq 1$ δεν παίρνει μέγιστη τιμή, είναι όμως ολοκληρώσιμη: για κάθε $0 < b < 1$, η f είναι συνεχής στο $[b, 1]$, άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[b, 1]$. Από την Άσκηση 9 (βλέπε παρακάτω) η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

3. *Αν η f είναι φραγμένη, τότε είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Λάθος. Η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = -1$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ είναι φραγμένη, αλλά δεν είναι ολοκληρώσιμη: για κάθε διαμέριση P του $[0, 1]$ έχουμε $U(f, P) = 1$ και $L(f, P) = -1$, άρα

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = -1 < 1 = \overline{\int_0^1} f(x)\, dx.$$

4. *Αν η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Λάθος. Για τη συνάρτηση f του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε $|f(x)| = 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Άρα, η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, ενώ η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

5. *Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $c \in [a, b]$ ώστε $f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\, dx$.*

Λάθος. Η $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x \in [0, 1]$ και $f(x) = -1$ αν $x \in (1, 2]$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_0^2 f(x)\, dx = 0$ (εξηγήστε γιατί). Όμως, δεν υπάρχει $c \in [0, 2]$

ώστε $2f(c) = \int_0^2 f(x)\,dx$. Θα είχαμε $f(c) = 0$, ενώ η f δεν μηδενίζεται πουθενά στο $[0,2]$.

6. *Αν η f είναι φραγμένη και αν $L(f,P) = U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$, τότε η f είναι σταθερή.*

Σωστό. Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή. Τότε, υπάρχουν $y,z \in [a,b]$ ώστε $f(y) < f(z)$. Θεωρήστε τη διαμέριση $Q = \{a,b\}$ του $[a,b]$ (που περιέχει μόνο τα άκρα a και b του διαστήματος $[a,b]$). Τότε,

$$U(f,Q) - L(f,Q) = (M_0 - m_0)(b-a)$$

όπου

$$m_0 = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \leq f(y) < f(z) \leq \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} = M_0.$$

Άρα, $M_0 - m_0 > 0$ οπότε $U(f,Q) - L(f,Q) > 0$. Αυτό είναι άτοπο: από την υπόθεση έχουμε $L(f,P) = U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$.

Άρα, η f είναι σταθερή: υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = c$ για κάθε $x \in [a,b]$, και το ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$ ισούται με $c(b-a)$.

7. *Αν η f είναι φραγμένη και αν υπάρχει διαμέριση P ώστε $L(f,P) = U(f,P)$, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Σωστό. Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε ότι η f είναι σταθερή. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$ ώστε $U(f,P) = L(f,P)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) = U(f,P) - L(f,P) = 0,$$

και, αφού $m_k \leq M_k$ για κάθε $k = 0,1,\dots,n-1$, συμπεραίνουμε ότι

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = M_k$$

για κάθε $k = 0,1,\dots,n-1$. Δηλαδή, η $f(x) = m_k = M_k$ για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

Παρατηρήστε τώρα ότι: $x_1 \in [x_0, x_1]$, άρα $f(x_1) = m_0 = M_0$. Όμως, $x_1 \in [x_1, x_2]$, άρα $f(x_1) = m_1 = M_1$. Δηλαδή, $m_0 = M_0 = m_1 = M_1$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο (για τα επόμενα υποδιαστήματα), συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\alpha = m_0 = M_0 = m_1 = M_1 = \cdots = m_k = M_k = \cdots = m_{n-1} = M_{n-1}.$$

Έπεται ότι $f(x) = \alpha$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δηλαδή, η f είναι σταθερή.

8. *Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$, τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Σωστό. Θεωρήστε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$. Σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχει ρητός αριθμός q_k. Από την υπόθεση έχουμε $f(q_k) = 0$, άρα $m_k \leq 0 \leq M_k$. Έπεται ότι

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leq 0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = U(f,P).$$

Άρα, $\sup_P L(f,P) \leq 0$ και $\inf_P U(f,P) \geq 0$. Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_P L(f,P) \leq 0 \quad \text{και} \quad \int_a^b f(x)dx = \inf_P U(f,P) \geq 0.$$

Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Ομάδα Β′

9. *Έστω $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $0 < b \leq 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b,1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.*

Υπόδειξη. Η f είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $A > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A$ για κάθε $x \in [0,1]$. Θα δείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $0 < b < 1$ αρκετά μικρό ώστε να ικανοποιείται η

$$2Ab < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από την υπόθεση, η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b,1]$, άρα υπάρχει διαμέριση Q του $[b,1]$ με την ιδιότητα

$$U(f,Q) - L(f,Q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε τη διαμέριση $P = \{0\} \cup Q$ του $[0,1]$. Τότε,

$$U(f,P) - L(f,P) = b(M_0 - m_0) + U(f,Q) - L(f,Q) < b(M_0 - m_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

όπου

$$M_0 = \sup\{f(x) : 0 \leq x \leq b\} \leq A \quad \text{και} \quad m_0 = \inf\{f(x) : 0 \leq x \leq b\} \geq -A.$$

Από τις τελευταίες ανισότητες παίρνουμε $M_0 - m_0 \leq 2A$, άρα

$$U(f,P) - L(f,P) < 2Ab + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

10. *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 2$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Παρατηρήστε ότι η f είναι φραγμένη στο $[0,1]$ και, για κάθε $0 < b < 1$, η $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $[b,1]$, άρα ολοκληρώσιμη στο $[b,1]$. Από την Άσκηση 9, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Ομοίως δείχνουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1,0]$. Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1,1]$.

11. *Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$. Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.*

Υπόδειξη. Ακριβώς όπως στην προηγούμενη Άσκηση, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, x_0]$ και στο $[x_0, b]$.

Σημείωση. Το ίδιο ακριβώς επιχείρημα δείχνει ότι αν μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας στο $[a, b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

12. *Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες:*

(α) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = x$.

(β) $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = \sin x$.

Υπόδειξη. (α) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$. Η f είναι αύξουσα. Θεωρήστε τη διαμέριση P_n του $[0, 1]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $1/n$. Δείξτε ότι

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{f(1) - f(0)}{n} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

(β) $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$. Η f είναι αύξουσα. Θεωρήστε τη διαμέριση P_n του $[0, \pi/2]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $\pi/(2n)$. Δείξτε ότι

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{\pi(f(\pi/2) - f(0))}{2n} = \frac{\pi}{2n} \to 0.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, \pi/2]$.

13. *Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 2]$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα τους (αν υπάρχει):*

(α) $f(x) = x + [x]$.

(β) $f(x) = 1$ *αν* $x = \frac{1}{k}$ *για κάποιον* $k \in \mathbb{N}$, *και* $f(x) = 0$ *αλλιώς.*

Υπόδειξη. (α) $f(x) = x + [x]$. Η f είναι αύξουσα στο $[0, 2]$, άρα είναι ολοκληρώσιμη. Μπορείτε να γράψετε

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 x dx + \int_0^2 [x] dx.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ίσο με 2 και το δεύτερο ίσο με 1 (εξηγήστε γιατί).

(β) $f(x) = 1$ αν $x = \frac{1}{k}$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, και $f(x) = 0$ αλλιώς. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 2]$. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η f είναι φραγμένη.

(ii) Αν $0 < b < 2$, τότε η f έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας στο $[b, 2]$ (είναι ακριβώς τόσα όσοι είναι οι φυσικοί k για τους οποίους $1/k \geq b$).

(iii) Αν $0 < b < 2$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[b, 2]$ (από την σημείωση μετά την Άσκηση 3).

(iv) Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 2]$ (από την Άσκηση 9).

14. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Δείξτε ότι*

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

αν και μόνο αν $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,b]$.

Υπόδειξη. Έστω ότι $\int_a^b f(x)dx = 0$. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδενική. Τότε, υπάρχει $x_0\in[a,b]$ ώστε $f(x_0)>0$. Λόγω συνέχειας, η f παίρνει θετικές τιμές σε μια (αρκετά μικρή) περιοχή του x_0, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $a<x_0<b$ (ότι $x_0\neq a$ και $x_0\neq b$).

Επιλέγουμε $\varepsilon = f(x_0)/2 > 0$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας: μπορούμε να βρούμε $\delta>0$ (και αν χρειάζεται να το μικρύνουμε) ώστε $a<x_0-\delta<x_0+\delta<b$ και, για κάθε $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$,

$$|f(x)-f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \quad\Longrightarrow\quad f(x) > \frac{f(x_0)}{2}.$$

Αφού η f είναι μη αρνητική παντού στο $[a,b]$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx\\ &\geq 0 + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + 0 \geq 2\delta\cdot\frac{f(x_0)}{2} = \delta f(x_0) > 0.\end{aligned}$$

Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Ο αντίστροφος ισχυρισμός ισχύει προφανώς.

15. *Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις ώστε*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $x_0\in[a,b]$ ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

Υπόδειξη. Θεωρώντας την $h=f-g$ βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε το εξής: αν $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $\int_a^b h(x)dx=0$, τότε υπάρχει $x_0\in[a,b]$ ώστε $h(x_0)=0$.

Ας υποθέσουμε ότι $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Τότε, είτε $h(x)>0$ παντού στο $[a,b]$ ή $h(x)<0$ παντού στο $[a,b]$ (αν η h έπαιρνε και αρνητικές και θετικές τιμές στο $[a,b]$ τότε, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, θα υπήρχε σημείο στο οποίο θα μηδενιζόταν).

Έστω λοιπόν ότι $h(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Η h παίρνει ελάχιστη θετική τιμή στο $[a,b]$: υπάρχει $y\in[a,b]$ ώστε $h(x)\geq h(y)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Τότε,

$$\int_a^b h(x)dx \geq h(y)(b-a) > 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $h(x)<0$ για κάθε $x\in[a,b]$.

16. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ισχύει $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Η f είναι συνεχής, μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την υπόθεση για την $g = f$. Τότε, $\int_a^b f^2(x)dx = 0$. Η f^2 είναι συνεχής και μη αρνητική. Από την Άσκηση 14 συμπεραίνουμε ότι $f^2(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

17. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $g(a) = g(b) = 0$, ισχύει*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδενική. Τότε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) > 0$. Όπως στην Άσκηση 6, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$ και $f(x) > f(x_0)/2 > 0$ για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Ορίζουμε μια συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ως εξής: θέτουμε $g(x) = 0$ στα $[a, x_0 - \delta]$ και $[x_0 + \delta, b]$, ορίζουμε $g(x_0) = f(x_0)$, και επεκτείνουμε γραμμικά στα $[x_0 - \delta, x_0]$ και $[x_0, x_0 + \delta]$. Αφού $g(a) = g(b) = 0$, από την υπόθεση πρέπει να ισχύει $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Όμως,

$$0 = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)g(x)dx$$

και η fg είναι μη αρνητική στο $[x_0-\delta, x_0+\delta]$. Από την Άσκηση 14, έχουμε $f(x)g(x) = 0$ για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Ειδικότερα, $0 = f(x_0)g(x_0) = f^2(x_0)$, το οποίο είναι άτοπο.

18. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$P(t) = \int_a^b (tf(x) + g(x))^2 dx.$$

Η P ορίζεται καλά: αφού οι f, g είναι ολοκληρώσιμες, η $tf+g$ (άρα και η $(tf+g)^2$) είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι η P είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού:

$$P(t) = t^2 \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) + 2t \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right) + \left(\int_a^b g^2(x)dx \right).$$

Αφού $P(t) \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, η διακρίνουσα είναι μη αρνητική:

$$4 \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - 4 \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx \right) \leq 0.$$

19. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)dx.$$

Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε το $[0,1]$ με τυχόν διάστημα $[a,b]$;

Υπόδειξη. Εφαρμόστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για την f και τη σταθερή συνάρτηση $g \equiv 1$:

$$\left(\int_0^1 f(x) \cdot 1 \, dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2(x)dx \right) \left(\int_0^1 1^2 dx \right) = \int_0^1 f^2(x)dx.$$

Η ίδια ανισότητα ισχύει αν αντικαταστήσουμε το $[0,1]$ με οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$ που έχει μήκος μικρότερο ή ίσο του 1 (αν όμως πάρετε σαν $[a,b]$ το $[0,2]$ και σαν f τη σταθερή συνάρτηση $f(x)=1$, τότε η ανισότητα παίρνει τη μορφή $4 \leq 2$, άτοπο).

20. *Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = f(0).$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο 0, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 \leq t < \delta$ τότε $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$. Έστω $x \in (0,\delta)$. Τότε, για κάθε $t \in [0,x]$ έχουμε $0 \leq t \leq x < \delta$, άρα $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt - f(0) \right| &= \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt - \frac{1}{x} \int_0^x f(0)dt \right| \\ &= \frac{1}{x} \left| \int_0^x (f(t) - f(0))dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f(0)| \, dt \\ &\leq \frac{1}{x} \int_0^x \varepsilon \, dt = \frac{\varepsilon x}{x} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = f(0).$$

21. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία*

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

συγκλίνει στο $\int_0^1 f(x)dx$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία διαμερίσεων $P^{(n)} = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < 1\right\}$ και την επιλογή σημείων $\Xi^{(n)} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$. Αφού το πλάτος της διαμέρισης $P^{(n)}$ είναι $\|P^{(n)}\| = \frac{1}{n} \to 0$, από τον ορισμό του Riemann έχουμε

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum\left(f, P^{(n)}, \Xi^{(n)}\right) \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

22. *Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζοντας το συμπέρασμα της προηγούμενης Άσκησης για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0,1]$, παίρνουμε

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \to \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}.$$

23. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας $a_n = \int_0^1 f(x^n)dx$. Δείξτε ότι $a_n \to f(0)$.*

Υπόδειξη. Η f είναι συνεχής, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(y)| \leq M$ για κάθε $y \in [0,1]$. Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Από τη συνέχεια της f στο 0, υπάρχει $0 < \delta < 1$ ώστε: αν $0 \leq y \leq \delta$ τότε

$$|f(y) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}\right)^n < \delta.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ μπορούμε να γράψουμε (παρατηρήστε ότι αν $0 < x < 1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}$ τότε $|f(x^n) - f(0)| < \varepsilon/2$)

$$\begin{aligned}
|a_n - f(0)| &= \left|\int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}} (f(x^n) - f(0))dx + \int_{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}}^1 (f(x^n) - f(0))dx\right| \\
&\leq \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}} |f(x^n) - f(0)|\,dx + \int_{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}}^1 (|f(x^n)| + |f(0)|)\,dx \\
&\leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M+1}\cdot 2M \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα, $a_n \to f(0)$.

24. *Δείξτε ότι η ακολουθία* $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x} dx$ *συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Η $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, άρα

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq 0,$$

δηλαδή η (γ_n) είναι φθίνουσα. Επίσης,

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1},$$

άρα

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{n} > 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η (γ_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0, συγκλίνει.

25. *Έστω* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *Lipschitz συνεχής συνάρτηση ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

για κάθε $x, y \in [0,1]$. *Δείξτε ότι*

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} |f(x) - f(k/n)| dx.$$

Στο διάστημα $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ έχουμε

$$|f(x) - f(k/n)| \leq M \left(\frac{k}{n} - x\right),$$

άρα

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} |f(x) - f(k/n)| \leq M \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - x\right) dx = M \int_0^{1/n} y\, dy = \frac{M}{2n^2}.$$

Άρα,

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}.$$

Ομάδα Γ′

26. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx.$$

Υπόδειξη. Κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ ορίζει με φυσιολογικό τρόπο μια διαμέριση του $[f(a), f(b)]$: την

$$Q = \{f(a) = f(x_0) < f(x_1) < \cdots < f(x_k) < f(x_{k+1}) < \cdots < f(x_n) = f(b)\}.$$

Η f είναι αύξουσα, άρα

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Η f^{-1} είναι επίσης αύξουσα, άρα

$$U(f^{-1},Q) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{-1}(f(x_{k+1}))(f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}(f(x_{k+1}) - f(x_k)).$$

Προσθέτοντας, παίρνουμε

$$(*) \qquad L(f,P) + U(f^{-1},Q) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}f(x_{k+1}) - x_k f(x_k)) = bf(b) - af(a).$$

Οι f και f^{-1} είναι συνεχείς, άρα ολοκληρώσιμες. Από την $(*)$ παίρνουμε

$$bf(b) - af(a) = L(f,P) + U(f^{-1},Q) \geq L(f,P) + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx$$

και, αφού η P ήταν τυχούσα, παίρνοντας supremum ως προς P έχουμε

$$bf(b) - af(a) \geq \int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx.$$

Με ανάλογο τρόπο δείξτε ότι για τις διαμερίσεις P και Q ισχύει

$$(**) \qquad U(f,P) + L(f^{-1},Q) = bf(b) - af(a).$$

Τότε,

$$U(f,P) + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx \geq U(f,P) + L(f^{-1},Q) = bf(b) - af(a),$$

και παίρνοντας infimum ως προς P έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx \geq bf(b) - af(a).$$

Άρα,

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx = bf(b) - af(a).$$

27. *Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $a, b > 0$,*

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(a) = b$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f(a) \geq b$. Αν $b = f(y)$ τότε $y \leq a$ (διότι η f είναι αύξουσα) και από την προηγούμενη Άσκηση (θα χρειαστείτε την υπόθεση ότι $f(0) = 0$) έχουμε

$$yb = yf(y) = \int_0^y f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx.$$

Για να δείξουμε ότι

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx$$

αρκεί να ελέγξουμε (εξηγήστε γιατί) ότι

$$b(a - y) \leq \int_y^a f(x)dx.$$

Όμως, η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[y, a]$, άρα

$$\int_y^a f(x)dx \geq f(y)(a - y) = b(a - y)$$

με ισότητα μόνο αν $a = y$, δηλαδή αν $f(a) = b$.
Εξετάστε την περίπτωση $f(a) \leq b$ με τον ίδιο τρόπο.

28. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|f(x)| \leq M \int_a^x |f(t)|dt$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Υπόδειξη. Η f είναι συνεχής, άρα υπάρχει $A > 0$ ώστε $|f(t)| \leq A$ για κάθε $t \in [a, b]$. Αυτό δείχνει ότι

$$|f(x)| \leq M \int_a^x |f(t)|dt \leq M \int_a^x A\, dt = MA(x - a)$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Εισάγοντας αυτή την εκτίμηση πάλι στην υπόθεση, παίρνουμε

$$|f(x)| \leq M \int_a^x |f(t)|dt \leq M^2 A \int_a^x (t - a)\, dt = \frac{M^2 A}{2}(x - a)^2$$

για κάθε $x \in [a,b]$, και επαγωγικά,

$$|f(x)| \leq \frac{M^n A}{n!}(x-a)^n$$

για κάθε $x \in [a,b]$ και *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. Όμως,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M^n A}{n!}(x-a)^n = 0,$$

άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

29. *Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει θετική συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε*

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)dx = a \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2.$$

Υπόδειξη. Έστω ότι υπάρχει θετική συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)dx = a \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x-a)^2 f(x)dx &= \int_0^1 x^2 f(x)dx - 2a\int_0^1 xf(x)dx + a^2\int_0^1 f(x)dx \\ &= a^2 - 2a\cdot a + a^2 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Αφού η $(x-a)^2 f(x)$ είναι μη αρνητική και συνεχής, από την Άσκηση 14 βλέπουμε ότι $(x-a)^2 f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Όμως η f είναι παντού θετική, άρα $x = a$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αυτό είναι άτοπο.

30. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, μη αρνητική συνάρτηση. Θέτουμε $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Δείξτε οτι η ακολουθία*

$$\gamma_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n}$$

συγκλίνει, και $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = M$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρήστε ότι

$$\gamma_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \leq \left(\int_a^b M^n dx\right)^{1/n} = M(b-a)^{1/n}$$

και $M(b-a)^{1/n} \to M$ όταν $n \to \infty$, άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\gamma_n < M + \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad n \geq n_1.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, παίρνει τη μέγιστη τιμή της: υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) = M$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει κάποιο διάστημα $J \subset [a,b]$

με μήκος $\delta > 0$ και $x_0 \in J$, ώστε $f(x) > M - \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $x \in J$. Επίσης, αφού $\delta^{1/n} \to 1$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_2$,

$$\left(\int_a^b [f(x)]^n dx \right)^{1/n} \geq \left(\int_J [f(x)]^n dx \right)^{1/n} \geq \left(M - \frac{\varepsilon}{2} \right) \delta^{1/n} > M - \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε

$$|\gamma_n - M| = \left| \left(\int_a^b [f(x)]^n dx \right)^{1/n} - M \right| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, $\gamma_n \to M$.

Σημείωση. Χρησιμοποιώντας τα $\limsup \gamma_n$ και $\liminf \gamma_n$ μπορούμε να απλουστεύσουμε (κάπως) το επιχείρημα. Από την ανισότητα $\gamma_n \leq M(b-a)^{1/n}$ – που δείξαμε παραπάνω – και από την $M(b-a)^{1/n} \to M$ συμπεραίνουμε ότι $\limsup \gamma_n \leq M$. Από την ανισότητα $\gamma_n \geq \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right) \delta^{1/n}$ – που δείξαμε παραπάνω – και από την $\delta^{1/n} \to 1$ συμπεραίνουμε ότι $\liminf \gamma_n \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$ για τυχόν $\varepsilon > 0$, συνεπώς, $\liminf \gamma_n \geq M$. Έπεται ότι $\limsup \gamma_n = \liminf \gamma_n = M$, άρα $\gamma_n \to 1$.

31. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε ότι η f έχει πολλά σημεία συνέχειας.*

(α) *Υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε $U(f,P) - L(f,P) < b-a$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε ότι υπάρχουν $a_1 < b_1$ στο $[a,b]$ ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και*

$$\sup\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} < 1.$$

(β) *Επαγωγικά ορίστε κιβωτισμένα διαστήματα $[a_n, b_n] \subseteq (a_{n-1}, b_{n-1})$ με μήκος μικρότερο από $1/n$ ώστε*

$$\sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(γ) *Η τομή αυτών των κιβωτισμένων διαστημάτων περιέχει ακριβώς ένα σημείο. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής σε αυτό.*

(δ) *Τώρα δείξτε ότι η f έχει άπειρα σημεία συνέχειας στο $[a,b]$ (δεν χρειάζεται περισσότερη δουλειά!).*

Υπόδειξη. (α) Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε $U(f,P_1) - L(f,P_1) < b-a$. Περνώντας αν χρειαστεί σε εκλέπτυνση της P_1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πλάτος της P_1 είναι μικρότερο από 1. Αφού

$$\sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) < b - a = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k),$$

υπάρχει $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ώστε $M_k - m_k < 1$. Αν θέσουμε $a_1 = x_k$ και $b_1 = x_{k+1}$, βλέπουμε ότι $a_1 < b_1$, $a_1, b_1 \in [a,b]$, $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} = M_k - m_k < 1.$$

(β) Με τον ίδιο τρόπο δείξτε ότι υπάρχει $[a_2,b_2] \subseteq (a_1,b_1)$ με μήκος μικρότερο από $1/2$ ώστε

$$\sup\{f(x) : a_2 \leq x \leq b_2\} - \inf\{f(x) : a_2 \leq x \leq b_2\} < \frac{1}{2}.$$

Για να πετύχετε τον εγκλεισμό $[a_2,b_2] \subset (a_1,b_1)$ ξεκινήστε από ένα υποδιάστημα $[c,d]$ του $[a_1,b_1]$ με $a_1 < c < d < b_1$ (η f είναι ολοκληρώσιμη και στο $[c,d]$). Βρείτε διαμέριση P_2 του $[c,d]$ με $U(f,P_2) - L(f,P_2) < \frac{d-c}{2}$ και πλάτος μικρότερο από $1/2$ και συνεχίστε όπως πριν.

Επαγωγικά μπορείτε να βρείτε $[a_n,b_n] \subset (a_{n-1},b_{n-1})$ ώστε $b_n - a_n < 1/n$ και

$$\sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(γ) Η τομή των κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n,b_n]$ περιέχει ακριβώς ένα σημείο x_0. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0: έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Αφού $x_0 \in [a_{n+1},b_{n+1}]$, έχουμε $x_0 \in (a_n,b_n)$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta) \subset (a_n,b_n)$. Τότε, για κάθε $x \in (x_0-\delta,x_0+\delta)$ έχουμε

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Αυτό δείχνει τη συνέχεια της f στο x_0.

(δ) Ας υποθέσουμε ότι η f έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία συνέχειας στο $[a,b]$. Τότε, υπάρχει διάστημα $[c,d] \subset [a,b]$ στο οποίο η f δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας (εξηγήστε γιατί). Αυτό είναι άτοπο από το προηγούμενο βήμα: η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$, άρα έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας σε αυτό.

Για την ακρίβεια, το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε δείχνει κάτι ισχυρότερο: αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας σε *κάθε υποδιάστημα* του $[a,b]$. Με άλλα λόγια, το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι *πυκνό* στο $[a,b]$.

32. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (όχι αναγκαστικά συνεχής) συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι*

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Υπόδειξη. Από την προηγούμενη Άσκηση, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ στο οποίο η f είναι συνεχής. Αφού $f(x_0) > 0$, υπάρχει διάστημα $J \subseteq [a,b]$ με μήκος $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in J$ ισχύει $f(x) > f(x_0)/2$. Συνεχίστε όπως στην Άσκηση 14.