Κεφάλαιο 3

Ομοιόμορφη συνέχεια

Ομάδα Α΄

1. *Δείξτε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής για μια συνεχή συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bolzano–Weiertstrass.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει $M>0$ ώστε $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$, με απαγωγή σε άτοπο. Αν αυτό δεν ισχύει, μπορούμε να βρούμε $x_n\in[a,b]$ ώστε $|f(x_n)|>n$, $n=1,2,\ldots$. Η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) ώστε $x_{k_n}\to x_0\in[a,b]$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, από την αρχή της μεταφοράς έχουμε $f(x_{k_n})\to f(x_0)$, άρα

$$|f(x_{k_n})|\to|f(x_0)|.$$

Όμως, $|f(x_{k_n})|>k_n\geq n$. Άρα, $|f(x_{k_n})|\to+\infty$, το οποίο είναι άτοπο.

Είδαμε ότι η f είναι φραγμένη, άρα

$$M:=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}<\infty.$$

Τότε, μπορούμε να βρούμε $x_n\in[a,b]$ ώστε $f(x_n)\to M$ (γενικά, αν $s=\sup(A)$ τότε υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A ώστε $a_n\to s$). Η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) ώστε $x_{k_n}\to x_0\in[a,b]$. Αφού $f(x_n)\to M$, έχουμε $f(x_{k_n})\to M$. Από την αρχή της μεταφοράς,

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_{k_n})=M.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή (στο x_0).

Εργαζόμενοι όμοια, δείχνουμε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή.

2. *Έστω $X\subseteq R$. Λέμε ότι μια συνάρτηση $f:X\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz αν υπάρχει $M\geq 0$ ώστε: για κάθε $x,y\in X$,*

$$|f(x)-f(y)|\leq M\cdot|x-y|.$$

Δείξτε ότι αν η $f:X\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;

Υπόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M} > 0$. Αν $x, y \in X$ και $|x - y| < \delta$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta = \varepsilon.$$

Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Όμως, η f δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz στο $[0, 1]$. Θα υπήρχε $M > 0$ ώστε: για κάθε $0 < x < 1$ να ισχύει

$$|\sqrt{x} - 0| \leq M|x - 0|, \quad \text{δηλαδή} \quad 1 \leq M\sqrt{x}.$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο όταν $x \to 0^+$.

3. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b). Δείξτε ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz αν και μόνο αν η f' είναι φραγμένη.*

Υπόδειξη. Έστω ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ για κάθε $x, y \in [a, b]$. Θεωρούμε $x_0 \in (a, b)$. Τότε, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Όμως, αν $x \neq x_0$ στο (a, b), έχουμε

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq M \quad \text{άρα} \quad |f'(x_0)| = \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq M.$$

Δηλαδή, η f' είναι φραγμένη.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f'(\xi)| \leq M$ για κάθε $\xi \in (a, b)$. Έστω $x < y$ στο $[a, b]$. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (x, y)$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq M \cdot |x - y|.$$

Δηλαδή, η f είναι Lipschitz συνεχής.

4. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και $f(x) = x^{1/n}$, $x \in [0, 1]$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz. Είναι ομοιόμορφα συνεχής;*

Υπόδειξη. Έχουμε $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$ για $x \in (0, 1)$. Αφού $\frac{1}{n} - 1 < 0$, έχουμε

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty,$$

δηλαδή η f' δεν είναι φραγμένη. Από την Άσκηση 3, η f δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz. Είναι όμως ομοιόμορφα συνεχής ως συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα.

5. *Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν συνθήκη Lipschitz:*

(α) *$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$.*

(β) *$g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $g(0) = 0$.*

Υπόδειξη. Από την Άσκηση 3 αρκεί να εξετάσετε αν καθεμία από τις f και g έχει φραγμένη παράγωγο στο $(0, 1)$. Ελέγξτε ότι: η f δεν έχει φραγμένη παράγωγο στο $(0, 1)$, ενώ η g έχει φραγμένη παράγωγο στο $(0, 1)$.

6. *Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to B$ και $g : B \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\zeta = \zeta(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $u, v \in B$ και $|u - v| < \zeta$ τότε $|g(u) - g(v)| < \varepsilon$.

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta = \delta(\zeta) > 0$ ώστε αν $x, y \in A$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \zeta$. Παρατηρήστε ότι το δ εξαρτάται μόνο από το ε, αφού το ζ εξαρτάται μόνο από το ε.

Θεωρήστε $x, y \in A$ με $|x - y| < \delta$. Τότε, τα $u = f(x)$ και $v = f(y)$ ανήκουν στο B και $|u - v| = |f(x) - f(y)| < \zeta$. Άρα,

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| = |g(u) - g(v)| < \varepsilon.$$

Έπεται ότι η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

7. *Έστω $f, g : I \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι*

(α) *η $f + g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.*

(β) *η $f \cdot g$ δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα συνεχής στο I, αν όμως οι f, g υποτεθούν και φραγμένες τότε η $f \cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I, υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta_1$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ομοίως, αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta_2$ τότε $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Τότε, αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta$, έχουμε

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |(f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Έπεται ότι η $f + g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

(β) Αν οι f, g είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο I τότε η $f \cdot g$ δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα συνεχής στο I: θεωρήστε τις $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = g(x) = x$. Αυτές είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $[0, +\infty)$, όμως η $(f \cdot g)(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Αν όμως οι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις $f, g : I \to \mathbb{R}$ υποτεθούν και φραγμένες, τότε η $f \cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I. Υπάρχουν $M, N > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ και $|g(x)| \leq N$ για κάθε $x \in I$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια των f και g μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta$ τότε

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{M + N} \quad \text{και} \quad |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{M + N}.$$

Τότε, αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{M + N} + N \cdot \frac{\varepsilon}{M + N} = \varepsilon. \end{aligned}$$

8. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|x| \geq M$ τότε $|f(x)| < \varepsilon$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Σημείωση: Η υπόθεση, ισοδύναμα, μας λέει ότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση, υπάρχει $M = M(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|x| \geq M$ τότε $|f(x)| < \varepsilon/3$. Επίσης, η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-M, M]$, οπότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-M, M]$. Άρα, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με $\delta < M$, ώστε αν $x, y \in [-M, M]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$.

Θα δείξουμε ότι αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) $x, y \in (-\infty, M]$: τότε, $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

(ii) $x, y \in [M, +\infty)$: τότε, $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

(iii) $x, y \in [-M, M]$: τότε, από την επιλογή του δ έχουμε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

(iv) $x < M < y$: τότε, $x \in [-M, M]$ (διότι $\delta < M$) και $|x - M| < |x - y| < \delta$, άρα $|f(x) - f(M)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Επίσης, $M, y \geq M$ άρα $|f(M)| < \frac{\varepsilon}{3}$ και $|f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(M)| + |f(M) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f(M)| + |f(M)| + |f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(v) $x < -M < y$: όμοια με την προηγούμενη περίπτωση.

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

9. *Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. Έστω $\ell := \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - \ell$. Τότε, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\varepsilon) > a$ ώστε αν $x \geq M$ τότε $|g(x)| < \varepsilon$. Το επιχείρημα της Άσκησης 8 δείχνει ότι η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Αφού η σταθερή συνάρτηση $h(x) = \ell$ είναι επίσης ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$, έπεται ότι η $f = g + h$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$.

10. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A|x| + B$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Αφού η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, για $\varepsilon = 1$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < 1$.

Έστω $x > 0$. Θεωρούμε τον ελάχιστο φυσικό $n = n_x$ για τον οποίο $n_x\frac{\delta}{2} > x$ (αυτός υπάρχει, από την Αρχιμήδεια ιδιότητα και από την αρχή του ελαχίστου). Τότε,

$$(*) \qquad (n_x - 1)\frac{\delta}{2} \leq x < n_x\frac{\delta}{2}.$$

Θεωρούμε τα σημεία: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\delta}{2}, \ldots, x_n = n\frac{\delta}{2}$. Έχουμε $|x_{k+1} - x_k| < \delta$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ και $|x - x_n| < \delta$. Άρα,

$$|f(x) - f(0)| \leq |f(x) - f(x_n)| + \cdots + |f(x_1) - f(x_0)| < n + 1 = n_x + 1 < \frac{2}{\delta}x + 2$$

από την $(*)$. Δηλαδή, για κάθε $x > 0$.

$$|f(x)| \leq \frac{2}{\delta}x + 2 + |f(0)|.$$

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο για $x < 0$ δείξτε ότι

$$|f(x)| \leq \frac{2}{\delta}|x| + 2 + |f(0)|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, το ζητούμενο ισχύει με $A = \frac{2}{\delta}$ και $B = |f(0)| + 2$.

11. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Άσκηση δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. Έστω $n > 1$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Από την Άσκηση 10 υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε $x^n \leq Ax + B$ για κάθε $x > 0$. Τότε,

$$x^{n-1} \leq A + \frac{B}{x}$$

για κάθε $x > 0$. Αφού $n > 1$, έχουμε $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{n-1} = +\infty$. Όμως, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(A + \frac{B}{x}\right) = A$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο.

12. (α) *Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.*
(β) *Δείξτε ότι η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.*

Υπόδειξη. (α) Έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Επίσης, η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, a]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, a]$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$ χρησιμοποιώντας την τεχνική της Άσκησης 8 (διακρίνοντας περιπτώσεις).
(β) Η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$. Αν $x, y \in [1, +\infty)$, τότε

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x - y|,$$

δηλαδή η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz στο $[1, +\infty)$. Συνεπώς, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1, +\infty)$. Τώρα, μπορείτε να εφαρμόσετε το (α).

13. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\hat{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ ώστε $\hat{f}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.*

Υπόδειξη. Είδαμε (στη θεωρία) ότι αν η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχουν τα

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \quad \text{και} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = m$$

και είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν επεκτείνουμε την f στο $[a,b]$ ορίζοντας $\hat{f}(a)=\ell$, $\hat{f}(b)=m$ και $\hat{f}(x)=f(x)$ για $x\in(a,b)$, τότε η $\hat{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$.

14. *Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.*

(i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=3x+1$.

(ii) $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$.

(iii) $f:(0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}\sin^2 x$.

(iv) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

(v) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$.

(vi) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

(vii) $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{\cos(x^3)}{x}$.

(viii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$.

(ix) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$.

(x) $f:[-2,0]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

(xi) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x\sin x$.

(xii) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{\cos(x^2)}{x+1}$.

Υπόδειξη. Όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.
(i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=3x+1$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής: είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 3. Για την ακρίβεια,

$$|f(x)-f(y)|=3|x-y|$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.
(ii) $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής: είναι Lipschitz συνεχής, αφού

$$|f'(x)|=\frac{1}{x^2}\leq\frac{1}{4}$$

στο $[2,+\infty)$.
(iii) $f:(0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}\sin^2 x$. Η f ορίζεται στο ημιανοικτό διάστημα $(0,\pi]$ και

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x=1\cdot 0=0.$$

Συνεπώς, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(iv) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. Η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, διότι δεν υπάρχει το

$$\lim_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}.$$

(v) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$. Επεκτείνουμε την f σε συνεχή συνάρτηση στο $[0,+\infty)$, θέτοντας

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

Αν $x \geq 1$ τότε

$$|f'(x)| \leq \left|\sin\frac{1}{x}\right| + \frac{1}{x}\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq 2.$$

Συνεπώς, η f είναι Lipschitz συνεχής, άρα και ομοιόμορφα συνεχής, στο $[1, +\infty)$. Αφού είναι και συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι ομοιόμορφα συνεχής (από την Άσκηση 12(α)).

(vi) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Επεκτείνουμε την f σε συνεχή συνάρτηση στο $[0, +\infty)$, θέτοντας

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Αφού

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

η f είναι ομοιόμορφα συνεχής από την Άσκηση 9.

(vii) $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^3)}{x}$. Επεκτείνουμε την f σε συνεχή συνάρτηση στο $[1, +\infty)$, θέτοντας

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cos(x^3)}{x} = \cos(1).$$

Αφού

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x^3)}{x} = 0,$$

η f είναι ομοιόμορφα συνεχής από την Άσκηση 9.

(viii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$. Αφού $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+4} = 0$, η f ικανοποιεί την υπόθεση της Άσκησης 8. Συνεπώς, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ix) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$, από την Άσκηση 9. Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, 0]$, πάλι από την Άσκηση 9. Έπεται ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$ (χρησιμοποιήστε την τεχνική της Άσκησης 8).

(x) $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(xi) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x\sin x$. Η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Παρατηρούμε ότι η $f'(x) = x\cos x + \sin x$ δεν είναι φραγμένη και ότι παίρνει μεγάλες τιμές στα σημεία της μορφής $2n\pi$ όπου n μεγάλος φυσικός. Ορίζουμε $x_n = 2n\pi$ και $y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$. Τότε, $y_n - x_n = \frac{1}{n} \to 0$, αλλά

$$f(y_n) - f(x_n) = \big(2n\pi + (1/n)\big)\sin(1/n) = 2\pi\frac{\sin(1/n)}{1/n} + \frac{\sin(1/n)}{n} \to 2\pi\cdot 1 + 0 = 2\pi \neq 0$$

όταν $n \to \infty$. Από τον χαρακτηρισμό της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών έπεται ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(xii) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x+1}$. Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$, από την Άσκηση 9.

Ομάδα Β′. Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

15. *Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.*

Λάθος. Αν μια συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (και είναι πραγματικοί αριθμοί). Για την $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ έχουμε $f(x) \to +\infty$ όταν $x \to 0^+$.

16. *Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x-1}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.*

Λάθος. Αν μια συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (και είναι πραγματικοί αριθμοί). Για την $f(x) = \frac{1}{x-1}$ έχουμε $f(x) \to -\infty$ όταν $x \to 1^-$.

17. *Αν η συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη στο $(0, 1)$, τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.*

Σωστό. Έστω ότι η συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (και είναι πραγματικοί αριθμοί). Έπεται (δείτε την Άσκηση 13) ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\tilde{f} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ώστε $\tilde{f}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Η $\tilde{f}$ είναι φραγμένη (ως συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα). Συνεπώς, η f είναι επίσης φραγμένη (ως περιορισμός φραγμένης συνάρτησης).

18. *Αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy.*

Σωστό. Αποδείχθηκε στη θεωρία.

19. *Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$, τότε το $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ υπάρχει.*

Σωστό. Η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 2}$ είναι ακολουθία Cauchy στο $(0, 1)$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, η ακολουθία $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ είναι ακολουθία Cauchy (από το προηγούμενο ερώτημα). Συνεπώς, η $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ συγκλίνει.

20. *Θεωρούμε τις $f(x) = x$ και $g(x) = \sin x$. Οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $\mathbb{R}$, όμως η fg δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.*

Σωστό. Οι f και g έχουν φραγμένη παράγωγο, άρα είναι Lipschitz συνεχείς (με σταθερά 1, εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Όμως, η $(fg)(x) = x \sin x$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$: δείτε την Άσκηση 14(xi).

21. *Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $x > 0$ και $f(x) = 2x$ αν $x \leq 0$, είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.*

Σωστό. Η f εχει φραγμένη παράγωγο (ίση με 1) στο $(0,+\infty)$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$. Ομοίως, η f έχει φραγμένη παράγωγο (ίση με 2) στο $(-\infty,0)$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty,0]$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Άσκησης 8, μπορείτε να δείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Σημείωση: Μπορείτε να ελέγξετε απευθείας ότι

$$|f(x)-f(y)|\leq 2|x-y|$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, διακρίνοντας τις περιπτώσεις (α) $x,y\geq 0$, (β) $x,y\leq 0$, (γ) $x<0<y$. Αφού η f είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 2, συμπεραίνουμε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής.

22. *Κάθε φραγμένη και συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Λάθος. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\cos(x^2)$ είναι φραγμένη και συνεχής, όμως δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Για τις ακολουθίες $x_n=\sqrt{\pi n+\pi}$ και $y_n=\sqrt{\pi n}$ έχουμε $x_n-y_n\to 0$, αλλά $|f(x_n)-f(y_n)|=2\to 2\neq 0$ όταν $n\to\infty$.

Ομάδα Γ′

23. *Δείξτε ότι η συνάρτηση $f:(0,1)\cup(1,2)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=0$ αν $x\in(0,1)$ και $f(x)=1$ αν $x\in(1,2)$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $f:(0,1)\cup(1,2)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=0$ αν $x\in(0,1)$ και $f(x)=1$ αν $x\in(1,2)$ είναι συνεχής: έστω $x_0\in(0,1)$ και έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $\delta=\delta(x_0)>0$ (δεν εξαρτάται από το $\varepsilon>0$) ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(0,1)$. Αν $x\in(0,1)\cup(1,2)$ και $|x-x_0|<\delta$, τότε $x\in(0,1)$. Άρα, $|f(x)-f(x_0)|=|0-0|=0<\varepsilon$. Δηλαδή, η f είναι συνεχής στο x_0.

Με τον ίδιο τρόπο μπορείτε να δείξετε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0\in(1,2)$. Άρα, η f είναι συνεχής στο $(0,1)\cup(1,2)$.

Όμως, η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Θεωρήστε τις ακολουθίες $x_n=1-\frac{1}{n+1}$ και $y_n=1+\frac{1}{n+1}$. Έχουμε $x_n\in(0,1)$, $y_n\in(1,2)$ και $y_n-x_n=\frac{2}{n+1}\to 0$. Όμως, $f(y_n)-f(x_n)=1-0=1\not\to 0$. Από τον χαρακτηρισμό της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών έπεται το συμπέρασμα.

Σημείωση: Το ίδιο παράδειγμα δείχνει ότι αν οι περιορισμοί $f|_A$ και $f|_B$ μιας συνάρτησης f σε δύο υποσύνολα A και B του πεδίου ορισμού της είναι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις, δεν έπεται αναγκαστικά ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $A\cup B$ (εξηγήστε γιατί).

24. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $\varepsilon>0$. Δείξτε ότι μπορούμε να χωρίσουμε το $[a,b]$ σε πεπερασμένα το πλήθος διαδοχικά υποδιαστήματα του ιδίου μήκους έτσι ώστε: αν τα x,y ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα, τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon>0$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $x,y\in[a,b]$ και $|x-y|<\delta$ τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Επιλέγουμε φυσικό αριθμό n ώστε $\frac{b-a}{n}<\delta$ και χωρίζουμε το $[a,b]$ στα διαδοχικά υποδιαστήματα

$$[x_k,x_{k+1}]=\left[a+k\frac{(b-a)}{n},a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right],\quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Αν τα x, y ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, τότε $|x-y| \leq x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} < \delta$. Άρα, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

25. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, φραγμένη και μονότονη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Αφού η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και αύξουσα συνάρτηση, υπάρχουν τα

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

και

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = m = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Αφού η f είναι συνεχής και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, η Άσκηση 9 δείχνει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$. Το ίδιο ακριβώς επιχείρημα δείχνει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, 0]$. Τέλος, μπορείτε να δείξετε την ομοιόμορφη συνέχεια στο $\mathbb{R}$ με την τεχνική της Άσκησης 8 (διακρίνοντας περιπτώσεις).

26. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και περιοδική συνάρτηση. Δηλαδή, υπάρχει $T > 0$ ώστε $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. Η f είναι συνεχής στο $[0, 2T]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 2T]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $0 < \delta = \delta(\varepsilon) < T$ ώστε αν $x, y \in [0, 2T]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Δείξτε ότι αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$: μπορείτε να υποθέσετε ότι $x < y$. Υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $mT \leq x \leq (m+1)T$. Τότε, $y < x + \delta < (m+1)T + T = mT + 2T$. Παρατηρήστε ότι $x - mT, y - mT \in [0, 2T]$ και ότι

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - mT) - f(y - mT)|$$

από την περιοδικότητα της f. Αφού

$$|(x - mT) - (y - mT)| = |x - y| < \delta,$$

έχουμε $|f(x - mT) - f(y - mT)| < \varepsilon$ και έπεται το ζητούμενο.

27. *Έστω $X \subset \mathbb{R}$ φραγμένο σύνολο και $f : X \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in X$.*

Υπόδειξη. Υπάρχει κλειστό διάστημα $[a, b]$ ώστε $X \subseteq [a, b]$. Για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < 1$. Επιλέγουμε διαμέριση

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$

του $[a, b]$ ώστε $t_{k+1} - t_k < \delta$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Θέτουμε

$$X_k = [t_k, t_{k+1}] \cap X \quad \text{για κάθε} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Αν ορίσουμε $F = \{k : X_k \neq \emptyset\}$, έχουμε

$$X = \bigcup_{k \in F} X_k.$$

Για κάθε $k \in F$ επιλέγουμε τυχόν $x_k \in X_k$ και θέτουμε

$$\alpha = \max\{|f(x_k)| : k \in F\}.$$

Παρατηρήστε ότι αν $x \in X$ τότε υπάρχει $k \in F$ ώστε $x \in X_k$. Τότε, $|x - x_k| \leq t_{k+1} - t_k < \delta$, άρα

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k)| < 1 + \alpha.$$

Δηλαδή, $|f(x)| \leq M := 1 + \alpha$ για κάθε $x \in X$.

28. *Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$$

($f(x)$ είναι η «απόσταση» του x από το A). Δείξτε ότι
(α) *$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.*
(β) *η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε $f(x) \leq |x - a|$ και $|x - a| \leq |x - y| + |y - a|$ από την τριγωνική ανισότητα. Άρα,

$$f(x) \leq |x - y| + |y - a|.$$

Αφού

$$f(x) - |x - y| \leq |y - a| \quad \text{για κάθε} \quad a \in A,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$f(x) - |x - y| \leq \inf\{|y - a| : a \in A\} = f(y).$$

Δηλαδή,

$$f(x) - f(y) \leq |x - y|.$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $f(y) - f(x) \leq |y - x| = |x - y|$. Έπεται ότι $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.
(β) Από το (α) η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 1, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής.