Κεφάλαιο 2

Σειρές πραγματικών αριθμών

Α΄ Ομάδα. Ερωτήσεις κατανόησης

Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας).

1. *Αν $a_k \to 0$ τότε η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη.*

Λάθος. Η ακολουθία $a_k = \frac{1}{k} \to 0$, όμως η ακολουθία $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ δεν είναι φραγμένη (τείνει στο $+\infty$).

2. *Αν η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.*

Λάθος. Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $a_k = (-1)^{k-1}$, τότε έχουμε $s_n = 1$ αν ο n είναι περιττός και $s_n = 0$ αν ο n είναι άρτιος. Δηλαδή, η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ αποκλίνει, διότι $a_k \not\to 0$.

3. *Αν $|a_k| \to 0$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.*

Λάθος. Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k}$. Τότε, $|a_k| = \frac{1}{k} \to 0$ και η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει στο $+\infty$, δηλαδή η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ δεν συγκλίνει απολύτως.

4. *Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.*

Σωστό. Αποδείξαμε (στη θεωρία) ότι αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει.

5. *Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.*

Λάθος. Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k}$. Τότε, $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

6. *Αν* $a_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *και αν* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, *τότε η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *αποκλίνει.*

Λάθος. Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k^2}$. Τότε, $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

7. *Αν* $a_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *και αν* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to +\infty$, *τότε η η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *αποκλίνει.*

Σωστό. Αν $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to +\infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ για κάθε $k \geq N$. Αφού η (a_k) έχει θετικούς όρους, συμπεραίνουμε ότι $0 < a_N \leq a_{N+1} \leq \cdots \leq a_k \leq \cdots$, δηλαδή $a_k \not\to 0$. Συνεπώς, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

8. *Αν* $a_k \to 0$, *τότε η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ *συγκλίνει.*

Λάθος. Αν θεωρήσουμε την $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$, τότε $a_k \to 0$. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

9. *Αν* $a_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *και αν η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει, τότε η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ *συγκλίνει.*

Λάθος. Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k^2}$. Τότε, $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

10. *Αν η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει, τότε η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ *συγκλίνει.*

Λάθος. Από το κριτήριο του Dirichlet, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

11. *Αν η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει και αν* (a_{k_n}) *είναι μια υπακολουθία της* (a_n), *τότε η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k_n}$ *συγκλίνει.*

Λάθος. Σύμφωνα με το κριτήριο Dirichlet, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ αποκλίνει (συμπεριφέρεται σαν την αρμονική σειρά – εξηγήστε γιατί).

12. *Αν* $a_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *και αν η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει, τότε η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ *συγκλίνει.*

Σωστό. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, έχουμε $a_k \to 0$. Άρα, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k \geq m$, $0 \leq a_k \leq 1$. Τότε, για κάθε $k \geq m$ έχουμε $0 \leq a_k^2 \leq a_k$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

13. *Η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$ *συγκλίνει.*

Λάθος. Θέτουμε $a_k = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$. Τότε, $a_k > 0$ και

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{[2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)(2k+2)]k!}{[2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)](k+1)!} = \frac{2k+2}{k+1} = 2 \to 2 > 1.$$

Από το κριτήριο του λόγου, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$ αποκλίνει.

14. *Η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^p$ *συγκλίνει αν και μόνο αν* $p < -1$.

Σωστό. Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k(1+k^2)^p}{k^{2p+1}} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^p = 1 > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^p$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{-(2p+1)}}$ συγκλίνει. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $-(2p+1) > 1$, δηλαδή αν και μόνο αν $p < -1$.

Β′ Ομάδα

15. *Δείξτε ότι αν* $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$ *τότε* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b$.

Υπόδειξη. Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς ισούται με

$$s_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Αφού $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$, βλέπουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = b_1 - b$. Συνεπώς, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b$.

16. *Δείξτε ότι*

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}$ (β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k} = \frac{3}{2}$ (γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1.$

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $b_k = \frac{1}{2k-1}$. Παρατηρούμε ότι

$$b_k - b_{k+1} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Έχουμε $b_1 = 1$ και $b_k \to 0$. Από την Άσκηση 15,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}(b_1 - b) = \frac{1}{2}.$$

(β) Γνωρίζουμε ότι αν $0 < x < 1$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1/3}{1-(1/3)} + \frac{1/2}{1-(1/2)} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

(γ) Γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 1 - 0 = 1,$$

χρησιμοποιώντας την Άσκηση 15 για την $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$.

17. *Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)-k}{2k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)}.$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 15 για την $b_k = \frac{1}{2k(k+1)} \to 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = b_1 = \frac{1}{4}.$$

18. *Εξετάστε για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού x συγκλίνει η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k}$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι: αν $|x| < 1$ τότε $\frac{1}{1+x^k} \to 1 \neq 0$, άρα η σειρά αποκλίνει. Αν $x = 1$, τότε $\frac{1}{1+x^k} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0$, άρα η σειρά αποκλίνει. Αν $x = -1$, ο k-οστός όρος δεν ορίζεται στην περίπτωση που ο k είναι περιττός, άρα δεν έχει νόημα να εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $|x| > 1$. Τότε, μπορούμε να εφαρμόσουμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης, χρησιμοποιώντας την $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x|^k}$ (η οποία συγκλίνει ως γεωμετρική σειρά με λόγο $\frac{1}{|x|} < 1$). Έχουμε

$$\frac{|1/(1+x^k)|}{1/|x|^k} = \left|\frac{x^k}{1+x^k}\right| = \left|\frac{1}{(1/x)^k + 1}\right| \to 1.$$

Συνεπώς, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k}$ συγκλίνει απολύτως.

19. *Εφαρμόστε τα κριτήρια λόγου **και** ρίζας στις ακόλουθες σειρές:*

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k x^k$ (β) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ (δ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^3 x^k$

(ε) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$ (στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$ (ζ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} x^k$ (η) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10} x^k}{k!}$.

Αν για κάποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ κανένα από αυτά τα δύο κριτήρια δεν δίνει απάντηση, εξετάστε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς με άλλο τρόπο.

Υπόδειξη. Εξετάζουμε μερικές από αυτές:

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k x^k$: Με το κριτήριο του λόγου. Αν $x \neq 0$, έχουμε

$$\frac{(k+1)^{k+1}|x|^{k+1}}{k^k|x|^k} = (k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k |x| \to +\infty.$$

Συνεπώς, η σειρά αποκλίνει. Η σειρά συγκλίνει μόνο αν $x = 0$.

Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγατε αν χρησιμοποιούσατε το κριτήριο της ρίζας: παρατηρήστε ότι $\sqrt[k]{k^k|x|^k} = k|x| \to +\infty$ αν $x \neq 0$.

(β) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$: Με το κριτήριο του λόγου. Αν $x \neq 0$, έχουμε

$$\frac{|x|^{k+1}/(k+1)!}{|x|^k/k!} = \frac{|x|}{k+1} \to 0 < 1.$$

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει απολύτως. Η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$: Με το κριτήριο του λόγου. Αν $x \neq 0$, έχουμε

$$\frac{2^{k+1}|x|^{k+1}/(k+1)^2}{2^k|x|^k/k^2} = 2|x|\frac{k^2}{(k+1)^2} \to 2|x|.$$

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει απολύτως αν $|x| < 1/2$ και αποκλίνει αν $|x| > 1/2$. Εξετάζουμε τη σύγκλιση χωριστά στις περιπτώσεις $x = \pm 1/2$. Παρατηρώντας ότι οι σειρές $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ και $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνουν, συμπεραίνουμε τελικά ότι η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $|x| \leq 1/2$.

20. *Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

και

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \cdots.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι το $(2n)$-οστό μερικό άθροισμα της σειράς

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

ισούται με

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Αφού η σειρά έχει θετικούς όρους και $s_{2n} \leq \frac{3}{2}$ για κάθε n, έπεται ότι η σειρά συγκλίνει (εξηγήστε γιατί).

(β) Παρατηρήστε ότι το $(2n)$-οστό μερικό άθροισμα της σειράς

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \cdots$$

ισούται με

$$s_{2n} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2^k} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Αφού η σειρά έχει θετικούς όρους και $s_{2n} \leq 2$ για κάθε n, έπεται ότι η σειρά συγκλίνει.

21. *Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη – για την ακολουθία (a_n) – ώστε να συγκλίνει η σειρά*

$$a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \cdots .$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $s_{2n} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$s_1 = a_1, \quad s_3 = a_2, \quad s_5 = a_3, \quad s_7 = a_4,$$

και γενικά, $s_{2n-1} = a_n$. Έπεται ότι η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $a_n \to 0$. Πράγματι, αν η σειρά συγκλίνει και αν s είναι το άθροισμά της, τότε $s = \lim s_{2n} = 0$ και $a_n = s_{2n-1} \to s = 0$. Αντίστροφα, αν $a_n \to 0$ τότε $s_{2n} = 0 \to 0$ και $s_{2n-1} = a_n \to 0$, άρα $s_n \to 0$.

22. *Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k$ *στις παρακάτω περιπτώσεις:*

(α) $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ (β) $a_k = \sqrt{1+k^2} - k$

(γ) $a_k = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$ (δ) $a_k = (\sqrt[k]{k} - 1)^k$.

Υπόδειξη. (α) Αν $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$, τότε $s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sqrt{n+1} - 1 \to +\infty$, άρα η σειρά αποκλίνει.

(β) Έχουμε $a_k = \sqrt{1+k^2} - k = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}+k}$. Παρατηρούμε ότι $\frac{a_k}{1/k} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}+k} \to \frac{1}{2} > 0$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(γ) Έχουμε $a_k = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$. Παρατηρούμε ότι $\frac{a_k}{1/k^{3/2}} \to \frac{1}{2} > 0$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(δ) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας: έχουμε $\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{k} - 1 \to 0 < 1$, άρα η σειρά συγκλίνει.

23. *Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

Υπόδειξη. (α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1}$: παρατηρούμε ότι

$$\frac{a_k}{1/k^2}=\frac{k^3+k^2\sqrt{k}}{2k^3-1}\to\frac{1}{2}>0.$$

Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{k}-1)$: θέτουμε $\theta_k=\sqrt[k]{k}-1\geq 0$. Τότε, $k=(1+\theta_k)^k$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k\geq 3$,

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<e<3\leq k=(1+\theta_k)^k.$$

Άρα, $\theta_k>\frac{1}{k}$ για κάθε $k\geq 3$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\theta_k$ αποκλίνει κι αυτή.

(γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos^2 k}{k^2}$: παρατηρούμε ότι $|a_k|\leq\frac{1}{k^2}$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης.

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$: χρησιμοποιούμε το κριτήριο λόγου. Έχουμε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(k+1)!k^k}{k!(k+1)^{k+1}}=\frac{k^k}{(k+1)^k}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\to\frac{1}{e}<1,$$

άρα η σειρά συγκλίνει.

24. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές. Όπου εμφανίζονται οι παράμετροι $p,q,x\in\mathbb{R}$ να βρεθούν οι τιμές τους για τις οποίες οι αντίστοιχες σειρές συγκλίνουν.*

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}$ (β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p^kk^p$ $(0<p)$ (γ) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^p-k^q}$ $(0<q<p)$

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ (ε) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^k-q^k}$ $(0<q<p)$ (στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^k}{2^k}$

(ζ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ (η) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^p\left(\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)$.

Υπόδειξη. (α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}$: χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας. Έχουμε $\sqrt[k]{a_k}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}\to\frac{1}{e}<1$, άρα η σειρά συγκλίνει.

(β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p^kk^p$: χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου. Έχουμε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=p\frac{(k+1)^p}{k^p}\to p,$$

άρα η σειρά συγκλίνει αν $0<p<1$ και αποκλίνει αν $p>1$. Για $p=1$ παίρνουμε τη σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k$, η οποία αποκλίνει ($k\not\to 0$ όταν $k\to\infty$!).

(γ) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p - k^q}$: θεωρούμε την $b_k = 1/k^p$. Αφού $q < p$, έχουμε $\frac{a_k}{b_k} = \frac{1}{1-k^{-(p-q)}} \to 1 > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά μας συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει, δηλαδή αν και μόνο αν $p > 1$ (και $0 < q < p$).

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$: θεωρούμε την $b_k = 1/k$. Έχουμε $\frac{a_k}{b_k} = \frac{k}{k\sqrt[k]{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \to 1 > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά αποκλίνει (διότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει).

(ε) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - q^k}$: θεωρούμε την $b_k = 1/p^k$. Αφού $0 < q < p$, έχουμε $\frac{a_k}{b_k} = \frac{1}{1-(q/p)^k} \to 1 > 0$ (διότι $(p/q)^k \to 0$ αφού $0 < p/q < 1$). Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά μας συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k}$ συγκλίνει, δηλαδή αν και μόνο αν $p > 1$ (και $0 < q < p$).

(στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$: παρατηρούμε ότι $0 < a_k \leq \frac{3}{2^k}$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ συγκλίνει, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης.

(ζ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$: παρατηρούμε ότι

$$a_k = k^p \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \frac{k^p}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}.$$

Θεωρούμε την $b_k = \frac{k^p}{k^{3/2}}$ και παρατηρούμε ότι $\frac{a_k}{b_k} \to \frac{1}{2} > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{(3/2)-p}}$ συγκλίνει. Δηλαδή, αν $\frac{3}{2} - p > 1$, το οποίο ισχύει αν $p < \frac{1}{2}$.

(η) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p \left(\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)$: παρατηρούμε ότι, για $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} a_k &= k^p(\sqrt{k+1} - \sqrt{k} + \sqrt{k-1} - \sqrt{k}) \\ &= k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k-1}}\right) \\ &= -2k^{p-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{k-1}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k-1})}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, η $(a_k)_{k\geq 2}$ έχει αρνητικούς όρους. Άρα, συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-a_k)$ συγκλίνει (εξηγήστε γιατί). Θεωρούμε την $b_k = \frac{k^p}{k^2}$ και παρατηρούμε ότι $\frac{-a_k}{b_k} \to 1 > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2-p}}$ συγκλίνει. Δηλαδή, αν $2 - p > 1$, το οποίο ισχύει αν $p < 1$.

25. *Έστω ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+k^2 a_k}$ συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $0 \le \frac{a_k}{1+k^2 a_k} \le \frac{1}{k^2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι φανερό αν $a_k = 0$, ενώ αν $a_k > 0$ μπορείτε να γράψετε

$$0 < \frac{a_k}{1+k^2 a_k} < \frac{a_k}{k^2 a_k} = \frac{1}{k^2}.$$

Αφού η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, το συμπέρασμα προκύπτει από το κριτήριο σύγκρισης.

26. *Ορίζουμε μια ακολουθία (a_k) ως εξής: αν ο k είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k}$ και αν ο k δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k^2}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.*

Υπόδειξη. Η σειρά έχει θετικούς όρους. Αρκεί να δείξετε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη. Παρατηρήστε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} s_{m^2} = \sum_{k=1}^{m^2} a_k &= \sum_{k=1}^{m} a_{k^2} + \sum_{\substack{k \le m^2 \\ k \neq s^2}} a_k \\ &\le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{m^2} \frac{1}{k^2} \\ &\le 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = M < +\infty. \end{aligned}$$

Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε $s_n \le s_{n^2} \le M$. Δηλαδή, η (s_n) είναι άνω φραγμένη.

27. *Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^p}$, όπου $p \in \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Αν $p > 0$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει από το κριτήριο του Dirichlet. Αν $p \le 0$, τότε $(-1)^k \frac{1}{k^p} \not\to 0$, άρα η σειρά αποκλίνει.

28. *Έστω $\{a_k\}$ φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο 0. Ορίζουμε*

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k.$$

Δείξτε ότι $0 \le (-1)^n (s - s_n) \le a_{n+1}$.

Υπόδειξη. Γράφουμε $(-1)^n (s-s_n) = (-1)^n \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n+k-1} a_k$. Παρατηρήστε ότι: για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+2m} (-1)^{n+k-1} a_k = (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{n+2m-1} - a_{n+2m}) \ge 0,$$

άρα

$$(-1)^n (s - s_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+2m} (-1)^{n+k-1} a_n \ge 0.$$

Επίσης,

$$\sum_{k=n+1}^{n+2m+1}(-1)^{n+k-1}a_k = a_{n+1}-(a_{n+2}-a_{n+3})-\cdots-(a_{n+2m}-a_{n+2m+1}) \leq a_{n+1},$$

άρα

$$(-1)^n(s-s_n)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{n+2m+1}(-1)^{n+k-1}a_n \leq a_{n+1}.$$

29. *Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $ka_k \to 0$.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy. Άρα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n > m \geq n_0$ τότε

$$a_{m+1}+\cdots+a_n = |s_n - s_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ειδικότερα, αν $n \geq 2n_0$, παίρνοντας $m = n_0$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η (a_n) είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\frac{\varepsilon}{2} > a_{n_0+1}+\cdots+a_n \geq (n-n_0)a_n \geq \frac{na_n}{2},$$

διότι $n - n_0 \geq \frac{n}{2}$. Δηλαδή, αν $n \geq 2n_0$ έχουμε $na_n < \varepsilon$. Έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(na_n) = 0$.

30. *Έστω ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι οι*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{1+a_k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2}{1+a_k^2}$$

συγκλίνουν επίσης.

Υπόδειξη. (α) Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, έχουμε $a_k \to 0$. Άρα, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k \geq m$, $0 \leq a_k \leq 1$. Τότε, για κάθε $k \geq m$ έχουμε $0 \leq a_k^2 \leq a_k$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(β) Παρατηρήστε ότι $0 \leq \frac{a_k}{1+a_k} \leq a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ συγκλίνει.

(γ) Παρατηρήστε ότι $0 \leq \frac{a_k^2}{1+a_k^2} \leq a_k^2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

31. *Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι, αν η $\{a_k\}$ είναι φθίνουσα, τότε ισχύει και το αντίστροφο.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $0 \leq \sqrt{a_k a_{k+1}} \leq \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και εφαρμόστε το κριτήριο σύγκρισης.

Με την υπόθεση ότι η (a_k) είναι φθίνουσα, παρατηρήστε ότι $0 \leq a_{k+1} \leq \sqrt{a_k a_{k+1}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και εφαρμόστε το κριτήριο σύγκρισης.

32. *Υποθέτουμε ότι* $a_k \geq 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *και ότι η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ *συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \leq \sqrt{M_1 M_2},$$

όπου

$$M_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \quad \text{και} \quad M_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

33. *Υποθέτουμε ότι* $a_k \geq 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *και ότι η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *αποκλίνει. Δείξτε ότι*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1.$$

Υπόδειξη. Αν $b_0 = 1$ και

$$b_k = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}$$

για $k \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι

$$\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = b_{k-1} - b_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = b_0 - b_n = 1 - b_n.$$

Παρατηρώντας ότι

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) > a_1 + \cdots + a_n \to +\infty$$

δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1 - b_n \to 1.$$

Γ′ Ομάδα

34. *Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $a_k \to 0$. Δείξτε ότι: αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{a_k, \frac{1}{k}\right\} = +\infty.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{a_k, \frac{1}{k}\right\}$ συγκλίνει. Αφού η (a_k) φθίνει προς το 0, το ίδιο ισχύει για την $\left(\min\{a_k, \frac{1}{k}\}\right)$ (εξηγήστε γιατί). Από το κριτήριο συμπύκνωσης, η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \min\left\{a_{2^k}, \frac{1}{2^k}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{2^k a_{2^k}, 1\right\}$$

συγκλίνει. Ειδικότερα, $\min\left\{2^k a_{2^k}, 1\right\} \to 0$, άρα τελικά έχουμε $\min\left\{2^k a_{2^k}, 1\right\} = 2^k a_{2^k}$ (εξηγήστε γιατί).

Έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. Χρησιμοποιώντας ξανά το κριτήριο συμπύκνωσης, αυτή τη φορά για τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, βλέπουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Αυτό είναι άτοπο από την υπόθεση.

35. *Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.*

(α) *Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ αποκλίνει.*

(β) *Δείξτε ότι: για $1 \leq m < n$,*

$$\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} \geq 1 - \frac{s_m}{s_n}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ αποκλίνει.

(γ) *Δείξτε ότι $\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.*

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ συγκλίνει. Τότε,

$$\frac{a_k}{1+a_k} \to 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{1+a_k} = 1 - \frac{a_k}{1+a_k} \to 1 \quad \Rightarrow 1 + a_k \to 1.$$

Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: $1 + a_k < \frac{3}{2}$ για κάθε $k \geq m$. Έπεται ότι $0 \leq a_k \leq \frac{3}{2}\frac{a_k}{1+a_k}$ για κάθε $k \geq m$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, άτοπο.

(β) Παρατηρήστε ότι η (s_n) είναι αύξουσα. Άρα, αν $1 \leq m < n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} &\geq \frac{a_{m+1}}{s_n} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} = \frac{a_{m+1} + \cdots + a_n}{s_n} \\ &= \frac{s_n - s_m}{s_n} = 1 - \frac{s_m}{s_n}.\end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο Cauchy, για $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n > m \geq n_0$ τότε

$$\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} < \frac{1}{2},$$

δηλαδή

$$1 - \frac{s_m}{s_n} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{s_m}{s_n} > \frac{1}{2}.$$

Σταθεροποιήστε $m \geq n_0$ και αφήστε το $n \to \infty$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει, έχουμε $s_n \to \infty$. Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_m}{s_n} = 0$, το οποίο οδηγεί σε άτοπο.

(γ) Παρατηρήστε ότι

$$\frac{a_n}{s_n^2} = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n^2} \leq \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}} = \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}.$$

Αν t_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$, τότε

$$t_n = \frac{a_1}{s_1^2} + \frac{a_2}{s_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_1} + \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}\right) \leq \frac{2}{s_1}.$$

Η (t_n) είναι άνω φραγμένη, άρα η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

36. *Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$.*

(α) *Δείξτε ότι: για $1 \leq m < n$,*

$$\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} \geq 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ αποκλίνει.

(β) *Δείξτε ότι $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$ και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, έχουμε $r_n \to 0$. Παρατηρήστε επίσης ότι η (r_n) είναι φθίνουσα.

(α) Αν $1 \leq m < n$,

$$\begin{aligned} \frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} &\geq \frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_m} \geq \frac{a_m + \cdots + a_n}{r_m} \\ &= \frac{r_m - r_{n+1}}{r_m} = 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m} \geq 1 - \frac{r_n}{r_m}. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο Cauchy υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n > m \geq n_0$,

$$1 - \frac{r_n}{r_m} \leq \frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} < \frac{1}{2}.$$

Σταθεροποιώντας $m \geq n_0$ και αφήνοντας το $n \to \infty$ καταλήξτε σε άτοπο.

(β) Παρατηρήστε ότι

$$\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}} = \frac{r_n - r_{n+1}}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} = \frac{a_n}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} \geq \frac{a_n}{2\sqrt{r_n}}.$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}} \leq 2\left(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \sqrt{r_2} - \sqrt{r_3} + \cdots + \sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right) \leq 2\sqrt{r_1}.$$

Έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

37. *Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k$ αποκλίνει.*

Υπόδειξη. Θέτουμε $b_k = k a_k$. Τότε, θέλουμε να δείξουμε ότι: αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ αποκλίνει.

Παρατηρήστε ότι αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα. Αφού η $\frac{1}{k}$ φθίνει προς το 0, το κριτήριο Dirichlet δείχνει ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ συγκλίνει, το οποίο είναι άτοπο.

38. *Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{k}{k+1}}$ συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Γράφουμε $a_k^{\frac{k}{k+1}} = \frac{a_k}{a_k^{\frac{1}{k+1}}}$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $a_k > 1/2^{k+1}$ τότε $a_k^{\frac{1}{k+1}} > 1/2$. Συνεπώς,

$$a_k^{\frac{k}{k+1}} \leq 2a_k.$$

(β) Αν $a_k \leq 1/2^{k+1}$ τότε

$$a_k^{\frac{k}{k+1}} \leq \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{2^k}.$$

Σε κάθε περίπτωση,

$$a_k^{\frac{k}{k+1}} \leq 2a_k + \frac{1}{2^k}.$$

Όμως, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} (2a_k + 2^{-k})$ συγκλίνει. Το ζητούμενο έπεται από το κριτήριο σύγκρισης.

39. *Έστω (a_k) η ακολουθία που ορίζεται από τις*

$$a_{2k-1} = \frac{1}{k} \quad \textit{και} \quad a_{2k} = \frac{1}{2^k}.$$

Εξετάστε αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - 1. \end{aligned}$$

Αφού $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to +\infty$ όταν $n \to \infty$, βλέπουμε ότι $s_{2n} \to +\infty$. Άρα, η σειρά αποκλίνει (και μάλιστα στο $+\infty$ – εξηγήστε γιατί).

40. *Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε*

$$b_k = \frac{1}{k} \sum_{m=k+1}^{2k} a_m.$$

Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Έστω s_n και t_n τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ αντίστοιχα. Θα συγκρίνουμε τα s_{2n} και t_n. Έχουμε

$$t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_2 + \frac{1}{2}(a_3 + a_4) + \frac{1}{3}(a_4 + a_5 + a_6) + \cdots + \frac{1}{n}(a_{n+1} + \cdots + a_{2n}).$$

Δείξτε ότι στο t_n εμφανίζονται μόνο οι $a_2, \ldots, a_{2n}$ και ότι ο συντελεστής καθενός a_k στο t_n είναι μικρότερος ή ίσος του 1. Έπεται ότι $t_n \leq s_{2n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει.

Από την άλλη πλευρά, θεωρήστε το μερικό άθροισμα t_{2n}, και δείξτε ότι κάθε a_k, $2 \leq k \leq n$, εμφανίζεται εκεί με συντελεστή $\sigma_k = \frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{2m-1}$ αν ο k είναι άρτιος, και συντελεστή $\sigma_k = \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m}$ αν ο k είναι περιττός. Σε κάθε περίπτωση, $\sigma_k \geq \frac{1}{2}$. Άρα,

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + 2t_{2n}.$$

Έπεται ότι, αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

41. *Εστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε την ακολουθία*

$$b_k = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k}{k(k+1)}.$$

Δείξτε ότι: αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει και τα αθροίσματα των δύο σειρών είναι ίσα.

Υπόδειξη. Αν $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $t_n = b_1 + \cdots + b_n$, τότε

$$\begin{aligned}
t_n &= \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{k} \frac{sa_s}{k(k+1)} \\
&= \sum_{s=1}^{n} sa_s \sum_{k=s}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{s=1}^{n} sa_s \sum_{k=s}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n} sa_s \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n} a_s - \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n+1} \\
&= s_n - nb_n.
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι

$$nb_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n+1} \to 0.$$

Με βάση το Λήμμα του Abel, γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = \sum_{k=1}^{n-1} s_k(k - (k+1)) + ns_n - 1 = -\sum_{k=1}^{n-1} s_k + ns_n - 1.$$

Άρα,

$$nb_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} ka_k = -\frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n-1} + \frac{ns_n}{n+1} - \frac{1}{n+1} \to -s + s - 0 = 0,$$

όπου $s = \lim s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (εδώ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αν $s_n \to s$ τότε $\frac{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}}{n-1} \to s$). Αφού $nb_n \to 0$, από την $t_n = s_n - nb_n$ βλέπουμε ότι $t_n \to s$.

Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

42. *Έστω* (a_k) *ακολουθία θετικών αριθμών ώστε* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ *και* $a_k \to 0$. *Δείξτε ότι αν* $0 \leq \alpha < \beta$ *τότε υπάρχουν φυσικοί* $m \leq n$ *ώστε*

$$\alpha < \sum_{k=m}^{n} a_k < \beta.$$

Υπόδειξη. Αφού $a_k \to 0$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $k \geq m$ τότε

$$a_k < \beta - \alpha.$$

Αφού $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$, υπάρχει ελάχιστος φυσικός $\ell \geq m$ ώστε

$$a_m + \cdots + a_\ell \geq \beta.$$

(α) Δείξτε ότι $\ell > m$.
(β) Αν $n = \ell - 1$, παρατηρήστε ότι $n \geq m$ και

$$a_m + \cdots + a_n < \beta,$$

ενώ

$$a_m + \cdots + a_n \geq \beta - a_\ell > \beta - (\beta - \alpha) = \alpha.$$

43. *Δείξτε ότι αν* $0 \leq \alpha < \beta$ *τότε υπάρχουν φυσικοί* $m \leq n$ *ώστε*

$$\alpha < \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n} < \beta.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση για την $a_k = \frac{1}{k}$.