Κεφάλαιο 1

Υπακολουθίες και ακολουθίες Cauchy

Ομάδα Α΄. Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. *$a_n \to +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M.*

Λάθος. Θεωρήστε την ακολουθία (a_n) με $a_{2k} = k$ και $a_{2k-1} = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $M > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M. Πράγματι, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $k_0 > M$, και τότε, για κάθε $k \geq k_0$ ισχύει $a_{2k} = k \geq k_0 > M$. Όμως, $a_n \not\to +\infty$: αν αυτό ίσχυε, θα έπρεπε όλοι τελικά οι όροι της (a_n) να είναι μεγαλύτεροι από 2, το οποίο δεν ισχύει αφού όλοι οι περιττοί όροι της (a_n) είναι ίσοι με 1.

Η άλλη κατεύθυνση είναι σωστή: αν $a_n \to +\infty$ τότε (από τον ορισμό) για κάθε $M > 0$ όλοι τελικά οι όροι της (a_n) είναι μεγαλύτεροι από M. Άρα, για κάθε $M > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M.

2. *Η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to +\infty$.*

Σωστό. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to +\infty$. Έστω $M > 0$. Αφού $a_{k_n} \to +\infty$, όλοι τελικά οι όροι a_{k_n} είναι μεγαλύτεροι από M. Οπότε, υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M. Αφού ο $M > 0$ ήταν τυχών, η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

Άλλος τρόπος: αν η (a_n) ήταν άνω φραγμένη, τότε και κάθε υπακολουθία της (a_n) θα ήταν άνω φραγμένη. Τότε όμως, η (a_n) δεν θα μπορούσε να έχει υπακολουθία η οποία να τείνει στο $+\infty$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Θα βρούμε επαγωγικά $k_1 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $a_{k_n} > n$. Τότε, για την υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) θα έχουμε $a_{k_n} \to +\infty$:

Αφού η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, μπορούμε να βρούμε $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{k_1} > 1$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί $k_1 < \cdots < k_m$ ώστε $a_{k_j} > j$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$.

Θέτουμε $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{k_m}, m+1\}$. Αφού η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, μπορούμε να βρούμε $k_{m+1} \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{k_{m+1}} > M$. Από τον ορισμό του M έχουμε $a_{k_{m+1}} > m+1$ και $a_{k_{m+1}} > a_n$ για κάθε $n = 1, 2, \dots, k_m$. Συνεπώς, $k_{m+1} > k_m$. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

3. *Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει.*

Σωστό. Υποθέτουμε ότι $a_n \to a$. Έστω $(b_n) = (a_{k_n})$ μια υπακολουθία της (a_n) και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $k_n \geq n \geq n_0$, άρα $|b_n - a| = |a_{k_n} - a| < \varepsilon$. Έπεται ότι $b_n \to a$.

4. *Αν μια ακολουθία δεν έχει φθίνουσα υπακολουθία τότε έχει μια γνησίως αύξουσα υπακολουθία.*

Σωστό. Θυμηθείτε τον ορισμό του σημείου κορυφής μιας ακολουθίας (a_n): η (a_n) έχει *σημείο κορυφής* τον όρο a_k αν $a_k \geq a_m$ για κάθε $m \geq k$.

Αφού η (a_n) δεν έχει φθίνουσα υπακολουθία, δεν μπορεί να έχει άπειρα σημεία κορυφής: πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ ώστε οι όροι $a_{k_1}, \dots, a_{k_n}, \dots$ να είναι σημεία κορυφής της (a_n). Τότε,

$$a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \cdots \geq a_{k_n} \geq \cdots,$$

δηλαδή η υπακολουθία (a_{k_n}) είναι φθίνουσα.

Άρα, η (a_n) έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία κορυφής: Υπάρχει δηλαδή $k_1 \in \mathbb{N}$ (το τελευταίο σημείο κορυφής ή ο $k_1 = 1$ αν δεν υπάρχουν σημεία κορυφής) με την ιδιότητα: αν $n \geq k_1$, υπάρχει $n' > n$ ώστε $a_{n'} > a_n$.

Βρίσκουμε $k_2 > k_1$ ώστε $a_{k_1} < a_{k_2}$, κατόπιν βρίσκουμε $k_3 > k_2$ ώστε $a_{k_2} < a_{k_3}$ και ούτω καθεξής. Υπάρχουν δηλαδή $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ ώστε

$$a_{k_1} < a_{k_2} < \cdots < a_{k_n} < \cdots.$$

Άρα, η (a_n) έχει τουλάχιστον μία γνησίως αύξουσα υπακολουθία.

5. *Αν η (a_n) είναι φραγμένη και $a_n \not\to a$ τότε υπάρχουν $b \neq a$ και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to b$.*

Σωστό. Στην Άσκηση 15 παρακάτω αποδεικνύεται ότι αν η ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει στον a τότε υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon$. Αφού η (a_n) είναι φραγμένη, η (a_{k_n}) είναι επίσης φραγμένη. Από το θεώρημα Bolzano–Weierstrass η (a_{k_n}) έχει υπακολουθία $(a_{k_{l_n}})$ η οποία συγκλίνει σε κάποιον $b \in \mathbb{R}$. Όμως, $|a_{k_{l_n}} - a| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $|b - a| = \lim_{n\to\infty} |a_{k_{l_n}} - a| \geq \varepsilon$. Δηλαδή, $b \neq a$.

6. *Υπάρχει φραγμένη ακολουθία που δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Λάθος. Από το θεώρημα Bolzano–Weierstrass, κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

7. *Αν η (a_n) δεν είναι φραγμένη, τότε δεν έχει φραγμένη υπακολουθία.*

Λάθος. Θεωρήστε την ακολουθία (a_n) με $a_{2k} = k$ και $a_{2k-1} = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Η (a_n) δεν είναι φραγμένη, όμως η υπακολουθία (a_{2k-1}) είναι σταθερή (άρα, φραγμένη).

8. *Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία. Κάθε υπακολουθία της (a_n) είναι αύξουσα.*

Σωστό. Θεωρήστε μια υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n). Αν $n \in \mathbb{N}$ τότε $k_n < k_{n+1}$. Η (a_n) είναι αύξουσα, άρα: αν $s, t \in \mathbb{N}$ και $s < t$ τότε $a_s \leq a_t$ (εξηγήστε γιατί). Παίρνοντας $s = k_n$ και $t = k_{n+1}$ συμπεραίνουμε ότι $a_{k_n} \leq a_{k_{n+1}}$.

9. *Αν η (a_n) είναι αύξουσα και για κάποια υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) έχουμε $a_{k_n} \to a$, τότε $a_n \to a$.*

Σωστό. Υποθέτουμε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) η οποία συγκλίνει στον $a \in \mathbb{R}$.

Αφού $a_{k_n} \to a$, η (a_{k_n}) είναι φραγμένη. Συνεπώς, υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{k_n} \leq M$. Θα δείξουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n \leq M$. Τότε, η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνει.

Θεωρήστε τυχόντα $n \in \mathbb{N}$. Αφού $n \leq k_n$ και η (a_n) είναι αύξουσα, έχουμε $a_n \leq a_{k_n} \leq M$.

10. *Αν $a_n \to 0$ τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $n^2 a_{k_n} \to 0$.*

Σωστό. Θα βρούμε επαγωγικά $k_1 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $|a_{k_n}| < \frac{1}{n^3}$. Τότε, για την υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) θα έχουμε $n^2 a_{k_n} \to 0$ (εξηγήστε γιατί).

Αφού $a_n \to 0$, μπορούμε να βρούμε $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_{k_1}| < 1$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί $k_1 < \cdots < k_m$ ώστε $|a_{k_j}| < \frac{1}{j^3}$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{(m+1)^3} > 0$. Αφού $a_n \to 0$, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n| < \frac{1}{(m+1)^3}$ για κάθε $n \geq n_0$. Ειδικότερα, υπάρχει $k_{m+1} > k_m$ ώστε $|a_{k_{m+1}}| < \frac{1}{(m+1)^3}$. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

Ομάδα Β′

11. *Έστω (a_n) μια ακολουθία. Δείξτε ότι $a_n \to a$ αν και μόνο αν οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) συγκλίνουν στο a.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) συγκλίνουν στον a.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geq n_1$ ισχύει $|a_{2k} - a| < \varepsilon$. Επίσης, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geq n_2$ ισχύει $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$. Αν θέσουμε $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$ τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$.

[Πράγματι, παρατηρήστε ότι αν ο n είναι άρτιος τότε $n = 2k$ για κάποιον $k \geq n_1$ ενώ αν ο n είναι περιττός τότε $n = 2k - 1$ για κάποιον $k \geq n_2$.]

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $a_n \to a$.

Το αντίστροφο είναι απλό: έχουμε δει ότι αν μια ακολουθία (a_n) συγκλίνει στον $a \in \mathbb{R}$ τότε κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) συγκλίνει στον a.

12. *Έστω (a_n) μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες (a_{2k}), (a_{2k-1}) και (a_{3k}) συγκλίνουν. Δείξτε ότι:*

(α) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{3k}$.

(β) Η (a_n) συγκλίνει.

Υπόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $a_{2k} \to x$, $a_{2k-1} \to y$ και $a_{3k} \to z$. Παρατηρήστε ότι:

(i) Η (a_{6k}) είναι ταυτόχρονα υπακολουθία της (a_{2k}) και υπακολουθία της (a_{3k}). Άρα, η (a_{6k}) συγκλίνει και $x = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{6k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{3k} = z$.

(ii) Η (a_{6k-3}) είναι ταυτόχρονα υπακολουθία της (a_{2k-1}) και υπακολουθία της (a_{3k}). Άρα, η (a_{6k-3}) συγκλίνει και $y = \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} a_{6k-3} = \lim_{k\to\infty} a_{3k} = z$.
Έπεται ότι $x = y = z$. Αφού οι (a_{2k}) και (a_{2k-1}) έχουν το ίδιο όριο, η Άσκηση 11 δείχνει ότι η (a_n) συγκλίνει.

13. *Έστω (a_n) μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι $a_{2n} \le a_{2n+2} \le a_{2n+1} \le a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι $\lim_{n\to\infty}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 0$. Τότε η (a_n) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό a που ικανοποιεί την $a_{2n} \le a \le a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:
(α) Η (a_{2n}) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον a_1 ενώ η (a_{2n-1}) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον a_2. Πράγματι, από την υπόθεση έχουμε ότι η (a_{2n}) είναι αύξουσα και η (a_{2n-1}) είναι φθίνουσα. Ειδικότερα,

$$a_2 \le a_{2n} \le a_{2n-1} \le a_1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(β) Υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $a_{2n} \to a$ και $a_{2n-1} \to b$. Αυτό είναι άμεσο από το γεγονός ότι η (a_{2n}) είναι αύξουσα και η (a_{2n-1}) είναι φθίνουσα (γνωρίζουμε ότι κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει).
(γ) $a = b$: αυτό προκύπτει από την υπόθεση ότι $a_{2n-1} - a_{2n} \to 0$. Αφού $a_{2n} \to a$ και $a_{2n-1} \to b$, έχουμε

$$b - a = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} - \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 0.$$

(δ) $a_n \to a = b$: στο (γ) είδαμε ότι

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = b.$$

Από την Άσκηση 11 έπεται ότι η (a_n) συγκλίνει και

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = b.$$

(ε) $a_{2n} \le a \le a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι φανερό αφού η (a_{2n}) είναι αύξουσα, η (a_{2n-1}) είναι φθίνουσα και ο a είναι το κοινό τους όριο. Γνωρίζουμε ότι

$$a = \sup\{a_{2n} : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{a_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}.$$

14. *Έστω (a_n) μια ακολουθία και έστω (x_k) ακολουθία οριακών σημείων της (a_n). Υποθέτουμε οτι $x_k \to x$. Δείξτε οτι ο x είναι οριακό σημείο της (a_n).*

Υπόδειξη. Σύμφωνα με τον χαρακτηρισμό του οριακού σημείου ακολουθίας, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που ικανοποιούν την $|a_n - x| < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_k \to x$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_k - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ (για την ακρίβεια, όλοι τελικά οι όροι της (x_k) έχουν αυτή την ιδιότητα). Σταθεροποιούμε τον x_k και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο x_k είναι οριακό σημείο της (a_n): υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που ικανοποιούν την $|a_n - x_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Για όλους αυτούς τους όρους βλέπουμε ότι

$$|a_n - x| \le |a_n - x_k| + |x_k - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

15. *Δείξτε ότι η ακολουθία* (a_n) *δεν συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό* a*, αν και μόνο αν υπάρχουν* $\varepsilon > 0$ *και υπακολουθία* (a_{k_n}) *της* (a_n) *ώστε* $|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Δείξτε τις ισοδυναμίες $(1) \iff (2) \iff (3) \iff (4)$:

(1) Η ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει στον a.

(2) Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε άπειροι όροι a_m της (a_n) να ικανοποιούν την $|a_m - a| \geq \varepsilon$.

(3) Υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και φυσικοί αριθμοί $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon$.

(4) Υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon$.

16. *Έστω* (a_n) *ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω* $a \in \mathbb{R}$. *Δείξτε ότι* $a_n \to a$ *αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της* (a_n) *έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο* a.

Υπόδειξη. ($\Longrightarrow$) Υποθέστε πρώτα ότι $a_n \to a$. Αν (a_{k_n}) είναι μια υπακολουθία της (a_n) τότε $a_{k_n} \to a$. Άρα, όλες οι υπακολουθίες της (a_{k_n}) συγκλίνουν κι αυτές στον a.

($\Longleftarrow$) Με απαγωγή σε άτοπο: υποθέστε ότι η (a_n) δεν συγκλίνει στον a. Από την Άσκηση 15, υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon$. Τότε, αν πάρουμε οποιαδήποτε υπακολουθία της (a_{k_n}), όλοι οι όροι της θα είναι ε-μακριά από τον a. Δηλαδή, η (a_{k_n}) δεν έχει υπακολουθία που να συγκλίνει στον a.

17. *Ορίζουμε μια ακολουθία* (a_n) *με* $a_1 > 0$ *και*

$$a_{n+1} = 1 + \frac{2}{1 + a_n}.$$

Δείξτε ότι οι υπακολουθίες (a_{2k}) *και* (a_{2k-1}) *είναι μονότονες και φραγμένες. Βρείτε, αν υπάρχει, το* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Υπόδειξη. Δείξτε πρώτα ότι η (a_n) ορίζεται καλά και $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, δείξτε ότι αν $a_n \to x$ τότε $x = \sqrt{3}$.

(i) Υποθέστε ότι $0 < a_1 < \sqrt{3}$. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(α) $a_2 > \sqrt{3}$.

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η $a_{n+2} = \frac{3+2a_n}{2+a_n}$.

(γ) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι $a_{2k-1} < \sqrt{3}$ και $a_{2k-1} < a_{2k+1}$.

(δ) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι $a_{2k} > \sqrt{3}$ και $a_{2k+2} < a_{2k}$.

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 13 δείξτε ότι οι (a_{2k-1}) και (a_{2k}) συγκλίνουν. Χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση ανάμεσα στον a_{n+2} και τον a_n δείξτε ότι $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \sqrt{3}$. Από την Άσκηση 11 έπεται ότι $a_n \to \sqrt{3}$.

(ii) Εξετάστε με τον ίδιο τρόπο την περίπτωση $a_1 > \sqrt{3}$.

(iii) Τέλος, δείξτε ότι αν $a_1 = \sqrt{3}$ τότε έχουμε $a_n = \sqrt{3}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

18. *Βρείτε το ανώτερο και το κατώτερο όριο των ακολουθιών*

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right), \\ b_n &= \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)+\frac{1}{n+1}, \\ \gamma_n &= \frac{n^2((-1)^n+1)+2n+1}{n+1}. \end{aligned}$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $-1-\frac{1}{n} \leq a_n \leq 1+\frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν λοιπόν θεωρήσουμε οποιαδήποτε *συγκλίνουσα* υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n), τότε το κριτήριο παρεμβολής δείχνει ότι $-1 \leq \lim a_{k_n} \leq 1$. Έπεται ότι $\liminf a_n \geq -1$ και $\limsup a_n \leq 1$.

Από την άλλη πλευρά, $a_{2n} = -1-\frac{1}{2n} \to -1$ και $a_{2n-1} = 1+\frac{1}{2n-1} \to 1$. Δηλαδή, ο 1 και ο -1 είναι οριακά σημεία της (a_n). Έπεται ότι $\limsup a_n = 1$ και $\liminf a_n = -1$ (εξηγήστε γιατί).

Άλλος τρόπος: Δοκιμάστε να δείξετε ότι $1 = \limsup a_n$ με τον χαρακτηρισμό του $\limsup$: πάρτε τυχόν $\varepsilon > 0$ και δείξτε ότι το $\{n : a_n > 1-\varepsilon\}$ είναι άπειρο (οι περιττοί όροι είναι μεγαλύτεροι από 1) ενώ το $\{n : a_n > 1+\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο (για να ισχύει $a_n > 1+\varepsilon$ θα πρέπει να έχουμε $n = 2k-1$ και $\frac{1}{2k-1} > \varepsilon$, δηλαδή $k < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$).

(β) Παρατηρήστε ότι, αν $\upsilon \in \{0,1,\dots,5\}$ τότε

$$\cos\left(\frac{(6k+\upsilon)\pi}{3}\right) = \cos\left(2k\pi+\frac{\upsilon\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\upsilon\pi}{3}\right).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} b_{6k} &= 1+\frac{1}{6k+1} \to 1 \\ b_{6k+1} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6k+2} \to \frac{1}{2} \\ b_{6k+2} &= -\frac{1}{2}+\frac{1}{6k+3} \to -\frac{1}{2} \\ b_{6k+3} &= -1+\frac{1}{6k+4} \to -1 \\ b_{6k+4} &= -\frac{1}{2}+\frac{1}{6k+5} \to -\frac{1}{2} \\ b_{6k+5} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6k+6} \to \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\limsup b_n \geq 1$ (διότι $b_{6k} \to 1$) και $\liminf b_n \leq -1$ (διότι $b_{6k+3} \to -1$). Έστω τώρα (b_{k_n}) τυχούσα συγκλίνουσα υπακολουθία της (b_n). Αυτή θα έχει *άπειρους κοινούς όρους* με τουλάχιστον μία από τις έξι υπακολουθίες που περιγράψαμε (εξηγήστε γιατί). Δηλαδή, θα έχει *κοινή υπακολουθία* $(b_{k_{\lambda_n}})$ με κάποια από τις έξι υπακολουθίες παραπάνω. Αναγκαστικά,

$$\lim b_{k_n} = \lim b_{k_{\lambda_n}} \in \left\{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right\}.$$

Δηλαδή, το σύνολο των οριακών σημείων της (b_n) είναι το $K = \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Έπεται ότι $\limsup b_n = 1$ και $\liminf b_n = -1$.

(γ) Παρατηρήστε ότι $\gamma_{2n} = \frac{2n^2+2n+1}{n+1} \to +\infty$ και $\gamma_{2n-1} = \frac{2n+1}{n+1} \to 2$. Με το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε για το ερώτημα (β) – ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο – δείξτε ότι $\limsup \gamma_n = +\infty$ και $\liminf \gamma_n = 2$.

19. *Έστω (a_n), (b_n) φραγμένες ακολουθίες. Δείξτε οτι*

$$\begin{aligned} \liminf a_n + \liminf b_n &\leq \liminf(a_n + b_n) \\ &\leq \limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n. \end{aligned}$$

Υπόδειξη. Η μεσαία ανισότητα ισχύει προφανώς. Δείχνουμε τη δεξιά ανισότητα (η αριστερή αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο).

Έστω $(a_{k_n} + b_{k_n})$ υπακολουθία της $(a_n + b_n)$ με $a_{k_n} + b_{k_n} \to \limsup(a_n + b_n)$. Η (a_{k_n}) είναι φραγμένη, άρα έχει περαιτέρω υπακολουθία $(a_{k_{\lambda_n}})$ η οποία συγκλίνει: $a_{k_{\lambda_n}} \to x \in \mathbb{R}$. Ο x είναι οριακό σημείο της (a_n), άρα

$$x = \lim a_{k_{\lambda_n}} \leq \limsup a_n.$$

Τότε,

$$b_{k_{\lambda_n}} = (a_{k_{\lambda_n}} + b_{k_{\lambda_n}}) - a_{k_{\lambda_n}} \to \limsup(a_n + b_n) - x.$$

Ο $\limsup(a_n + b_n) - x$ είναι οριακό σημείο της (b_n), άρα

$$\limsup(a_n + b_n) - x \limsup b_n.$$

Έπεται ότι

$$\limsup(a_n + b_n) \leq x + \limsup b_n \leq \limsup a_n + \limsup b_n.$$

20. *Έστω $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.*
(α) Δείξτε οτι

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(β) Αν $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = x$, τότε $\sqrt[n]{a_n} \to x$.

Υπόδειξη. Η μεσαία ανισότητα ισχύει προφανώς. Δείχνουμε την δεξιά ανισότητα (η αριστερή αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο).

Για την απόδειξη της ανισότητας $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = x < +\infty$ (αλλιώς, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον χαρακτηρισμό του $\limsup$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq k$ να ισχύει $\frac{a_{n+1}}{a_n} < x + \varepsilon$. Έπεται ότι: για κάθε $n > k$ ισχύει

$$a_n < a_{n-1}(x+\varepsilon) < a_{n-2}(x+\varepsilon)^2 < \cdots < a_k(x+\varepsilon)^{n-k} = \frac{a_k}{(x+\varepsilon)^k}(x+\varepsilon)^n.$$

Θέτοντας $M = a_k/(x+\varepsilon)^k$, έχουμε

$$a_n \leq M(x+\varepsilon)^n \ \text{ για κάθε } n > k.$$

Χρησιμοποιούμε αυτή την ανισότητα ως εξής: θεωρούμε υπακολουθία $(\sqrt[s_n]{a_{s_n}})$ της $(\sqrt[n]{a_n})$ για την οποία

$$\sqrt[s_n]{a_{s_n}} \to \limsup \sqrt[n]{a_n}.$$

Λόγω της $s_n \geq n$, για κάθε $n > k$ έχουμε $s_n > k$. Άρα,

$$\sqrt[s_n]{a_{s_n}} \leq \sqrt[s_n]{M}\,(x+\varepsilon).$$

Όμως, $\sqrt[s_n]{M} \to 1$. Άρα,

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[s_n]{a_{s_n}} \leq x + \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq x = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

21. *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Δείξτε οτι*

$$\limsup(-a_n) = -\liminf a_n \quad \text{και} \quad \liminf(-a_n) = -\limsup a_n.$$

Υπόδειξη. Δείχνουμε την πρώτη ισότητα. Η δεύτερη αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο ή αν θέσουμε στην πρώτη όπου a_n την $-a_n$.

Θέτουμε $x = \limsup(-a_n)$ και $y = \liminf a_n$. Υπάρχει υπακολουθία $(-a_{k_n})$ της $(-a_n)$ με $-a_{k_n} \to x$. Τότε, $-x = \lim a_{k_n}$, άρα

$$-x \geq y = \liminf a_n.$$

Ομοίως, υπάρχει υπακολουθία (a_{λ_n}) της (a_n) με $a_{\lambda_n} \to y$. Τότε, $-y = \lim(-a_{\lambda_n})$, άρα

$$-y \leq x = \limsup(-a_n),$$

δηλαδή $y \geq -x$.

Έπεται ότι $y = -x$.

22. *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Αν*

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a_n \text{ για άπειρους } n \in \mathbb{N}\},$$

δείξτε ότι $\sup X = \limsup a_n$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $s = \sup X$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον χαρακτηρισμό του $\limsup a_n$:

(α) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $s = \sup X$, υπάρχει $x \in X$ ώστε $s - \varepsilon < x$. Από τον ορισμό του συνόλου X, ισχύει η ανισότητα $x \leq a_n$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, ισχύει η ανισότητα $s - \varepsilon < a_n$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε λοιπόν δείξει ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n > s - \varepsilon\}$ είναι άπειρο.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Αν η ανισότητα $s + \varepsilon < a_n$ ίσχυε για άπειρους $n \in \mathbb{N}$, τότε από τον ορισμό του συνόλου X θα είχαμε $s + \varepsilon \in X$. Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει, διότι $s + \varepsilon > s = \sup X$. Έχουμε λοιπόν δείξει ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n > s + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Από τα (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι $\sup X = s = \limsup a_n$.

23. *Χρησιμοποιώντας την ανισότητα*

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2},$$

δείξτε ότι η ακολουθία $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ δεν είναι ακολουθία Cauchy. Συμπεράνατε ότι $a_n\to+\infty$.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι: για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ είναι ακολουθία Cauchy. Τότε, παίρνοντας $\varepsilon=\frac{1}{4}>0$, μπορούμε να βρούμε $n_0\in\mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $m,n\geq n_0$ ισχύει $|a_m-a_n|<\frac{1}{4}$.

Πάρτε $n\geq n_0$ και $m=2n>n\geq n_0$. Τότε, $|a_{2n}-a_n|<\frac{1}{4}$. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει, διότι

$$\begin{aligned}|a_{2n}-a_n| &= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Εξηγήστε τώρα τα εξής:

(α) Αφού η (a_n) δεν είναι ακολουθία Cauchy, η (a_n) δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(β) Αφού η (a_n) είναι αύξουσα και δεν συγκλίνει, η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

(γ) Αφού η (a_n) είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη, αναγκαστικά $a_n\to+\infty$.

24. *Έστω $0<\mu<1$ και ακολουθία (a_n) για την οποία ισχύει*

$$|a_{n+1}-a_n|\leq\mu|a_n-a_{n-1}|,\quad n\geq 2.$$

Δείξτε ότι η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Υπόδειξη. Έστω $a=a_1$ και $b=a_2$. Από την $|a_{n+1}-a_n|\leq\mu|a_n-a_{n-1}|$ έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι: για κάθε $n\geq 2$ ισχύει

$$|a_{n+1}-a_n|\leq\mu^{n-1}|a_2-a_1|=|b-a|\cdot\mu^{n-1}.$$

Αν λοιπόν $m,n\in\mathbb{N}$ και $m>n$, τότε

$$\begin{aligned}|a_m-a_n| &\leq |a_m-a_{m-1}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\\ &\leq |b-a|\left(\mu^{n-1}+\cdots+\mu^{m-2}\right)\\ &= |b-a|\cdot\mu^{n-1}\cdot\frac{1-\mu^{m-n}}{1-\mu}\\ &\leq \frac{|b-a|\mu^{n-1}}{1-\mu}\\ &= \frac{|b-a|}{\mu(1-\mu)}\cdot\mu^n.\end{aligned}$$

Θεωρήστε $\varepsilon > 0$ και βρείτε $n_0 \in \mathbb{N}$ που ικανοποιεί την $\frac{|b-a|}{\mu(1-\mu)}\mu^{n_0} < \varepsilon$. Τέτοιος n_0 υπάρχει γιατί $\mu^n \to 0$ όταν $n \to \infty$. Τότε, αν $m > n \geq n_0$,

$$|a_m - a_n| \leq \frac{|b-a|}{\mu(1-\mu)} \cdot \mu^n \leq \frac{|b-a|}{\mu(1-\mu)} \cdot \mu^{n_0} < \varepsilon.$$

Δηλαδή, η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

25. *Ορίζουμε $a_1 = a$, $a_2 = b$ και $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$, $n \geq 2$. Εξετάστε αν η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι: για κάθε $n \geq 2$ ισχύει

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} - a_n = -\frac{a_n - a_{n-1}}{2},$$

δηλαδή

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|.$$

Από την Άσκηση 24, η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Ομάδα Γ′

26. *Έστω $m \in \mathbb{N}$. Βρείτε μια ακολουθία (a_n) η οποία να έχει ακριβώς m διαφορετικές υπακολουθίες.*

Υπόδειξη. Αν $m = 1$, θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία $a_n = 1$. Παρατηρήστε ότι κάθε υπακολουθία της (a_n) είναι σταθερή ακολουθία με όλους τους όρους της ίσους με 1, δηλαδή συμπίπτει με την (a_n).

Έστω $m > 1$. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) που ορίζεται ως εξής: $a_n = 0$ αν $n < m$ και $a_n = 1$ αν $n \geq m$. Παρατηρήστε ότι κάθε υπακολουθία της (a_n) είναι τελικά σταθερή και ίση με 1, μπορεί δε να έχει από κανέναν ως $m-1$ πρώτους όρους ίσους με 0 (αυτό εξαρτάται από το πόσους από τους $m-1$ πρώτους όρους της (a_n) έχει σαν όρους η υπακολουθία). Συνεπώς, το πλήθος των διαφορετικών υπακολουθιών της (a_n) είναι ακριβώς m.

27. *Έστω (a_n) μια ακολουθία. Αν $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 1$ και $a_n \neq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει γνησίως αύξουσα υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to 1$.*

Υπόδειξη. Θέτουμε $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Από τον βασικό χαρακτηρισμό του supremum, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x = x(\varepsilon) \in A$ ώστε $1 - \varepsilon < x \leq 1$. Αφού $1 \notin A$, έχουμε την ισχυρότερη ανισότητα $1 - \varepsilon < x < 1$.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, θα βρούμε επαγωγικά $k_1 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $a_{k_1} < \cdots < a_{k_n} < a_{k_{n+1}} < \cdots$ και $1 - \frac{1}{n} < a_{k_n} < 1$. Τότε, για την γνησίως αύξουσα υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) θα έχουμε $a_{k_n} \to 1$.

Εφαρμόζοντας τον χαρακτηρισμό του supremum με $\varepsilon = 1$, βρίσκουμε $a_{k_1} \in A$ που ικανοποιεί την $0 < a_{k_1} < 1$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί $k_1 < \cdots < k_m$ ώστε $a_{k_1} < \cdots < a_{k_m}$ και $1 - \frac{1}{j} < a_{k_j} < 1$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$. Θέτουμε $s = \max\{1 - \frac{1}{m+1}, a_1, a_2, \ldots, a_{k_m}\}$. Αφού $s < 1$ (εξηγήστε γιατί), μπορούμε να βρούμε $a_{k_{m+1}} \in A$ που ικανοποιεί την $s < a_{k_{m+1}} < 1$. Τότε, $k_{m+1} > k_m$, $a_{k_m} < a_{k_{m+1}}$ και $1 - \frac{1}{m+1} < a_{k_{m+1}} < 1$. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

28. *Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αν $\inf A = 0$, δείξτε ότι η (a_n) έχει φθίνουσα υπακολουθία που συγκλίνει στο 0.*

Υπόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί φυσικούς $k_1 < \cdots < k_m$ που ικανοποιούν τα εξής:

$$0 < a_{k_m} < a_{k_{m-1}} < \cdots < a_{k_1} \ \text{ και } \ 0 < a_{k_m} < \frac{1}{m}.$$

Θέτουμε $\varepsilon_{m+1} = \min\left\{a_1, \ldots, a_{k_m}, \frac{1}{m+1}\right\} > 0$. Αφού $\inf(A) = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ και $\varepsilon_{m+1} > 0$, υπάρχει $k_{m+1} \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{k_{m+1}} < \varepsilon_{m+1}$. Από τον ορισμό του ε_{m+1} έπεται ότι (εξηγήστε γιατί):

$$(\text{α})\ k_m < k_{m+1}, \qquad (\text{β})\ a_{k_{m+1}} < a_{k_m}, \qquad (\text{γ})\ a_{k_{m+1}} < \frac{1}{m+1}.$$

Έτσι ορίζεται επαγωγικά μια γνησίως φθίνουσα υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) η οποία συγκλίνει στο 0.

29. *Ορίζουμε μια ακολουθία ως εξής:*

$$a_0 = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}, \quad a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2}.$$

Βρείτε όλα τα οριακά σημεία της (a_n).

Υπόδειξη. Αν γράψετε τους δέκα πρώτους όρους της ακολουθίας (a_n) θα μαντέψετε ότι

$$a_{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{και} \qquad a_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Δουλεύοντας όπως στην Άσκηση 18, δείξτε ότι $\liminf a_n = \frac{1}{2}$ και $\limsup a_n = 1$.

30. *Έστω (x_n) ακολουθία με την ιδιότητα $x_{n+1} - x_n \to 0$. Αν $a < b$ είναι δύο οριακά σημεία της (x_n), δείξτε ότι κάθε $y \in [a, b]$ είναι οριακό σημείο της (x_n).*

Υπόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω $y \in (a, b)$ ο οποίος δεν είναι οριακό σημείο της (x_n). Τότε, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ και $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $a < y - \varepsilon < y + \varepsilon < b$ και $x_n \notin (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ για κάθε $n \geq n_1$.

Αφού $x_{n+1} - x_n \to 0$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_2$,

$$|x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Αφού οι a, b είναι οριακά σημεία της (x_n), μπορούμε να βρούμε $s > m > n_0$ ώστε

$$x_m < y - \varepsilon \quad \text{και} \quad y + \varepsilon < x_s.$$

Η επιλογή του $m > n_0$ είναι δυνατή διότι ο a είναι οριακό σημείο της (x_n) και $a < y - \varepsilon$, ενώ η επιλογή του $s > m$ είναι δυνατή διότι ο b είναι οριακό σημείο της (x_n) και $y + \varepsilon < b$.

Μπορούμε τώρα να βρούμε $m \leq n < s$ ώστε $x_n \leq y - \varepsilon$ και $x_{n+1} \geq y - \varepsilon$. Αρκεί να πάρουμε σαν n τον μεγαλύτερο φυσικό – από τους $m, m+1, \ldots, s-1$ – για τον οποίο $x_n \leq y - \varepsilon$.

Όμως τότε,

$$x_{n+1} - x_n \geq (y + \varepsilon) - (y - \varepsilon) = 2\varepsilon,$$

το οποίο είναι άτοπο, διότι $n \geq m > n_0 \geq n_2$ (θα έπρεπε να ισχύει $|x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon$).

Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα κάθε $y \in (a, b)$ είναι οριακό σημείο της (x_n). Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο, αφού οι a, b είναι επίσης οριακά σημεία της (x_n).

31. (α) *Έστω A αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) ώστε κάθε $x \in A$ να είναι οριακό σημείο της (a_n).*

(β) *Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) ώστε κάθε $x \in \mathbb{R}$ να είναι οριακό σημείο της (x_n).*

Υπόδειξη. (α) Αν $A = \{x_s : s \in \mathbb{N}\}$, μπορείτε να θεωρήσετε την ακολουθία (a_n) που ορίζεται ως εξής:

$$b_1, b_1, b_2, b_1, b_2, b_3, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

Για κάθε $s \in \mathbb{N}$ υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) η οποία είναι σταθερή και ίση με x_s (διότι άπειροι όροι της (a_n) είναι ίσοι με x_s). Άρα, για κάθε $s \in \mathbb{N}$ ο x_s είναι οριακό σημείο της (a_n).

(β) Πάρτε σαν A το $\mathbb{Q}$ στο (α). Αφού το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, υπάρχει ακολουθία (a_n) ώστε κάθε $q \in \mathbb{Q}$ να είναι οριακό σημείο της (a_n). Η (a_n) ικανοποιεί το ζητούμενο: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία (q_k) στο $\mathbb{Q}$ ώστε $q_k \to x$. Αφού κάθε q_k είναι οριακό σημείο της (a_n), η Άσκηση 14 δείχνει ότι και ο x είναι οριακό σημείο της (a_n).

32. *Έστω (a_n) μια ακολουθία. Ορίζουμε*

$$b_n = \sup\{|a_{n+k} - a_n| : k \in \mathbb{N}\}.$$

Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν $b_n \to 0$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $n_0 \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε $m, n \geq n_0$ ισχύει $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$.

(β) Για κάθε $m > n \geq n_0$ ισχύει $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$.

(γ) Για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_{n+k} - a_n| \leq \varepsilon$.

(δ) Για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $b_n := \sup\{|a_{n+k} - a_n| : k \in \mathbb{N}\} \leq \varepsilon$.

Χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία των (α) και (δ) δείξτε ότι η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy (ισοδύναμα, συγκλίνει) αν και μόνο αν $b_n \to 0$.

33. *Έστω $a, b > 0$. Ορίζουμε ακολουθία (a_n) με $a_1 = a$, $a_2 = b$ και*

$$a_{n+2} = \frac{4a_{n+1} - a_n}{3}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Εξετάστε αν η (a_n) συγκλίνει και αν ναι, βρείτε το όριό της.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{4a_{n+1} - a_n}{3} - a_{n+1} = \frac{4a_{n+1} - a_n - 3a_{n+1}}{3} = \frac{a_{n+1} - a_n}{3}.$$

Έπεται ότι

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{3}|a_{n+1} - a_n|.$$

Από την Άσκηση 24, η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy. Συνεπώς, συγκλίνει.

Για να βρούμε το όριο, παρατηρούμε ότι

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{3} = \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{3^2} = \cdots = \frac{a_2 - a_1}{3^{n-1}} = \frac{b-a}{3^{n-1}}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \frac{b-a}{3^{n-2}} = a_{n-2} + \frac{b-a}{3^{n-3}} + \frac{b-a}{3^{n-2}} = \cdots \\ &= a_1 + (b-a)\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{3^k} \to a + (b-a)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = a + \frac{3(b-a)}{2} = \frac{3b-a}{2}. \end{aligned}$$