Ασκήσεις Απειροστικού Λογισμού II

Πρόχειρες Σημειώσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
2010–11

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Υπακολουθίες και ακολουθίες Cauchy

Ομάδα Α΄. Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. *$a_n \to +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M.*

Λάθος. Θεωρήστε την ακολουθία (a_n) με $a_{2k} = k$ και $a_{2k-1} = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $M > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M. Πράγματι, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $k_0 > M$, και τότε, για κάθε $k \geq k_0$ ισχύει $a_{2k} = k \geq k_0 > M$. Όμως, $a_n \not\to +\infty$: αν αυτό ίσχυε, θα έπρεπε όλοι τελικά οι όροι της (a_n) να είναι μεγαλύτεροι από 2, το οποίο δεν ισχύει αφού όλοι οι περιττοί όροι της (a_n) είναι ίσοι με 1.

Η άλλη κατεύθυνση είναι σωστή: αν $a_n \to +\infty$ τότε (από τον ορισμό) για κάθε $M > 0$ όλοι τελικά οι όροι της (a_n) είναι μεγαλύτεροι από M. Άρα, για κάθε $M > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M.

2. *Η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to +\infty$.*

Σωστό. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to +\infty$. Έστω $M > 0$. Αφού $a_{k_n} \to +\infty$, όλοι τελικά οι όροι a_{k_n} είναι μεγαλύτεροι από M. Οπότε, υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M. Αφού ο $M > 0$ ήταν τυχών, η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

Άλλος τρόπος: αν η (a_n) ήταν άνω φραγμένη, τότε και κάθε υπακολουθία της (a_n) θα ήταν άνω φραγμένη. Τότε όμως, η (a_n) δεν θα μπορούσε να έχει υπακολουθία η οποία να τείνει στο $+\infty$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Θα βρούμε επαγωγικά $k_1 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $a_{k_n} > n$. Τότε, για την υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) θα έχουμε $a_{k_n} \to +\infty$:

Αφού η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, μπορούμε να βρούμε $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{k_1} > 1$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί $k_1 < \cdots < k_m$ ώστε $a_{k_j} > j$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$.

Θέτουμε $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{k_m}, m+1\}$. Αφού η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, μπορούμε να βρούμε $k_{m+1} \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{k_{m+1}} > M$. Από τον ορισμό του M έχουμε $a_{k_{m+1}} > m+1$ και $a_{k_{m+1}} > a_n$ για κάθε $n = 1, 2, \dots, k_m$. Συνεπώς, $k_{m+1} > k_m$. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

3. *Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει.*

Σωστό. Υποθέτουμε ότι $a_n \to a$. Έστω $(b_n) = (a_{k_n})$ μια υπακολουθία της (a_n) και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $k_n \geq n \geq n_0$, άρα $|b_n - a| = |a_{k_n} - a| < \varepsilon$. Έπεται ότι $b_n \to a$.

4. *Αν μια ακολουθία δεν έχει φθίνουσα υπακολουθία τότε έχει μια γνησίως αύξουσα υπακολουθία.*

Σωστό. Θυμηθείτε τον ορισμό του σημείου κορυφής μιας ακολουθίας (a_n): η (a_n) έχει *σημείο κορυφής* τον όρο a_k αν $a_k \geq a_m$ για κάθε $m \geq k$.

Αφού η (a_n) δεν έχει φθίνουσα υπακολουθία, δεν μπορεί να έχει άπειρα σημεία κορυφής: πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ ώστε οι όροι $a_{k_1}, \dots, a_{k_n}, \dots$ να είναι σημεία κορυφής της (a_n). Τότε,

$$a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \cdots \geq a_{k_n} \geq \cdots,$$

δηλαδή η υπακολουθία (a_{k_n}) είναι φθίνουσα.

Άρα, η (a_n) έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία κορυφής: Υπάρχει δηλαδή $k_1 \in \mathbb{N}$ (το τελευταίο σημείο κορυφής ή ο $k_1 = 1$ αν δεν υπάρχουν σημεία κορυφής) με την ιδιότητα: αν $n \geq k_1$, υπάρχει $n' > n$ ώστε $a_{n'} > a_n$.

Βρίσκουμε $k_2 > k_1$ ώστε $a_{k_1} < a_{k_2}$, κατόπιν βρίσκουμε $k_3 > k_2$ ώστε $a_{k_2} < a_{k_3}$ και ούτω καθεξής. Υπάρχουν δηλαδή $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ ώστε

$$a_{k_1} < a_{k_2} < \cdots < a_{k_n} < \cdots.$$

Άρα, η (a_n) έχει τουλάχιστον μία γνησίως αύξουσα υπακολουθία.

5. *Αν η (a_n) είναι φραγμένη και $a_n \not\to a$ τότε υπάρχουν $b \neq a$ και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to b$.*

Σωστό. Στην Άσκηση 15 παρακάτω αποδεικνύεται ότι αν η ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει στον a τότε υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon$. Αφού η (a_n) είναι φραγμένη, η (a_{k_n}) είναι επίσης φραγμένη. Από το θεώρημα Bolzano–Weierstrass η (a_{k_n}) έχει υπακολουθία $(a_{k_{l_n}})$ η οποία συγκλίνει σε κάποιον $b \in \mathbb{R}$. Όμως, $|a_{k_{l_n}} - a| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $|b - a| = \lim_{n\to\infty} |a_{k_{l_n}} - a| \geq \varepsilon$. Δηλαδή, $b \neq a$.

6. *Υπάρχει φραγμένη ακολουθία που δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Λάθος. Από το θεώρημα Bolzano–Weierstrass, κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

7. *Αν η (a_n) δεν είναι φραγμένη, τότε δεν έχει φραγμένη υπακολουθία.*

Λάθος. Θεωρήστε την ακολουθία (a_n) με $a_{2k} = k$ και $a_{2k-1} = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Η (a_n) δεν είναι φραγμένη, όμως η υπακολουθία (a_{2k-1}) είναι σταθερή (άρα, φραγμένη).

8. *Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία. Κάθε υπακολουθία της (a_n) είναι αύξουσα.*

Σωστό. Θεωρήστε μια υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n). Αν $n \in \mathbb{N}$ τότε $k_n < k_{n+1}$. Η (a_n) είναι αύξουσα, άρα: αν $s, t \in \mathbb{N}$ και $s < t$ τότε $a_s \leq a_t$ (εξηγήστε γιατί). Παίρνοντας $s = k_n$ και $t = k_{n+1}$ συμπεραίνουμε ότι $a_{k_n} \leq a_{k_{n+1}}$.

9. *Αν η (a_n) είναι αύξουσα και για κάποια υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) έχουμε $a_{k_n} \to a$, τότε $a_n \to a$.*

Σωστό. Υποθέτουμε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) η οποία συγκλίνει στον $a \in \mathbb{R}$.

Αφού $a_{k_n} \to a$, η (a_{k_n}) είναι φραγμένη. Συνεπώς, υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{k_n} \leq M$. Θα δείξουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n \leq M$. Τότε, η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνει.

Θεωρήστε τυχόντα $n \in \mathbb{N}$. Αφού $n \leq k_n$ και η (a_n) είναι αύξουσα, έχουμε $a_n \leq a_{k_n} \leq M$.

10. *Αν $a_n \to 0$ τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $n^2 a_{k_n} \to 0$.*

Σωστό. Θα βρούμε επαγωγικά $k_1 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $|a_{k_n}| < \frac{1}{n^3}$. Τότε, για την υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) θα έχουμε $n^2 a_{k_n} \to 0$ (εξηγήστε γιατί).

Αφού $a_n \to 0$, μπορούμε να βρούμε $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_{k_1}| < 1$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί $k_1 < \cdots < k_m$ ώστε $|a_{k_j}| < \frac{1}{j^3}$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{(m+1)^3} > 0$. Αφού $a_n \to 0$, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n| < \frac{1}{(m+1)^3}$ για κάθε $n \geq n_0$. Ειδικότερα, υπάρχει $k_{m+1} > k_m$ ώστε $|a_{k_{m+1}}| < \frac{1}{(m+1)^3}$. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

Ομάδα Β′

11. *Έστω (a_n) μια ακολουθία. Δείξτε ότι $a_n \to a$ αν και μόνο αν οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) συγκλίνουν στο a.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) συγκλίνουν στον a.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geq n_1$ ισχύει $|a_{2k} - a| < \varepsilon$. Επίσης, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geq n_2$ ισχύει $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$. Αν θέσουμε $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$ τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$.

[Πράγματι, παρατηρήστε ότι αν ο n είναι άρτιος τότε $n = 2k$ για κάποιον $k \geq n_1$ ενώ αν ο n είναι περιττός τότε $n = 2k - 1$ για κάποιον $k \geq n_2$.]

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $a_n \to a$.

Το αντίστροφο είναι απλό: έχουμε δει ότι αν μια ακολουθία (a_n) συγκλίνει στον $a \in \mathbb{R}$ τότε κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) συγκλίνει στον a.

12. *Έστω (a_n) μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες (a_{2k}), (a_{2k-1}) και (a_{3k}) συγκλίνουν. Δείξτε ότι:*

(α) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{3k}$.

(β) Η (a_n) συγκλίνει.

Υπόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $a_{2k} \to x$, $a_{2k-1} \to y$ και $a_{3k} \to z$. Παρατηρήστε ότι:

(i) Η (a_{6k}) είναι ταυτόχρονα υπακολουθία της (a_{2k}) και υπακολουθία της (a_{3k}). Άρα, η (a_{6k}) συγκλίνει και $x = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{6k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{3k} = z$.

(ii) Η (a_{6k-3}) είναι ταυτόχρονα υπακολουθία της (a_{2k-1}) και υπακολουθία της (a_{3k}). Άρα, η (a_{6k-3}) συγκλίνει και $y = \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} a_{6k-3} = \lim_{k\to\infty} a_{3k} = z$.
Έπεται ότι $x = y = z$. Αφού οι (a_{2k}) και (a_{2k-1}) έχουν το ίδιο όριο, η Άσκηση 11 δείχνει ότι η (a_n) συγκλίνει.

13. *Έστω (a_n) μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι $a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι $\lim_{n\to\infty}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 0$. Τότε η (a_n) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό a που ικανοποιεί την $a_{2n} \leq a \leq a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:
(α) Η (a_{2n}) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον a_1 ενώ η (a_{2n-1}) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον a_2. Πράγματι, από την υπόθεση έχουμε ότι η (a_{2n}) είναι αύξουσα και η (a_{2n-1}) είναι φθίνουσα. Ειδικότερα,

$$a_2 \leq a_{2n} \leq a_{2n-1} \leq a_1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(β) Υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $a_{2n} \to a$ και $a_{2n-1} \to b$. Αυτό είναι άμεσο από το γεγονός ότι η (a_{2n}) είναι αύξουσα και η (a_{2n-1}) είναι φθίνουσα (γνωρίζουμε ότι κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει).
(γ) $a = b$: αυτό προκύπτει από την υπόθεση ότι $a_{2n-1} - a_{2n} \to 0$. Αφού $a_{2n} \to a$ και $a_{2n-1} \to b$, έχουμε

$$b - a = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} - \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 0.$$

(δ) $a_n \to a = b$: στο (γ) είδαμε ότι

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = b.$$

Από την Άσκηση 11 έπεται ότι η (a_n) συγκλίνει και

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = b.$$

(ε) $a_{2n} \leq a \leq a_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι φανερό αφού η (a_{2n}) είναι αύξουσα, η (a_{2n-1}) είναι φθίνουσα και ο a είναι το κοινό τους όριο. Γνωρίζουμε ότι

$$a = \sup\{a_{2n} : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{a_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}.$$

14. *Έστω (a_n) μια ακολουθία και έστω (x_k) ακολουθία οριακών σημείων της (a_n). Υποθέτουμε οτι $x_k \to x$. Δείξτε οτι ο x είναι οριακό σημείο της (a_n).*

Υπόδειξη. Σύμφωνα με τον χαρακτηρισμό του οριακού σημείου ακολουθίας, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που ικανοποιούν την $|a_n - x| < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_k \to x$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_k - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ (για την ακρίβεια, όλοι τελικά οι όροι της (x_k) έχουν αυτή την ιδιότητα). Σταθεροποιούμε τον x_k και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο x_k είναι οριακό σημείο της (a_n): υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που ικανοποιούν την $|a_n - x_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Για όλους αυτούς τους όρους βλέπουμε ότι

$$|a_n - x| \leq |a_n - x_k| + |x_k - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

15. *Δείξτε ότι η ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό a, αν και μόνο αν υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Υπόδειξη. Δείξτε τις ισοδυναμίες (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3) $\iff$ (4):

(1) Η ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει στον a.

(2) Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε άπειροι όροι a_m της (a_n) να ικανοποιούν την $|a_m - a| \geq \varepsilon$.

(3) Υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και φυσικοί αριθμοί $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon$.

(4) Υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon$.

16. *Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $a_n \to a$ αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της (a_n) έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο a.*

Υπόδειξη. ($\Longrightarrow$) Υποθέστε πρώτα ότι $a_n \to a$. Αν (a_{k_n}) είναι μια υπακολουθία της (a_n) τότε $a_{k_n} \to a$. Άρα, όλες οι υπακολουθίες της (a_{k_n}) συγκλίνουν κι αυτές στον a.

($\Longleftarrow$) Με απαγωγή σε άτοπο: υποθέστε ότι η (a_n) δεν συγκλίνει στον a. Από την Άσκηση 15, υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_{k_n} - a| \geq \varepsilon$. Τότε, αν πάρουμε οποιαδήποτε υπακολουθία της (a_{k_n}), όλοι οι όροι της θα είναι ε-μακριά από τον a. Δηλαδή, η (a_{k_n}) δεν έχει υπακολουθία που να συγκλίνει στον a.

17. *Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 > 0$ και*

$$a_{n+1} = 1 + \frac{2}{1 + a_n}.$$

Δείξτε ότι οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες. Βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Υπόδειξη. Δείξτε πρώτα ότι η (a_n) ορίζεται καλά και $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, δείξτε ότι αν $a_n \to x$ τότε $x = \sqrt{3}$.

(i) Υποθέστε ότι $0 < a_1 < \sqrt{3}$. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(α) $a_2 > \sqrt{3}$.

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η $a_{n+2} = \frac{3+2a_n}{2+a_n}$.

(γ) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι $a_{2k-1} < \sqrt{3}$ και $a_{2k-1} < a_{2k+1}$.

(δ) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι $a_{2k} > \sqrt{3}$ και $a_{2k+2} < a_{2k}$.

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 13 δείξτε ότι οι (a_{2k-1}) και (a_{2k}) συγκλίνουν. Χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση ανάμεσα στον a_{n+2} και τον a_n δείξτε ότι $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \sqrt{3}$. Από την Άσκηση 11 έπεται ότι $a_n \to \sqrt{3}$.

(ii) Εξετάστε με τον ίδιο τρόπο την περίπτωση $a_1 > \sqrt{3}$.

(iii) Τέλος, δείξτε ότι αν $a_1 = \sqrt{3}$ τότε έχουμε $a_n = \sqrt{3}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

18. *Βρείτε το ανώτερο και το κατώτερο όριο των ακολουθιών*

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right), \\ b_n &= \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)+\frac{1}{n+1}, \\ \gamma_n &= \frac{n^2((-1)^n+1)+2n+1}{n+1}. \end{aligned}$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $-1-\frac{1}{n} \leq a_n \leq 1+\frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν λοιπόν θεωρήσουμε οποιαδήποτε *συγκλίνουσα* υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n), τότε το κριτήριο παρεμβολής δείχνει ότι $-1 \leq \lim a_{k_n} \leq 1$. Έπεται ότι $\liminf a_n \geq -1$ και $\limsup a_n \leq 1$.

Από την άλλη πλευρά, $a_{2n} = -1-\frac{1}{2n} \to -1$ και $a_{2n-1} = 1+\frac{1}{2n-1} \to 1$. Δηλαδή, ο 1 και ο -1 είναι οριακά σημεία της (a_n). Έπεται ότι $\limsup a_n = 1$ και $\liminf a_n = -1$ (εξηγήστε γιατί).

Άλλος τρόπος: Δοκιμάστε να δείξετε ότι $1 = \limsup a_n$ με τον χαρακτηρισμό του $\limsup$: πάρτε τυχόν $\varepsilon > 0$ και δείξτε ότι το $\{n : a_n > 1-\varepsilon\}$ είναι άπειρο (οι περιττοί όροι είναι μεγαλύτεροι από 1) ενώ το $\{n : a_n > 1+\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο (για να ισχύει $a_n > 1+\varepsilon$ θα πρέπει να έχουμε $n = 2k-1$ και $\frac{1}{2k-1} > \varepsilon$, δηλαδή $k < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$).

(β) Παρατηρήστε ότι, αν $\upsilon \in \{0,1,\ldots,5\}$ τότε

$$\cos\left(\frac{(6k+\upsilon)\pi}{3}\right) = \cos\left(2k\pi+\frac{\upsilon\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\upsilon\pi}{3}\right).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} b_{6k} &= 1+\frac{1}{6k+1} \to 1 \\ b_{6k+1} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6k+2} \to \frac{1}{2} \\ b_{6k+2} &= -\frac{1}{2}+\frac{1}{6k+3} \to -\frac{1}{2} \\ b_{6k+3} &= -1+\frac{1}{6k+4} \to -1 \\ b_{6k+4} &= -\frac{1}{2}+\frac{1}{6k+5} \to -\frac{1}{2} \\ b_{6k+5} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6k+6} \to \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\limsup b_n \geq 1$ (διότι $b_{6k} \to 1$) και $\liminf b_n \leq -1$ (διότι $b_{6k+3} \to -1$). Έστω τώρα (b_{k_n}) τυχούσα συγκλίνουσα υπακολουθία της (b_n). Αυτή θα έχει *άπειρους κοινούς όρους* με τουλάχιστον μία από τις έξι υπακολουθίες που περιγράψαμε (εξηγήστε γιατί). Δηλαδή, θα έχει *κοινή υπακολουθία* $(b_{k_{\lambda_n}})$ με κάποια από τις έξι υπακολουθίες παραπάνω. Αναγκαστικά,

$$\lim b_{k_n} = \lim b_{k_{\lambda_n}} \in \left\{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right\}.$$

Δηλαδή, το σύνολο των οριακών σημείων της (b_n) είναι το $K = \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Έπεται ότι $\limsup b_n = 1$ και $\liminf b_n = -1$.

(γ) Παρατηρήστε ότι $\gamma_{2n} = \frac{2n^2+2n+1}{n+1} \to +\infty$ και $\gamma_{2n-1} = \frac{2n+1}{n+1} \to 2$. Με το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε για το ερώτημα (β) – ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο – δείξτε ότι $\limsup \gamma_n = +\infty$ και $\liminf \gamma_n = 2$.

19. *Εστω (a_n), (b_n) φραγμένες ακολουθίες. Δείξτε οτι*

$$\begin{aligned} \liminf a_n + \liminf b_n &\leq \liminf (a_n + b_n) \\ &\leq \limsup (a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n. \end{aligned}$$

Υπόδειξη. Η μεσαία ανισότητα ισχύει προφανώς. Δείχνουμε τη δεξιά ανισότητα (η αριστερή αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο).

Έστω $(a_{k_n} + b_{k_n})$ υπακολουθία της $(a_n + b_n)$ με $a_{k_n} + b_{k_n} \to \limsup(a_n + b_n)$. Η (a_{k_n}) είναι φραγμένη, άρα έχει περαιτέρω υπακολουθία $(a_{k_{\lambda_n}})$ η οποία συγκλίνει: $a_{k_{\lambda_n}} \to x \in \mathbb{R}$. Ο x είναι οριακό σημείο της (a_n), άρα

$$x = \lim a_{k_{\lambda_n}} \leq \limsup a_n.$$

Τότε,

$$b_{k_{\lambda_n}} = (a_{k_{\lambda_n}} + b_{k_{\lambda_n}}) - a_{k_{\lambda_n}} \to \limsup(a_n + b_n) - x.$$

Ο $\limsup(a_n + b_n) - x$ είναι οριακό σημείο της (b_n), άρα

$$\limsup(a_n + b_n) - x \limsup b_n.$$

Έπεται ότι

$$\limsup(a_n + b_n) \leq x + \limsup b_n \leq \limsup a_n + \limsup b_n.$$

20. *Εστω $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.*
(α) Δείξτε οτι

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(β) Αν $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = x$, τότε $\sqrt[n]{a_n} \to x$.

Υπόδειξη. Η μεσαία ανισότητα ισχύει προφανώς. Δείχνουμε την δεξιά ανισότητα (η αριστερή αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο).

Για την απόδειξη της ανισότητας $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = x < +\infty$ (αλλιώς, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον χαρακτηρισμό του $\limsup$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq k$ να ισχύει $\frac{a_{n+1}}{a_n} < x + \varepsilon$. Έπεται ότι: για κάθε $n > k$ ισχύει

$$a_n < a_{n-1}(x+\varepsilon) < a_{n-2}(x+\varepsilon)^2 < \cdots < a_k(x+\varepsilon)^{n-k} = \frac{a_k}{(x+\varepsilon)^k}(x+\varepsilon)^n.$$

Θέτοντας $M = a_k/(x+\varepsilon)^k$, έχουμε

$$a_n \leq M(x+\varepsilon)^n \ \text{ για κάθε } n > k.$$

Χρησιμοποιούμε αυτή την ανισότητα ως εξής: θεωρούμε υπακολουθία $(\sqrt[s_n]{a_{s_n}})$ της $(\sqrt[n]{a_n})$ για την οποία

$$\sqrt[s_n]{a_{s_n}} \to \limsup \sqrt[n]{a_n}.$$

Λόγω της $s_n \geq n$, για κάθε $n > k$ έχουμε $s_n > k$. Άρα,

$$\sqrt[s_n]{a_{s_n}} \leq \sqrt[s_n]{M}\,(x+\varepsilon).$$

Όμως, $\sqrt[s_n]{M} \to 1$. Άρα,

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[s_n]{a_{s_n}} \leq x + \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq x = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

21. *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Δείξτε οτι*

$$\limsup(-a_n) = -\liminf a_n \quad \text{και} \quad \liminf(-a_n) = -\limsup a_n.$$

Υπόδειξη. Δείχνουμε την πρώτη ισότητα. Η δεύτερη αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο ή αν θέσουμε στην πρώτη όπου a_n την $-a_n$.

Θέτουμε $x = \limsup(-a_n)$ και $y = \liminf a_n$. Υπάρχει υπακολουθία $(-a_{k_n})$ της $(-a_n)$ με $-a_{k_n} \to x$. Τότε, $-x = \lim a_{k_n}$, άρα

$$-x \geq y = \liminf a_n.$$

Ομοίως, υπάρχει υπακολουθία (a_{λ_n}) της (a_n) με $a_{\lambda_n} \to y$. Τότε, $-y = \lim(-a_{\lambda_n})$, άρα

$$-y \leq x = \limsup(-a_n),$$

δηλαδή $y \geq -x$.

Έπεται ότι $y = -x$.

22. *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Αν*

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a_n \text{ για άπειρους } n \in \mathbb{N}\},$$

δείξτε ότι $\sup X = \limsup a_n$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $s = \sup X$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον χαρακτηρισμό του $\limsup a_n$:

(α) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $s = \sup X$, υπάρχει $x \in X$ ώστε $s - \varepsilon < x$. Από τον ορισμό του συνόλου X, ισχύει η ανισότητα $x \leq a_n$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, ισχύει η ανισότητα $s - \varepsilon < a_n$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε λοιπόν δείξει ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n > s - \varepsilon\}$ είναι άπειρο.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Αν η ανισότητα $s + \varepsilon < a_n$ ίσχυε για άπειρους $n \in \mathbb{N}$, τότε από τον ορισμό του συνόλου X θα είχαμε $s + \varepsilon \in X$. Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει, διότι $s + \varepsilon > s = \sup X$. Έχουμε λοιπόν δείξει ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n > s + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Από τα (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι $\sup X = s = \limsup a_n$.

23. *Χρησιμοποιώντας την ανισότητα*

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2},$$

δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ *δεν είναι ακολουθία Cauchy. Συμπεράνατε ότι* $a_n \to +\infty$.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι: για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ είναι ακολουθία Cauchy. Τότε, παίρνοντας $\varepsilon=\frac{1}{4}>0$, μπορούμε να βρούμε $n_0\in\mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $m,n\geq n_0$ ισχύει $|a_m-a_n|<\frac{1}{4}$.

Πάρτε $n\geq n_0$ και $m=2n>n\geq n_0$. Τότε, $|a_{2n}-a_n|<\frac{1}{4}$. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει, διότι

$$\begin{aligned}|a_{2n}-a_n| &= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Εξηγήστε τώρα τα εξής:

(α) Αφού η (a_n) δεν είναι ακολουθία Cauchy, η (a_n) δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(β) Αφού η (a_n) είναι αύξουσα και δεν συγκλίνει, η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

(γ) Αφού η (a_n) είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη, αναγκαστικά $a_n\to+\infty$.

24. *Έστω* $0<\mu<1$ *και ακολουθία* (a_n) *για την οποία ισχύει*

$$|a_{n+1}-a_n|\leq\mu|a_n-a_{n-1}|,\quad n\geq 2.$$

Δείξτε ότι η (a_n) *είναι ακολουθία Cauchy.*

Υπόδειξη. Έστω $a=a_1$ και $b=a_2$. Από την $|a_{n+1}-a_n|\leq\mu|a_n-a_{n-1}|$ έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι: για κάθε $n\geq 2$ ισχύει

$$|a_{n+1}-a_n|\leq\mu^{n-1}|a_2-a_1|=|b-a|\cdot\mu^{n-1}.$$

Αν λοιπόν $m,n\in\mathbb{N}$ και $m>n$, τότε

$$\begin{aligned}|a_m-a_n| &\leq |a_m-a_{m-1}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\\ &\leq |b-a|\left(\mu^{n-1}+\cdots+\mu^{m-2}\right)\\ &= |b-a|\cdot\mu^{n-1}\cdot\frac{1-\mu^{m-n}}{1-\mu}\\ &\leq \frac{|b-a|\mu^{n-1}}{1-\mu}\\ &= \frac{|b-a|}{\mu(1-\mu)}\cdot\mu^n.\end{aligned}$$

Θεωρήστε $\varepsilon > 0$ και βρείτε $n_0 \in \mathbb{N}$ που ικανοποιεί την $\frac{|b-a|}{\mu(1-\mu)}\mu^{n_0} < \varepsilon$. Τέτοιος n_0 υπάρχει γιατί $\mu^n \to 0$ όταν $n \to \infty$. Τότε, αν $m > n \geq n_0$,

$$|a_m - a_n| \leq \frac{|b-a|}{\mu(1-\mu)} \cdot \mu^n \leq \frac{|b-a|}{\mu(1-\mu)} \cdot \mu^{n_0} < \varepsilon.$$

Δηλαδή, η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

25. *Ορίζουμε $a_1 = a$, $a_2 = b$ και $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$, $n \geq 2$. Εξετάστε αν η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι: για κάθε $n \geq 2$ ισχύει

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} - a_n = -\frac{a_n - a_{n-1}}{2},$$

δηλαδή

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|.$$

Από την Άσκηση 24, η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Ομάδα Γ′

26. *Έστω $m \in \mathbb{N}$. Βρείτε μια ακολουθία (a_n) η οποία να έχει ακριβώς m διαφορετικές υπακολουθίες.*

Υπόδειξη. Αν $m = 1$, θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία $a_n = 1$. Παρατηρήστε ότι κάθε υπακολουθία της (a_n) είναι σταθερή ακολουθία με όλους τους όρους της ίσους με 1, δηλαδή συμπίπτει με την (a_n).

Έστω $m > 1$. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) που ορίζεται ως εξής: $a_n = 0$ αν $n < m$ και $a_n = 1$ αν $n \geq m$. Παρατηρήστε ότι κάθε υπακολουθία της (a_n) είναι τελικά σταθερή και ίση με 1, μπορεί δε να έχει από κανέναν ως $m-1$ πρώτους όρους ίσους με 0 (αυτό εξαρτάται από το πόσους από τους $m-1$ πρώτους όρους της (a_n) έχει σαν όρους η υπακολουθία). Συνεπώς, το πλήθος των διαφορετικών υπακολουθιών της (a_n) είναι ακριβώς m.

27. *Έστω (a_n) μια ακολουθία. Αν $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 1$ και $a_n \neq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει γνησίως αύξουσα υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to 1$.*

Υπόδειξη. Θέτουμε $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Από τον βασικό χαρακτηρισμό του supremum, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x = x(\varepsilon) \in A$ ώστε $1 - \varepsilon < x \leq 1$. Αφού $1 \notin A$, έχουμε την ισχυρότερη ανισότητα $1 - \varepsilon < x < 1$.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, θα βρούμε επαγωγικά $k_1 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $a_{k_1} < \cdots < a_{k_n} < a_{k_{n+1}} < \cdots$ και $1 - \frac{1}{n} < a_{k_n} < 1$. Τότε, για την γνησίως αύξουσα υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) θα έχουμε $a_{k_n} \to 1$.

Εφαρμόζοντας τον χαρακτηρισμό του supremum με $\varepsilon = 1$, βρίσκουμε $a_{k_1} \in A$ που ικανοποιεί την $0 < a_{k_1} < 1$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί $k_1 < \cdots < k_m$ ώστε $a_{k_1} < \cdots < a_{k_m}$ και $1 - \frac{1}{j} < a_{k_j} < 1$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$. Θέτουμε $s = \max\{1 - \frac{1}{m+1}, a_1, a_2, \ldots, a_{k_m}\}$. Αφού $s < 1$ (εξηγήστε γιατί), μπορούμε να βρούμε $a_{k_{m+1}} \in A$ που ικανοποιεί την $s < a_{k_{m+1}} < 1$. Τότε, $k_{m+1} > k_m$, $a_{k_m} < a_{k_{m+1}}$ και $1 - \frac{1}{m+1} < a_{k_{m+1}} < 1$. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

28. *Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αν $\inf A = 0$, δείξτε ότι η (a_n) έχει φθίνουσα υπακολουθία που συγκλίνει στο 0.*

Υπόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί φυσικούς $k_1 < \cdots < k_m$ που ικανοποιούν τα εξής:

$$0 < a_{k_m} < a_{k_{m-1}} < \cdots < a_{k_1} \text{ και } 0 < a_{k_m} < \frac{1}{m}.$$

Θέτουμε $\varepsilon_{m+1} = \min\left\{a_1, \ldots, a_{k_m}, \frac{1}{m+1}\right\} > 0$. Αφού $\inf(A) = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ και $\varepsilon_{m+1} > 0$, υπάρχει $k_{m+1} \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{k_{m+1}} < \varepsilon_{m+1}$. Από τον ορισμό του ε_{m+1} έπεται ότι (εξηγήστε γιατί):

$$(\alpha)\ k_m < k_{m+1}, \qquad (\beta)\ a_{k_{m+1}} < a_{k_m}, \qquad (\gamma)\ a_{k_{m+1}} < \frac{1}{m+1}.$$

Έτσι ορίζεται επαγωγικά μια γνησίως φθίνουσα υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) η οποία συγκλίνει στο 0.

29. *Ορίζουμε μια ακολουθία ως εξής:*

$$a_0 = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n}, \quad a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2}.$$

Βρείτε όλα τα οριακά σημεία της (a_n).

Υπόδειξη. Αν γράψετε τους δέκα πρώτους όρους της ακολουθίας (a_n) θα μαντέψετε ότι

$$a_{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{και} \qquad a_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Δουλεύοντας όπως στην Άσκηση 18, δείξτε ότι $\liminf a_n = \frac{1}{2}$ και $\limsup a_n = 1$.

30. *Έστω (x_n) ακολουθία με την ιδιότητα $x_{n+1} - x_n \to 0$. Αν $a < b$ είναι δύο οριακά σημεία της (x_n), δείξτε ότι κάθε $y \in [a, b]$ είναι οριακό σημείο της (x_n).*

Υπόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω $y \in (a, b)$ ο οποίος δεν είναι οριακό σημείο της (x_n). Τότε, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ και $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $a < y - \varepsilon < y + \varepsilon < b$ και $x_n \notin (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ για κάθε $n \geq n_1$.

Αφού $x_{n+1} - x_n \to 0$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_2$,

$$|x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Αφού οι a, b είναι οριακά σημεία της (x_n), μπορούμε να βρούμε $s > m > n_0$ ώστε

$$x_m < y - \varepsilon \quad \text{και} \quad y + \varepsilon < x_s.$$

Η επιλογή του $m > n_0$ είναι δυνατή διότι ο a είναι οριακό σημείο της (x_n) και $a < y - \varepsilon$, ενώ η επιλογή του $s > m$ είναι δυνατή διότι ο b είναι οριακό σημείο της (x_n) και $y + \varepsilon < b$.

Μπορούμε τώρα να βρούμε $m \leq n < s$ ώστε $x_n \leq y - \varepsilon$ και $x_{n+1} \geq y - \varepsilon$. Αρκεί να πάρουμε σαν n τον μεγαλύτερο φυσικό – από τους $m, m+1, \ldots, s-1$ – για τον οποίο $x_n \leq y - \varepsilon$.

Όμως τότε,

$$x_{n+1} - x_n \geq (y + \varepsilon) - (y - \varepsilon) = 2\varepsilon,$$

το οποίο είναι άτοπο, διότι $n \geq m > n_0 \geq n_2$ (θα έπρεπε να ισχύει $|x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon$).

Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα κάθε $y \in (a, b)$ είναι οριακό σημείο της (x_n). Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο, αφού οι a, b είναι επίσης οριακά σημεία της (x_n).

31. (α) *Έστω A αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) ώστε κάθε $x \in A$ να είναι οριακό σημείο της (a_n).*

(β) *Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) ώστε κάθε $x \in \mathbb{R}$ να είναι οριακό σημείο της (x_n).*

Υπόδειξη. (α) Αν $A = \{x_s : s \in \mathbb{N}\}$, μπορείτε να θεωρήσετε την ακολουθία (a_n) που ορίζεται ως εξής:

$$b_1, b_1, b_2, b_1, b_2, b_3, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

Για κάθε $s \in \mathbb{N}$ υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) η οποία είναι σταθερή και ίση με x_s (διότι άπειροι όροι της (a_n) είναι ίσοι με x_s). Άρα, για κάθε $s \in \mathbb{N}$ ο x_s είναι οριακό σημείο της (a_n).

(β) Πάρτε σαν A το $\mathbb{Q}$ στο (α). Αφού το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, υπάρχει ακολουθία (a_n) ώστε κάθε $q \in \mathbb{Q}$ να είναι οριακό σημείο της (a_n). Η (a_n) ικανοποιεί το ζητούμενο: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία (q_k) στο $\mathbb{Q}$ ώστε $q_k \to x$. Αφού κάθε q_k είναι οριακό σημείο της (a_n), η Άσκηση 14 δείχνει ότι και ο x είναι οριακό σημείο της (a_n).

32. *Έστω (a_n) μια ακολουθία. Ορίζουμε*

$$b_n = \sup\{|a_{n+k} - a_n| : k \in \mathbb{N}\}.$$

Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν $b_n \to 0$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $n_0 \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Για κάθε $m, n \geq n_0$ ισχύει $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$.

(β) Για κάθε $m > n \geq n_0$ ισχύει $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$.

(γ) Για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_{n+k} - a_n| \leq \varepsilon$.

(δ) Για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $b_n := \sup\{|a_{n+k} - a_n| : k \in \mathbb{N}\} \leq \varepsilon$.

Χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία των (α) και (δ) δείξτε ότι η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy (ισοδύναμα, συγκλίνει) αν και μόνο αν $b_n \to 0$.

33. *Έστω $a, b > 0$. Ορίζουμε ακολουθία (a_n) με $a_1 = a$, $a_2 = b$ και*

$$a_{n+2} = \frac{4a_{n+1} - a_n}{3}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Εξετάστε αν η (a_n) συγκλίνει και αν ναι, βρείτε το όριό της.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{4a_{n+1} - a_n}{3} - a_{n+1} = \frac{4a_{n+1} - a_n - 3a_{n+1}}{3} = \frac{a_{n+1} - a_n}{3}.$$

Έπεται ότι

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{3}|a_{n+1} - a_n|.$$

Από την Άσκηση 24, η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy. Συνεπώς, συγκλίνει.

Για να βρούμε το όριο, παρατηρούμε ότι

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{3} = \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{3^2} = \cdots = \frac{a_2 - a_1}{3^{n-1}} = \frac{b-a}{3^{n-1}}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \frac{b-a}{3^{n-2}} = a_{n-2} + \frac{b-a}{3^{n-3}} + \frac{b-a}{3^{n-2}} = \cdots \\ &= a_1 + (b-a)\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{3^k} \to a + (b-a)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = a + \frac{3(b-a)}{2} = \frac{3b-a}{2}. \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 2

Σειρές πραγματικών αριθμών

Α΄ Ομάδα. Ερωτήσεις κατανόησης

Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας).

1. *Αν $a_k \to 0$ τότε η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη.*

Λάθος. Η ακολουθία $a_k = \frac{1}{k} \to 0$, όμως η ακολουθία $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ δεν είναι φραγμένη (τείνει στο $+\infty$).

2. *Αν η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.*

Λάθος. Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $a_k = (-1)^{k-1}$, τότε έχουμε $s_n = 1$ αν ο n είναι περιττός και $s_n = 0$ αν ο n είναι άρτιος. Δηλαδή, η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ αποκλίνει, διότι $a_k \not\to 0$.

3. *Αν $|a_k| \to 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.*

Λάθος. Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k}$. Τότε, $|a_k| = \frac{1}{k} \to 0$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει στο $+\infty$, δηλαδή η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ δεν συγκλίνει απολύτως.

4. *Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.*

Σωστό. Αποδείξαμε (στη θεωρία) ότι αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει.

5. *Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.*

Λάθος. Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k}$. Τότε, $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

6. *Αν* $a_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *και αν* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, *τότε η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *αποκλίνει.*

Λάθος. Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k^2}$. Τότε, $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

7. *Αν* $a_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *και αν* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to +\infty$, *τότε η η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *αποκλίνει.*

Σωστό. Αν $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to +\infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ για κάθε $k \geq N$. Αφού η (a_k) έχει θετικούς όρους, συμπεραίνουμε ότι $0 < a_N \leq a_{N+1} \leq \cdots \leq a_k \leq \cdots$, δηλαδή $a_k \not\to 0$. Συνεπώς, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

8. *Αν* $a_k \to 0$, *τότε η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ *συγκλίνει.*

Λάθος. Αν θεωρήσουμε την $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$, τότε $a_k \to 0$. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

9. *Αν* $a_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *και αν η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει, τότε η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ *συγκλίνει.*

Λάθος. Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k^2}$. Τότε, $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

10. *Αν η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει, τότε η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ *συγκλίνει.*

Λάθος. Από το κριτήριο του Dirichlet, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

11. *Αν η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει και αν* (a_{k_n}) *είναι μια υπακολουθία της* (a_n), *τότε η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k_n}$ *συγκλίνει.*

Λάθος. Σύμφωνα με το κριτήριο Dirichlet, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ αποκλίνει (συμπεριφέρεται σαν την αρμονική σειρά – εξηγήστε γιατί).

12. *Αν* $a_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *και αν η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει, τότε η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ *συγκλίνει.*

Σωστό. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, έχουμε $a_k \to 0$. Άρα, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k \geq m$, $0 \leq a_k \leq 1$. Τότε, για κάθε $k \geq m$ έχουμε $0 \leq a_k^2 \leq a_k$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

13. *Η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$ *συγκλίνει.*

Λάθος. Θέτουμε $a_k = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$. Τότε, $a_k > 0$ και

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{[2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)(2k+2)]k!}{[2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)](k+1)!} = \frac{2k+2}{k+1} = 2 \to 2 > 1.$$

Από το κριτήριο του λόγου, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$ αποκλίνει.

14. *Η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^p$ *συγκλίνει αν και μόνο αν* $p < -1$.

Σωστό. Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k(1+k^2)^p}{k^{2p+1}} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k^2}\right)^p = 1 > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^p$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{-(2p+1)}}$ συγκλίνει. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $-(2p+1) > 1$, δηλαδή αν και μόνο αν $p < -1$.

Β΄ Ομάδα

15. *Δείξτε ότι αν* $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$ *τότε* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b$.

Υπόδειξη. Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς ισούται με

$$s_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Αφού $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$, βλέπουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = b_1 - b$. Συνεπώς, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b$.

16. *Δείξτε ότι*

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}$ (β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{6^k} = \frac{3}{2}$ (γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1$.

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $b_k = \frac{1}{2k-1}$. Παρατηρούμε ότι

$$b_k - b_{k+1} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Έχουμε $b_1 = 1$ και $b_k \to 0$. Από την Άσκηση 15,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}(b_1 - b) = \frac{1}{2}.$$

(β) Γνωρίζουμε ότι αν $0 < x < 1$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1/3}{1-(1/3)} + \frac{1/2}{1-(1/2)} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

(γ) Γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 1 - 0 = 1,$$

χρησιμοποιώντας την Άσκηση 15 για την $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$.

17. *Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)-k}{2k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)}.$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 15 για την $b_k = \frac{1}{2k(k+1)} \to 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = b_1 = \frac{1}{4}.$$

18. *Εξετάστε για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού x συγκλίνει η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k}$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι: αν $|x| < 1$ τότε $\frac{1}{1+x^k} \to 1 \neq 0$, άρα η σειρά αποκλίνει. Αν $x = 1$, τότε $\frac{1}{1+x^k} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0$, άρα η σειρά αποκλίνει. Αν $x = -1$, ο k-οστός όρος δεν ορίζεται στην περίπτωση που ο k είναι περιττός, άρα δεν έχει νόημα να εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $|x| > 1$. Τότε, μπορούμε να εφαρμόσουμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης, χρησιμοποιώντας την $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x|^k}$ (η οποία συγκλίνει ως γεωμετρική σειρά με λόγο $\frac{1}{|x|} < 1$). Έχουμε

$$\frac{|1/(1+x^k)|}{1/|x|^k} = \left|\frac{x^k}{1+x^k}\right| = \left|\frac{1}{(1/x)^k + 1}\right| \to 1.$$

Συνεπώς, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k}$ συγκλίνει απολύτως.

19. *Εφαρμόστε τα κριτήρια λόγου **και** ρίζας στις ακόλουθες σειρές:*

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k x^k$ (β) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ (δ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^3 x^k$

(ε) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$ (στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$ (ζ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} x^k$ (η) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10} x^k}{k!}$.

Αν για κάποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ κανένα από αυτά τα δύο κριτήρια δεν δίνει απάντηση, εξετάστε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς με άλλο τρόπο.

Υπόδειξη. Εξετάζουμε μερικές από αυτές:

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k x^k$: Με το κριτήριο του λόγου. Αν $x \neq 0$, έχουμε

$$\frac{(k+1)^{k+1}|x|^{k+1}}{k^k|x|^k} = (k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k |x| \to +\infty.$$

Συνεπώς, η σειρά αποκλίνει. Η σειρά συγκλίνει μόνο αν $x = 0$.

Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγατε αν χρησιμοποιούσατε το κριτήριο της ρίζας: παρατηρήστε ότι $\sqrt[k]{k^k|x|^k} = k|x| \to +\infty$ αν $x \neq 0$.

(β) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$: Με το κριτήριο του λόγου. Αν $x \neq 0$, έχουμε

$$\frac{|x|^{k+1}/(k+1)!}{|x|^k/k!} = \frac{|x|}{k+1} \to 0 < 1.$$

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει απολύτως. Η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$: Με το κριτήριο του λόγου. Αν $x \neq 0$, έχουμε

$$\frac{2^{k+1}|x|^{k+1}/(k+1)^2}{2^k|x|^k/k^2} = 2|x|\frac{k^2}{(k+1)^2} \to 2|x|.$$

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει απολύτως αν $|x| < 1/2$ και αποκλίνει αν $|x| > 1/2$. Εξετάζουμε τη σύγκλιση χωριστά στις περιπτώσεις $x = \pm 1/2$. Παρατηρώντας ότι οι σειρές $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ και $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνουν, συμπεραίνουμε τελικά ότι η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $|x| \leq 1/2$.

20. *Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$$

και

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι το $(2n)$-οστό μερικό άθροισμα της σειράς

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$$

ισούται με

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Αφού η σειρά έχει θετικούς όρους και $s_{2n} \leq \frac{3}{2}$ για κάθε n, έπεται ότι η σειρά συγκλίνει (εξηγήστε γιατί).

(β) Παρατηρήστε ότι το $(2n)$-οστό μερικό άθροισμα της σειράς

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \cdots$$

ισούται με

$$s_{2n} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2^k} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Αφού η σειρά έχει θετικούς όρους και $s_{2n} \leq 2$ για κάθε n, έπεται ότι η σειρά συγκλίνει.

21. *Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη – για την ακολουθία* (a_n) *– ώστε να συγκλίνει η σειρά*

$$a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \cdots .$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $s_{2n} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$s_1 = a_1, \quad s_3 = a_2, \quad s_5 = a_3, \quad s_7 = a_4,$$

και γενικά, $s_{2n-1} = a_n$. Έπεται ότι η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $a_n \to 0$. Πράγματι, αν η σειρά συγκλίνει και αν s είναι το άθροισμά της, τότε $s = \lim s_{2n} = 0$ και $a_n = s_{2n-1} \to s = 0$. Αντίστροφα, αν $a_n \to 0$ τότε $s_{2n} = 0 \to 0$ και $s_{2n-1} = a_n \to 0$, άρα $s_n \to 0$.

22. *Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k$ *στις παρακάτω περιπτώσεις:*

(α) $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ (β) $a_k = \sqrt{1+k^2} - k$

(γ) $a_k = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$ (δ) $a_k = (\sqrt[k]{k} - 1)^k$.

Υπόδειξη. (α) Αν $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$, τότε $s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sqrt{n+1} - 1 \to +\infty$, άρα η σειρά αποκλίνει.

(β) Έχουμε $a_k = \sqrt{1+k^2} - k = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}+k}$. Παρατηρούμε ότι $\frac{a_k}{1/k} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}+k} \to \frac{1}{2} > 0$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(γ) Έχουμε $a_k = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$. Παρατηρούμε ότι $\frac{a_k}{1/k^{3/2}} \to \frac{1}{2} > 0$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(δ) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας: έχουμε $\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{k} - 1 \to 0 < 1$, άρα η σειρά συγκλίνει.

23. *Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

Υπόδειξη. (α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1}$: παρατηρούμε ότι

$$\frac{a_k}{1/k^2} = \frac{k^3+k^2\sqrt{k}}{2k^3-1} \to \frac{1}{2} > 0.$$

Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)$: θέτουμε $\theta_k = \sqrt[k]{k}-1 \geq 0$. Τότε, $k = (1+\theta_k)^k$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \geq 3$,

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < 3 \leq k = (1+\theta_k)^k.$$

Άρα, $\theta_k > \frac{1}{k}$ για κάθε $k \geq 3$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \theta_k$ αποκλίνει κι αυτή.

(γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2}$: παρατηρούμε ότι $|a_k| \leq \frac{1}{k^2}$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης.

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$: χρησιμοποιούμε το κριτήριο λόγου. Έχουμε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!k^k}{k!(k+1)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^k} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \to \frac{1}{e} < 1,$$

άρα η σειρά συγκλίνει.

24. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές. Όπου εμφανίζονται οι παράμετροι $p, q, x \in \mathbb{R}$ να βρεθούν οι τιμές τους για τις οποίες οι αντίστοιχες σειρές συγκλίνουν.*

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}$ (β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p^k k^p$ $(0<p)$ (γ) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p-k^q}$ $(0<q<p)$

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ (ε) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k-q^k}$ $(0<q<p)$ (στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$

(ζ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ (η) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p \left(\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)$.

Υπόδειξη. (α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}$: χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας. Έχουμε $\sqrt[k]{a_k} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} \to \frac{1}{e} < 1$, άρα η σειρά συγκλίνει.

(β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p^k k^p$: χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου. Έχουμε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = p\frac{(k+1)^p}{k^p} \to p,$$

άρα η σειρά συγκλίνει αν $0<p<1$ και αποκλίνει αν $p>1$. Για $p=1$ παίρνουμε τη σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k$, η οποία αποκλίνει ($k \not\to 0$ όταν $k \to \infty$!).

(γ) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p-k^q}$: θεωρούμε την $b_k = 1/k^p$. Αφού $q < p$, έχουμε $\frac{a_k}{b_k} = \frac{1}{1-k^{-(p-q)}} \to 1 > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά μας συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει, δηλαδή αν και μόνο αν $p > 1$ (και $0 < q < p$).

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$: θεωρούμε την $b_k = 1/k$. Έχουμε $\frac{a_k}{b_k} = \frac{k}{k\sqrt[k]{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \to 1 > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά αποκλίνει (διότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει).

(ε) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k-q^k}$: θεωρούμε την $b_k = 1/p^k$. Αφού $0 < q < p$, έχουμε $\frac{a_k}{b_k} = \frac{1}{1-(q/p)^k} \to 1 > 0$ (διότι $(p/q)^k \to 0$ αφού $0 < p/q < 1$). Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά μας συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k}$ συγκλίνει, δηλαδή αν και μόνο αν $p > 1$ (και $0 < q < p$).

(στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$: παρατηρούμε ότι $0 < a_k \leq \frac{3}{2^k}$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ συγκλίνει, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης.

(ζ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$: παρατηρούμε ότι

$$a_k = k^p \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \frac{k^p}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}.$$

Θεωρούμε την $b_k = \frac{k^p}{k^{3/2}}$ και παρατηρούμε ότι $\frac{a_k}{b_k} \to \frac{1}{2} > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{(3/2)-p}}$ συγκλίνει. Δηλαδή, αν $\frac{3}{2} - p > 1$, το οποίο ισχύει αν $p < \frac{1}{2}$.

(η) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p \left(\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)$: παρατηρούμε ότι, για $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} a_k &= k^p(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}+\sqrt{k-1}-\sqrt{k}) \\ &= k^p\left(\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k-1}}\right) \\ &= -2k^{p-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{k-1}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1})}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, η $(a_k)_{k\geq 2}$ έχει αρνητικούς όρους. Άρα, συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-a_k)$ συγκλίνει (εξηγήστε γιατί). Θεωρούμε την $b_k = \frac{k^p}{k^2}$ και παρατηρούμε ότι $\frac{-a_k}{b_k} \to 1 > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2-p}}$ συγκλίνει. Δηλαδή, αν $2 - p > 1$, το οποίο ισχύει αν $p < 1$.

25. *Έστω ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+k^2 a_k}$ συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $0 \leq \frac{a_k}{1+k^2 a_k} \leq \frac{1}{k^2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι φανερό αν $a_k = 0$, ενώ αν $a_k > 0$ μπορείτε να γράψετε

$$0 < \frac{a_k}{1+k^2 a_k} < \frac{a_k}{k^2 a_k} = \frac{1}{k^2}.$$

Αφού η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, το συμπέρασμα προκύπτει από το κριτήριο σύγκρισης.

26. *Ορίζουμε μια ακολουθία (a_k) ως εξής: αν ο k είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k}$ και αν ο k δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k^2}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.*

Υπόδειξη. Η σειρά έχει θετικούς όρους. Αρκεί να δείξετε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη. Παρατηρήστε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} s_{m^2} = \sum_{k=1}^{m^2} a_k &= \sum_{k=1}^{m} a_{k^2} + \sum_{\substack{k \leq m^2 \\ k \neq s^2}} a_k \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{m^2} \frac{1}{k^2} \\ &\leq 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = M < +\infty. \end{aligned}$$

Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε $s_n \leq s_{n^2} \leq M$. Δηλαδή, η (s_n) είναι άνω φραγμένη.

27. *Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^p}$, όπου $p \in \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Αν $p > 0$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει από το κριτήριο του Dirichlet. Αν $p \leq 0$, τότε $(-1)^k \frac{1}{k^p} \not\to 0$, άρα η σειρά αποκλίνει.

28. *Έστω $\{a_k\}$ φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο 0. Ορίζουμε*

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k.$$

Δείξτε ότι $0 \leq (-1)^n (s - s_n) \leq a_{n+1}$.

Υπόδειξη. Γράφουμε $(-1)^n (s-s_n) = (-1)^n \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n+k-1} a_k$. Παρατηρήστε ότι: για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+2m} (-1)^{n+k-1} a_k = (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{n+2m-1} - a_{n+2m}) \geq 0,$$

άρα

$$(-1)^n (s - s_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+2m} (-1)^{n+k-1} a_n \geq 0.$$

Επίσης,

$$\sum_{k=n+1}^{n+2m+1}(-1)^{n+k-1}a_k = a_{n+1}-(a_{n+2}-a_{n+3})-\cdots-(a_{n+2m}-a_{n+2m+1})\leq a_{n+1},$$

άρα

$$(-1)^n(s-s_n)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{n+2m+1}(-1)^{n+k-1}a_n\leq a_{n+1}.$$

29. *Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει τότε $ka_k\to 0$.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει, η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy. Άρα, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε: αν $n>m\geq n_0$ τότε

$$a_{m+1}+\cdots+a_n=|s_n-s_m|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ειδικότερα, αν $n\geq 2n_0$, παίρνοντας $m=n_0$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η (a_n) είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\frac{\varepsilon}{2}>a_{n_0+1}+\cdots+a_n\geq(n-n_0)a_n\geq\frac{na_n}{2},$$

διότι $n-n_0\geq\frac{n}{2}$. Δηλαδή, αν $n\geq 2n_0$ έχουμε $na_n<\varepsilon$. Έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(na_n)=0$.

30. *Έστω ότι $a_k>0$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι οι*

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2,\qquad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{1+a_k},\qquad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2}{1+a_k^2}$$

συγκλίνουν επίσης.

Υπόδειξη. (α) Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει, έχουμε $a_k\to 0$. Άρα, υπάρχει $m\in\mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k\geq m$, $0\leq a_k\leq 1$. Τότε, για κάθε $k\geq m$ έχουμε $0\leq a_k^2\leq a_k$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2$ συγκλίνει.

(β) Παρατηρήστε ότι $0\leq\frac{a_k}{1+a_k}\leq a_k$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{1+a_k}$ συγκλίνει.

(γ) Παρατηρήστε ότι $0\leq\frac{a_k^2}{1+a_k^2}\leq a_k^2$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$.

31. *Υποθέτουμε ότι $a_k\geq 0$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt{a_ka_{k+1}}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι, αν η $\{a_k\}$ είναι φθίνουσα, τότε ισχύει και το αντίστροφο.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $0 \leq \sqrt{a_k a_{k+1}} \leq \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και εφαρμόστε το κριτήριο σύγκρισης.

Με την υπόθεση ότι η (a_k) είναι φθίνουσα, παρατηρήστε ότι $0 \leq a_{k+1} \leq \sqrt{a_k a_{k+1}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και εφαρμόστε το κριτήριο σύγκρισης.

32. *Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \leq \sqrt{M_1 M_2},$$

όπου

$$M_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \quad \text{και} \quad M_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

33. *Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Δείξτε ότι*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1.$$

Υπόδειξη. Αν $b_0 = 1$ και

$$b_k = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}$$

για $k \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι

$$\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = b_{k-1} - b_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = b_0 - b_n = 1 - b_n.$$

Παρατηρώντας ότι

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) > a_1 + \cdots + a_n \to +\infty$$

δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1 - b_n \to 1.$$

Γ′ Ομάδα

34. *Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $a_k \to 0$. Δείξτε ότι: αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{a_k, \frac{1}{k}\right\} = +\infty.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{a_k, \frac{1}{k}\right\}$ συγκλίνει. Αφού η (a_k) φθίνει προς το 0, το ίδιο ισχύει για την $\left(\min\{a_k, \frac{1}{k}\}\right)$ (εξηγήστε γιατί). Από το κριτήριο συμπύκνωσης, η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \min\left\{a_{2^k}, \frac{1}{2^k}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{2^k a_{2^k}, 1\right\}$$

συγκλίνει. Ειδικότερα, $\min\left\{2^k a_{2^k}, 1\right\} \to 0$, άρα τελικά έχουμε $\min\left\{2^k a_{2^k}, 1\right\} = 2^k a_{2^k}$ (εξηγήστε γιατί).

Έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. Χρησιμοποιώντας ξανά το κριτήριο συμπύκνωσης, αυτή τη φορά για τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, βλέπουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Αυτό είναι άτοπο από την υπόθεση.

35. *Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.*

(α) *Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ αποκλίνει.*

(β) *Δείξτε ότι: για $1 \leq m < n$,*

$$\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} \geq 1 - \frac{s_m}{s_n}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ αποκλίνει.

(γ) *Δείξτε ότι $\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.*

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ συγκλίνει. Τότε,

$$\frac{a_k}{1+a_k} \to 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{1+a_k} = 1 - \frac{a_k}{1+a_k} \to 1 \quad \Rightarrow 1 + a_k \to 1.$$

Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: $1 + a_k < \frac{3}{2}$ για κάθε $k \geq m$. Έπεται ότι $0 \leq a_k \leq \frac{3}{2} \frac{a_k}{1+a_k}$ για κάθε $k \geq m$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, άτοπο.

(β) Παρατηρήστε ότι η (s_n) είναι αύξουσα. Άρα, αν $1 \leq m < n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} &\geq \frac{a_{m+1}}{s_n} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} = \frac{a_{m+1} + \cdots + a_n}{s_n} \\ &= \frac{s_n - s_m}{s_n} = 1 - \frac{s_m}{s_n}.\end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο Cauchy, για $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n > m \geq n_0$ τότε

$$\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} < \frac{1}{2},$$

δηλαδή

$$1 - \frac{s_m}{s_n} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{s_m}{s_n} > \frac{1}{2}.$$

Σταθεροποιήστε $m \geq n_0$ και αφήστε το $n \to \infty$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει, έχουμε $s_n \to \infty$. Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_m}{s_n} = 0$, το οποίο οδηγεί σε άτοπο.

(γ) Παρατηρήστε ότι

$$\frac{a_n}{s_n^2} = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n^2} \leq \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}} = \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}.$$

Αν t_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$, τότε

$$t_n = \frac{a_1}{s_1^2} + \frac{a_2}{s_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_1} + \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}\right) \leq \frac{2}{s_1}.$$

Η (t_n) είναι άνω φραγμένη, άρα η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

36. *Υποθέτουμε ότι* $a_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *και ότι η* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει. Θέτουμε* $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$.

(α) *Δείξτε ότι: για* $1 \leq m < n$,

$$\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} \geq 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ *αποκλίνει.*

(β) *Δείξτε ότι* $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$ *και συμπεράνατε ότι η* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ *συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, έχουμε $r_n \to 0$. Παρατηρήστε επίσης ότι η (r_n) είναι φθίνουσα.

(α) Αν $1 \leq m < n$,

$$\begin{aligned}\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} &\geq \frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_m} \geq \frac{a_m + \cdots + a_n}{r_m} \\ &= \frac{r_m - r_{n+1}}{r_m} = 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m} \geq 1 - \frac{r_n}{r_m}.\end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο Cauchy υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n > m \geq n_0$,

$$1 - \frac{r_n}{r_m} \leq \frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} < \frac{1}{2}.$$

Σταθεροποιώντας $m \geq n_0$ και αφήνοντας το $n \to \infty$ καταλήξτε σε άτοπο.
(β) Παρατηρήστε ότι

$$\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}} = \frac{r_n - r_{n+1}}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} = \frac{a_n}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} \geq \frac{a_n}{2\sqrt{r_n}}.$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}} \leq 2\left(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \sqrt{r_2} - \sqrt{r_3} + \cdots + \sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right) \leq 2\sqrt{r_1}.$$

Έπεται ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

37. *Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k$ αποκλίνει.*

Υπόδειξη. Θέτουμε $b_k = k a_k$. Τότε, θέλουμε να δείξουμε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ αποκλίνει.

Παρατηρήστε ότι αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα. Αφού η $\frac{1}{k}$ φθίνει προς το 0, το κριτήριο Dirichlet δείχνει ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ συγκλίνει, το οποίο είναι άτοπο.

38. *Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{k}{k+1}}$ συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Γράφουμε $a_k^{\frac{k}{k+1}} = \frac{a_k}{a_k^{\frac{1}{k+1}}}$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $a_k > 1/2^{k+1}$ τότε $a_k^{\frac{1}{k+1}} > 1/2$. Συνεπώς,

$$a_k^{\frac{k}{k+1}} \leq 2a_k.$$

(β) Αν $a_k \leq 1/2^{k+1}$ τότε

$$a_k^{\frac{k}{k+1}} \leq \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{2^k}.$$

Σε κάθε περίπτωση,

$$a_k^{\frac{k}{k+1}} \leq 2a_k + \frac{1}{2^k}.$$

Όμως, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, άρα η $\sum_{k=1}^{\infty}(2a_k + 2^{-k})$ συγκλίνει. Το ζητούμενο έπεται από το κριτήριο σύγκρισης.

39. *Έστω (a_k) η ακολουθία που ορίζεται από τις*

$$a_{2k-1} = \frac{1}{k} \quad \textit{και} \quad a_{2k} = \frac{1}{2^k}.$$

Εξετάστε αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - 1. \end{aligned}$$

Αφού $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to +\infty$ όταν $n \to \infty$, βλέπουμε ότι $s_{2n} \to +\infty$. Άρα, η σειρά αποκλίνει (και μάλιστα στο $+\infty$ – εξηγήστε γιατί).

40. *Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε*

$$b_k = \frac{1}{k}\sum_{m=k+1}^{2k} a_m.$$

Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Έστω s_n και t_n τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ αντίστοιχα. Θα συγκρίνουμε τα s_{2n} και t_n. Έχουμε

$$t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_2 + \frac{1}{2}(a_3 + a_4) + \frac{1}{3}(a_4 + a_5 + a_6) + \cdots + \frac{1}{n}(a_{n+1} + \cdots + a_{2n}).$$

Δείξτε ότι στο t_n εμφανίζονται μόνο οι $a_2, \ldots, a_{2n}$ και ότι ο συντελεστής καθενός a_k στο t_n είναι μικρότερος ή ίσος του 1. Έπεται ότι $t_n \leq s_{2n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει.

Από την άλλη πλευρά, θεωρήστε το μερικό άθροισμα t_{2n}, και δείξτε ότι κάθε a_k, $2 \leq k \leq n$, εμφανίζεται εκεί με συντελεστή $\sigma_k = \frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{2m-1}$ αν ο k είναι άρτιος, και συντελεστή $\sigma_k = \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m}$ αν ο k είναι περιττός. Σε κάθε περίπτωση, $\sigma_k \geq \frac{1}{2}$. Άρα,

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + 2t_{2n}.$$

Έπεται ότι, αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

41. *Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε την ακολουθία*

$$b_k = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k}{k(k+1)}.$$

Δείξτε ότι: αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει και τα αθροίσματα των δύο σειρών είναι ίσα.

Υπόδειξη. Αν $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $t_n = b_1 + \cdots + b_n$, τότε

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{k} \frac{sa_s}{k(k+1)} \\ &= \sum_{s=1}^{n} sa_s \sum_{k=s}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{s=1}^{n} sa_s \sum_{k=s}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \sum_{s=1}^{n} sa_s \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \sum_{s=1}^{n} a_s - \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n+1} \\ &= s_n - nb_n. \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι

$$nb_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n+1} \to 0.$$

Με βάση το Λήμμα του Abel, γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = \sum_{k=1}^{n-1} s_k(k - (k+1)) + ns_n - 1 = -\sum_{k=1}^{n-1} s_k + ns_n - 1.$$

Άρα,

$$nb_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} ka_k = -\frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n-1} + \frac{ns_n}{n+1} - \frac{1}{n+1} \to -s + s - 0 = 0,$$

όπου $s = \lim s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (εδώ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αν $s_n \to s$ τότε $\frac{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}}{n-1} \to s$). Αφού $nb_n \to 0$, από την $t_n = s_n - nb_n$ βλέπουμε ότι $t_n \to s$.

Δηλαδή,
$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

42. *Έστω* (a_k) *ακολουθία θετικών αριθμών ώστε* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ *και* $a_k \to 0$. *Δείξτε ότι αν* $0 \leq \alpha < \beta$ *τότε υπάρχουν φυσικοί* $m \leq n$ *ώστε*
$$\alpha < \sum_{k=m}^{n} a_k < \beta.$$

Υπόδειξη. Αφού $a_k \to 0$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $k \geq m$ τότε
$$a_k < \beta - \alpha.$$
Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$, υπάρχει ελάχιστος φυσικός $\ell \geq m$ ώστε
$$a_m + \cdots + a_\ell \geq \beta.$$
(α) Δείξτε ότι $\ell > m$.
(β) Αν $n = \ell - 1$, παρατηρήστε ότι $n \geq m$ και
$$a_m + \cdots + a_n < \beta,$$
ενώ
$$a_m + \cdots + a_n \geq \beta - a_\ell > \beta - (\beta - \alpha) = \alpha.$$

43. *Δείξτε ότι αν* $0 \leq \alpha < \beta$ *τότε υπάρχουν φυσικοί* $m \leq n$ *ώστε*
$$\alpha < \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n} < \beta.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση για την $a_k = \frac{1}{k}$.

Κεφάλαιο 3

Ομοιόμορφη συνέχεια

Ομάδα Α΄

1. *Δείξτε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής για μια συνεχή συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bolzano–Weiertstrass.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$, με απαγωγή σε άτοπο. Αν αυτό δεν ισχύει, μπορούμε να βρούμε $x_n \in [a, b]$ ώστε $|f(x_n)| > n$, $n = 1, 2, \ldots$. Η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) ώστε $x_{k_n} \to x_0 \in [a, b]$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, από την αρχή της μεταφοράς έχουμε $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$, άρα

$$|f(x_{k_n})| \to |f(x_0)|.$$

Όμως, $|f(x_{k_n})| > k_n \geq n$. Άρα, $|f(x_{k_n})| \to +\infty$, το οποίο είναι άτοπο.

Είδαμε ότι η f είναι φραγμένη, άρα

$$M := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} < \infty.$$

Τότε, μπορούμε να βρούμε $x_n \in [a, b]$ ώστε $f(x_n) \to M$ (γενικά, αν $s = \sup(A)$ τότε υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A ώστε $a_n \to s$). Η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) ώστε $x_{k_n} \to x_0 \in [a, b]$. Αφού $f(x_n) \to M$, έχουμε $f(x_{k_n}) \to M$. Από την αρχή της μεταφοράς,

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = M.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή (στο x_0).

Εργαζόμενοι όμοια, δείχνουμε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή.

2. *Έστω $X \subseteq R$. Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in X$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|.$$

Δείξτε ότι αν η $f : X \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;

Υπόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M} > 0$. Αν $x, y \in X$ και $|x - y| < \delta$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta = \varepsilon.$$

Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Όμως, η f δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz στο $[0, 1]$. Θα υπήρχε $M > 0$ ώστε: για κάθε $0 < x < 1$ να ισχύει

$$|\sqrt{x} - 0| \leq M|x - 0|, \quad \text{δηλαδή} \quad 1 \leq M\sqrt{x}.$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο όταν $x \to 0^+$.

3. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b). Δείξτε ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz αν και μόνο αν η f' είναι φραγμένη.*

Υπόδειξη. Έστω ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ για κάθε $x, y \in [a, b]$. Θεωρούμε $x_0 \in (a, b)$. Τότε, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Όμως, αν $x \neq x_0$ στο (a, b), έχουμε

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq M \quad \text{άρα} \quad |f'(x_0)| = \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq M.$$

Δηλαδή, η f' είναι φραγμένη.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f'(\xi)| \leq M$ για κάθε $\xi \in (a, b)$. Έστω $x < y$ στο $[a, b]$. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (x, y)$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq M \cdot |x - y|.$$

Δηλαδή, η f είναι Lipschitz συνεχής.

4. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και $f(x) = x^{1/n}$, $x \in [0, 1]$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz. Είναι ομοιόμορφα συνεχής;*

Υπόδειξη. Έχουμε $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$ για $x \in (0, 1)$. Αφού $\frac{1}{n} - 1 < 0$, έχουμε

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty,$$

δηλαδή η f' δεν είναι φραγμένη. Από την Άσκηση 3, η f δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz. Είναι όμως ομοιόμορφα συνεχής ως συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα.

5. *Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν συνθήκη Lipschitz:*

(α) *$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$.*

(β) *$g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $g(0) = 0$.*

Υπόδειξη. Από την Άσκηση 3 αρκεί να εξετάσετε αν καθεμία από τις f και g έχει φραγμένη παράγωγο στο $(0, 1)$. Ελέγξτε ότι: η f δεν έχει φραγμένη παράγωγο στο $(0, 1)$, ενώ η g έχει φραγμένη παράγωγο στο $(0, 1)$.

6. *Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to B$ και $g : B \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\zeta = \zeta(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $u, v \in B$ και $|u - v| < \zeta$ τότε $|g(u) - g(v)| < \varepsilon$.

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta = \delta(\zeta) > 0$ ώστε αν $x, y \in A$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \zeta$. Παρατηρήστε ότι το δ εξαρτάται μόνο από το ε, αφού το ζ εξαρτάται μόνο από το ε.

Θεωρήστε $x, y \in A$ με $|x - y| < \delta$. Τότε, τα $u = f(x)$ και $v = f(y)$ ανήκουν στο B και $|u - v| = |f(x) - f(y)| < \zeta$. Άρα,

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| = |g(u) - g(v)| < \varepsilon.$$

Έπεται ότι η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

7. *Έστω $f, g : I \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι*

(α) *η $f + g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.*

(β) *η $f \cdot g$ δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα συνεχής στο I, αν όμως οι f, g υποτεθούν και φραγμένες τότε η $f \cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I, υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta_1$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ομοίως, αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta_2$ τότε $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Τότε, αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta$, έχουμε

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |(f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Έπεται ότι η $f + g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

(β) Αν οι f, g είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο I τότε η $f \cdot g$ δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα συνεχής στο I: θεωρήστε τις $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = g(x) = x$. Αυτές είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $[0, +\infty)$, όμως η $(f \cdot g)(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Αν όμως οι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις $f, g : I \to \mathbb{R}$ υποτεθούν και φραγμένες, τότε η $f \cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I. Υπάρχουν $M, N > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ και $|g(x)| \leq N$ για κάθε $x \in I$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια των f και g μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta$ τότε

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{M + N} \quad \text{και} \quad |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{M + N}.$$

Τότε, αν $x, y \in I$ και $|x - y| < \delta$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{M + N} + N \cdot \frac{\varepsilon}{M + N} = \varepsilon. \end{aligned}$$

8. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|x| \geq M$ τότε $|f(x)| < \varepsilon$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Σημείωση: Η υπόθεση, ισοδύναμα, μας λέει ότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση, υπάρχει $M = M(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|x| \geq M$ τότε $|f(x)| < \varepsilon/3$. Επίσης, η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-M, M]$, οπότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-M, M]$. Άρα, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με $\delta < M$, ώστε αν $x, y \in [-M, M]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$.

Θα δείξουμε ότι αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) $x, y \in (-\infty, M]$: τότε, $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

(ii) $x, y \in [M, +\infty)$: τότε, $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

(iii) $x, y \in [-M, M]$: τότε, από την επιλογή του δ έχουμε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

(iv) $x < M < y$: τότε, $x \in [-M, M]$ (διότι $\delta < M$) και $|x - M| < |x - y| < \delta$, άρα $|f(x) - f(M)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Επίσης, $M, y \geq M$ άρα $|f(M)| < \frac{\varepsilon}{3}$ και $|f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(M)| + |f(M) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f(M)| + |f(M)| + |f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(v) $x < -M < y$: όμοια με την προηγούμενη περίπτωση.

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

9. *Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. Έστω $\ell := \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - \ell$. Τότε, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\varepsilon) > a$ ώστε αν $x \geq M$ τότε $|g(x)| < \varepsilon$. Το επιχείρημα της Άσκησης 8 δείχνει ότι η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Αφού η σταθερή συνάρτηση $h(x) = \ell$ είναι επίσης ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$, έπεται ότι η $f = g + h$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$.

10. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A|x| + B$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Αφού η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, για $\varepsilon = 1$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < 1$.

Έστω $x > 0$. Θεωρούμε τον ελάχιστο φυσικό $n = n_x$ για τον οποίο $n_x \frac{\delta}{2} > x$ (αυτός υπάρχει, από την Αρχιμήδεια ιδιότητα και από την αρχή του ελαχίστου). Τότε,

$$(n_x - 1)\frac{\delta}{2} \leq x < n_x \frac{\delta}{2}. \tag{$*$}$$

Θεωρούμε τα σημεία: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\delta}{2}, \ldots, x_n = n\frac{\delta}{2}$. Έχουμε $|x_{k+1} - x_k| < \delta$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ και $|x - x_n| < \delta$. Άρα,

$$|f(x) - f(0)| \leq |f(x) - f(x_n)| + \cdots + |f(x_1) - f(x_0)| < n + 1 = n_x + 1 < \frac{2}{\delta}x + 2$$

από την $(*)$. Δηλαδή, για κάθε $x > 0$.

$$|f(x)| \leq \frac{2}{\delta}x + 2 + |f(0)|.$$

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο για $x < 0$ δείξτε ότι

$$|f(x)| \leq \frac{2}{\delta}|x| + 2 + |f(0)|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, το ζητούμενο ισχύει με $A = \frac{2}{\delta}$ και $B = |f(0)| + 2$.

11. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Άσκηση δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. Έστω $n > 1$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Από την Άσκηση 10 υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε $x^n \leq Ax + B$ για κάθε $x > 0$. Τότε,

$$x^{n-1} \leq A + \frac{B}{x}$$

για κάθε $x > 0$. Αφού $n > 1$, έχουμε $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{n-1} = +\infty$. Όμως, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(A + \frac{B}{x}\right) = A$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο.

12. (α) *Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.*
(β) *Δείξτε ότι η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.*

Υπόδειξη. (α) Έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Επίσης, η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, a]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, a]$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$ χρησιμοποιώντας την τεχνική της Άσκησης 8 (διακρίνοντας περιπτώσεις).
(β) Η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$. Αν $x, y \in [1, +\infty)$, τότε

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x - y|,$$

δηλαδή η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz στο $[1, +\infty)$. Συνεπώς, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1, +\infty)$. Τώρα, μπορείτε να εφαρμόσετε το (α).

13. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\hat{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ ώστε $\hat{f}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.*

Υπόδειξη. Είδαμε (στη θεωρία) ότι αν η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχουν τα

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \quad \text{και} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = m$$

και είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν επεκτείνουμε την f στο $[a,b]$ ορίζοντας $\hat{f}(a)=\ell$, $\hat{f}(b)=m$ και $\hat{f}(x)=f(x)$ για $x\in(a,b)$, τότε η $\hat{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$.

14. *Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.*

(i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=3x+1$.

(ii) $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$.

(iii) $f:(0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}\sin^2 x$.

(iv) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

(v) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$.

(vi) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

(vii) $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{\cos(x^3)}{x}$.

(viii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$.

(ix) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$.

(x) $f:[-2,0]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

(xi) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x\sin x$.

(xii) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{\cos(x^2)}{x+1}$.

Υπόδειξη. Όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.
(i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=3x+1$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής: είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 3. Για την ακρίβεια,

$$|f(x)-f(y)|=3|x-y|$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.
(ii) $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής: είναι Lipschitz συνεχής, αφού

$$|f'(x)|=\frac{1}{x^2}\leq\frac{1}{4}$$

στο $[2,+\infty)$.
(iii) $f:(0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}\sin^2 x$. Η f ορίζεται στο ημιανοικτό διάστημα $(0,\pi]$ και

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x=1\cdot 0=0.$$

Συνεπώς, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(iv) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. Η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, διότι δεν υπάρχει το

$$\lim_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}.$$

(v) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$. Επεκτείνουμε την f σε συνεχή συνάρτηση στο $[0,+\infty)$, θέτοντας

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

Αν $x \geq 1$ τότε

$$|f'(x)| \leq \left|\sin\frac{1}{x}\right| + \frac{1}{x}\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq 2.$$

Συνεπώς, η f είναι Lipschitz συνεχής, άρα και ομοιόμορφα συνεχής, στο $[1, +\infty)$. Αφού είναι και συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι ομοιόμορφα συνεχής (από την Άσκηση 12(α)).

(vi) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Επεκτείνουμε την f σε συνεχή συνάρτηση στο $[0, +\infty)$, θέτοντας

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Αφού

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

η f είναι ομοιόμορφα συνεχής από την Άσκηση 9.

(vii) $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^3)}{x}$. Επεκτείνουμε την f σε συνεχή συνάρτηση στο $[1, +\infty)$, θέτοντας

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cos(x^3)}{x} = \cos(1).$$

Αφού

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(x^3)}{x} = 0,$$

η f είναι ομοιόμορφα συνεχής από την Άσκηση 9.

(viii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$. Αφού $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+4} = 0$, η f ικανοποιεί την υπόθεση της Άσκησης 8. Συνεπώς, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ix) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$, από την Άσκηση 9. Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, 0]$, πάλι από την Άσκηση 9. Έπεται ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$ (χρησιμοποιήστε την τεχνική της Άσκησης 8).

(x) $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(xi) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x\sin x$. Η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Παρατηρούμε ότι η $f'(x) = x\cos x + \sin x$ δεν είναι φραγμένη και ότι παίρνει μεγάλες τιμές στα σημεία της μορφής $2n\pi$ όπου n μεγάλος φυσικός. Ορίζουμε $x_n = 2n\pi$ και $y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$. Τότε, $y_n - x_n = \frac{1}{n} \to 0$, αλλά

$$f(y_n) - f(x_n) = \big(2n\pi + (1/n)\big)\sin(1/n) = 2\pi\frac{\sin(1/n)}{1/n} + \frac{\sin(1/n)}{n} \to 2\pi\cdot 1 + 0 = 2\pi \neq 0$$

όταν $n \to \infty$. Από τον χαρακτηρισμό της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών έπεται ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(xii) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x+1}$. Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$, από την Άσκηση 9.

Ομάδα Β′. Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

15. *Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.*

Λάθος. Αν μια συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (και είναι πραγματικοί αριθμοί). Για την $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ έχουμε $f(x) \to +\infty$ όταν $x \to 0^+$.

16. *Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x-1}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.*

Λάθος. Αν μια συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (και είναι πραγματικοί αριθμοί). Για την $f(x) = \frac{1}{x-1}$ έχουμε $f(x) \to -\infty$ όταν $x \to 1^-$.

17. *Αν η συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη στο $(0, 1)$, τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.*

Σωστό. Έστω ότι η συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (και είναι πραγματικοί αριθμοί). Έπεται (δείτε την Άσκηση 13) ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\tilde{f} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ώστε $\tilde{f}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Η $\tilde{f}$ είναι φραγμένη (ως συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα). Συνεπώς, η f είναι επίσης φραγμένη (ως περιορισμός φραγμένης συνάρτησης).

18. *Αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy.*

Σωστό. Αποδείχθηκε στη θεωρία.

19. *Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$, τότε το $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ υπάρχει.*

Σωστό. Η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 2}$ είναι ακολουθία Cauchy στο $(0, 1)$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, η ακολουθία $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ είναι ακολουθία Cauchy (από το προηγούμενο ερώτημα). Συνεπώς, η $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ συγκλίνει.

20. *Θεωρούμε τις $f(x) = x$ και $g(x) = \sin x$. Οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $\mathbb{R}$, όμως η fg δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.*

Σωστό. Οι f και g έχουν φραγμένη παράγωγο, άρα είναι Lipschitz συνεχείς (με σταθερά 1, εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Όμως, η $(fg)(x) = x \sin x$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$: δείτε την Άσκηση 14(xi).

21. *Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $x > 0$ και $f(x) = 2x$ αν $x \leq 0$, είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.*

Σωστό. Η f εχει φραγμένη παράγωγο (ίση με 1) στο $(0,+\infty)$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$. Ομοίως, η f έχει φραγμένη παράγωγο (ίση με 2) στο $(-\infty,0)$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty,0]$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Άσκησης 8, μπορείτε να δείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Σημείωση: Μπορείτε να ελέγξετε απευθείας ότι

$$|f(x)-f(y)| \leq 2|x-y|$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, διακρίνοντας τις περιπτώσεις (α) $x,y\geq 0$, (β) $x,y\leq 0$, (γ) $x<0<y$. Αφού η f είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 2, συμπεραίνουμε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής.

22. *Κάθε φραγμένη και συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Λάθος. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\cos(x^2)$ είναι φραγμένη και συνεχής, όμως δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Για τις ακολουθίες $x_n=\sqrt{\pi n+\pi}$ και $y_n=\sqrt{\pi n}$ έχουμε $x_n-y_n\to 0$, αλλά $|f(x_n)-f(y_n)|=2\to 2\neq 0$ όταν $n\to\infty$.

Ομάδα Γ′

23. *Δείξτε ότι η συνάρτηση $f:(0,1)\cup(1,2)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=0$ αν $x\in(0,1)$ και $f(x)=1$ αν $x\in(1,2)$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $f:(0,1)\cup(1,2)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=0$ αν $x\in(0,1)$ και $f(x)=1$ αν $x\in(1,2)$ είναι συνεχής: έστω $x_0\in(0,1)$ και έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $\delta=\delta(x_0)>0$ (δεν εξαρτάται από το $\varepsilon>0$) ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(0,1)$. Αν $x\in(0,1)\cup(1,2)$ και $|x-x_0|<\delta$, τότε $x\in(0,1)$. Άρα, $|f(x)-f(x_0)|=|0-0|=0<\varepsilon$. Δηλαδή, η f είναι συνεχής στο x_0.

Με τον ίδιο τρόπο μπορείτε να δείξετε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0\in(1,2)$. Άρα, η f είναι συνεχής στο $(0,1)\cup(1,2)$.

Όμως, η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Θεωρήστε τις ακολουθίες $x_n=1-\frac{1}{n+1}$ και $y_n=1+\frac{1}{n+1}$. Έχουμε $x_n\in(0,1)$, $y_n\in(1,2)$ και $y_n-x_n=\frac{2}{n+1}\to 0$. Όμως, $f(y_n)-f(x_n)=1-0=1\not\to 0$. Από τον χαρακτηρισμό της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών έπεται το συμπέρασμα.

Σημείωση: Το ίδιο παράδειγμα δείχνει ότι αν οι περιορισμοί $f|_A$ και $f|_B$ μιας συνάρτησης f σε δύο υποσύνολα A και B του πεδίου ορισμού της είναι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις, δεν έπεται αναγκαστικά ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $A\cup B$ (εξηγήστε γιατί).

24. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $\varepsilon>0$. Δείξτε ότι μπορούμε να χωρίσουμε το $[a,b]$ σε πεπερασμένα το πλήθος διαδοχικά υποδιαστήματα του ιδίου μήκους έτσι ώστε: αν τα x,y ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα, τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon>0$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $x,y\in[a,b]$ και $|x-y|<\delta$ τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Επιλέγουμε φυσικό αριθμό n ώστε $\frac{b-a}{n}<\delta$ και χωρίζουμε το $[a,b]$ στα διαδοχικά υποδιαστήματα

$$[x_k,x_{k+1}]=\left[a+k\frac{(b-a)}{n},a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right],\quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Αν τα x, y ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, τότε $|x-y| \leq x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} < \delta$. Άρα, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

25. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, φραγμένη και μονότονη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Αφού η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και αύξουσα συνάρτηση, υπάρχουν τα

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = m = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Αφού η f είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, η Άσκηση 9 δείχνει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$. Το ίδιο ακριβώς επιχείρημα δείχνει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, 0]$. Τέλος, μπορείτε να δείξετε την ομοιόμορφη συνέχεια στο $\mathbb{R}$ με την τεχνική της Άσκησης 8 (διακρίνοντας περιπτώσεις).

26. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και περιοδική συνάρτηση. Δηλαδή, υπάρχει $T > 0$ ώστε $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. Η f είναι συνεχής στο $[0, 2T]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 2T]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $0 < \delta = \delta(\varepsilon) < T$ ώστε αν $x, y \in [0, 2T]$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Δείξτε ότι αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$: μπορείτε να υποθέσετε ότι $x < y$. Υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $mT \leq x \leq (m+1)T$. Τότε, $y < x + \delta < (m+1)T + T = mT + 2T$. Παρατηρήστε ότι $x - mT, y - mT \in [0, 2T]$ και ότι

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - mT) - f(y - mT)|$$

από την περιοδικότητα της f. Αφού

$$|(x - mT) - (y - mT)| = |x - y| < \delta,$$

έχουμε $|f(x - mT) - f(y - mT)| < \varepsilon$ και έπεται το ζητούμενο.

27. *Έστω $X \subset \mathbb{R}$ φραγμένο σύνολο και $f : X \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in X$.*

Υπόδειξη. Υπάρχει κλειστό διάστημα $[a, b]$ ώστε $X \subseteq [a, b]$. Για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < 1$. Επιλέγουμε διαμέριση

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$

του $[a, b]$ ώστε $t_{k+1} - t_k < \delta$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Θέτουμε

$$X_k = [t_k, t_{k+1}] \cap X \quad \text{για κάθε} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Αν ορίσουμε $F = \{k : X_k \neq \emptyset\}$, έχουμε

$$X = \bigcup_{k\in F} X_k.$$

Για κάθε $k \in F$ επιλέγουμε τυχόν $x_k \in X_k$ και θέτουμε

$$\alpha = \max\{|f(x_k)| : k \in F\}.$$

Παρατηρήστε ότι αν $x \in X$ τότε υπάρχει $k \in F$ ώστε $x \in X_k$. Τότε, $|x - x_k| \leq t_{k+1} - t_k < \delta$, άρα

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k)| < 1 + \alpha.$$

Δηλαδή, $|f(x)| \leq M := 1 + \alpha$ για κάθε $x \in X$.

28. *Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$$

($f(x)$ είναι η «απόσταση» του x από το A). Δείξτε ότι
(α) *$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.*
(β) *η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε $f(x) \leq |x - a|$ και $|x - a| \leq |x - y| + |y - a|$ από την τριγωνική ανισότητα. Άρα,

$$f(x) \leq |x - y| + |y - a|.$$

Αφού

$$f(x) - |x - y| \leq |y - a| \quad \text{για κάθε} \quad a \in A,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$f(x) - |x - y| \leq \inf\{|y - a| : a \in A\} = f(y).$$

Δηλαδή,

$$f(x) - f(y) \leq |x - y|.$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $f(y) - f(x) \leq |y - x| = |x - y|$. Έπεται ότι $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.

(β) Από το (α) η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 1, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Κεφάλαιο 4

Ολοκλήρωμα Riemann

Ομάδα Α΄. Ερωτήσεις κατανόησης

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. *Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι φραγμένη.*

Σωστό. Από τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann: εξετάζουμε αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη μόνο αν η f είναι φραγμένη.

2. *Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε παίρνει μέγιστη τιμή.*

Λάθος. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(x) = 1 - x$ αν $0 < x \leq 1$ δεν παίρνει μέγιστη τιμή, είναι όμως ολοκληρώσιμη: για κάθε $0 < b < 1$, η f είναι συνεχής στο $[b, 1]$, άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[b, 1]$. Από την Άσκηση 9 (βλέπε παρακάτω) η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

3. *Αν η f είναι φραγμένη, τότε είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Λάθος. Η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = -1$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ είναι φραγμένη, αλλά δεν είναι ολοκληρώσιμη: για κάθε διαμέριση P του $[0, 1]$ έχουμε $U(f, P) = 1$ και $L(f, P) = -1$, άρα

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = -1 < 1 = \overline{\int_0^1} f(x)\, dx.$$

4. *Αν η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Λάθος. Για τη συνάρτηση f του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε $|f(x)| = 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Άρα, η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, ενώ η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

5. *Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $c \in [a, b]$ ώστε $f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\, dx$.*

Λάθος. Η $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x \in [0, 1]$ και $f(x) = -1$ αν $x \in (1, 2]$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_0^2 f(x)\, dx = 0$ (εξηγήστε γιατί). Όμως, δεν υπάρχει $c \in [0, 2]$

ώστε $2f(c) = \int_0^2 f(x)\,dx$. Θα είχαμε $f(c) = 0$, ενώ η f δεν μηδενίζεται πουθενά στο $[0, 2]$.

6. *Αν η f είναι φραγμένη και αν $L(f,P) = U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$, τότε η f είναι σταθερή.*

Σωστό. Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή. Τότε, υπάρχουν $y, z \in [a,b]$ ώστε $f(y) < f(z)$. Θεωρήστε τη διαμέριση $Q = \{a, b\}$ του $[a,b]$ (που περιέχει μόνο τα άκρα a και b του διαστήματος $[a,b]$). Τότε,

$$U(f,Q) - L(f,Q) = (M_0 - m_0)(b-a)$$

όπου

$$m_0 = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \leq f(y) < f(z) \leq \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} = M_0.$$

Άρα, $M_0 - m_0 > 0$ οπότε $U(f,Q) - L(f,Q) > 0$. Αυτό είναι άτοπο: από την υπόθεση έχουμε $L(f,P) = U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$.

Άρα, η f είναι σταθερή: υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = c$ για κάθε $x \in [a,b]$, και το ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$ ισούται με $c(b-a)$.

7. *Αν η f είναι φραγμένη και αν υπάρχει διαμέριση P ώστε $L(f,P) = U(f,P)$, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Σωστό. Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε ότι η f είναι σταθερή. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$ ώστε $U(f,P) = L(f,P)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) = U(f,P) - L(f,P) = 0,$$

και, αφού $m_k \leq M_k$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$, συμπεραίνουμε ότι

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = M_k$$

για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Δηλαδή, η $f(x) = m_k = M_k$ για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

Παρατηρήστε τώρα ότι: $x_1 \in [x_0, x_1]$, άρα $f(x_1) = m_0 = M_0$. Όμως, $x_1 \in [x_1, x_2]$, άρα $f(x_1) = m_1 = M_1$. Δηλαδή, $m_0 = M_0 = m_1 = M_1$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο (για τα επόμενα υποδιαστήματα), συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\alpha = m_0 = M_0 = m_1 = M_1 = \cdots = m_k = M_k = \cdots = m_{n-1} = M_{n-1}.$$

Έπεται ότι $f(x) = \alpha$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δηλαδή, η f είναι σταθερή.

8. *Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$, τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Σωστό. Θεωρήστε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$. Σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχει ρητός αριθμός q_k. Από την υπόθεση έχουμε $f(q_k) = 0$, άρα $m_k \leq 0 \leq M_k$. Έπεται ότι

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leq 0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = U(f,P).$$

Άρα, $\sup_P L(f,P) \leq 0$ και $\inf_P U(f,P) \geq 0$. Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_P L(f,P) \leq 0 \quad \text{και} \quad \int_a^b f(x)dx = \inf_P U(f,P) \geq 0.$$

Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Ομάδα Β′

9. *Έστω $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $0 < b \leq 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b,1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.*

Υπόδειξη. Η f είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $A > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A$ για κάθε $x \in [0,1]$. Θα δείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $0 < b < 1$ αρκετά μικρό ώστε να ικανοποιείται η

$$2Ab < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από την υπόθεση, η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b,1]$, άρα υπάρχει διαμέριση Q του $[b,1]$ με την ιδιότητα

$$U(f,Q) - L(f,Q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε τη διαμέριση $P = \{0\} \cup Q$ του $[0,1]$. Τότε,

$$U(f,P) - L(f,P) = b(M_0 - m_0) + U(f,Q) - L(f,Q) < b(M_0 - m_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

όπου

$$M_0 = \sup\{f(x) : 0 \leq x \leq b\} \leq A \quad \text{και} \quad m_0 = \inf\{f(x) : 0 \leq x \leq b\} \geq -A.$$

Από τις τελευταίες ανισότητες παίρνουμε $M_0 - m_0 \leq 2A$, άρα

$$U(f,P) - L(f,P) < 2Ab + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

10. *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 2$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Παρατηρήστε ότι η f είναι φραγμένη στο $[0,1]$ και, για κάθε $0 < b < 1$, η $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $[b,1]$, άρα ολοκληρώσιμη στο $[b,1]$. Από την Άσκηση 9, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Ομοίως δείχνουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1,0]$. Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1,1]$.

11. *Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a,b)$. Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.*

Υπόδειξη. Ακριβώς όπως στην προηγούμενη Άσκηση, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,x_0]$ και στο $[x_0,b]$.

Σημείωση. Το ίδιο ακριβώς επιχείρημα δείχνει ότι αν μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

12. *Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες:*
(α) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = x$.
(β) $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = \sin x$.

Υπόδειξη. (α) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$. Η f είναι αύξουσα. Θεωρήστε τη διαμέριση P_n του $[0,1]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $1/n$. Δείξτε ότι

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{f(1)-f(0)}{n} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.
(β) $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$. Η f είναι αύξουσα. Θεωρήστε τη διαμέριση P_n του $[0,\pi/2]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $\pi/(2n)$. Δείξτε ότι

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{\pi(f(\pi/2)-f(0))}{2n} = \frac{\pi}{2n} \to 0.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,\pi/2]$.

13. *Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[0,2]$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα τους (αν υπάρχει):*
(α) $f(x) = x + [x]$.
(β) $f(x) = 1$ *αν* $x = \frac{1}{k}$ *για κάποιον* $k \in \mathbb{N}$, *και* $f(x) = 0$ *αλλιώς.*

Υπόδειξη. (α) $f(x) = x + [x]$. Η f είναι αύξουσα στο $[0,2]$, άρα είναι ολοκληρώσιμη. Μπορείτε να γράψετε

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 x dx + \int_0^2 [x]dx.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ίσο με 2 και το δεύτερο ίσο με 1 (εξηγήστε γιατί).
(β) $f(x) = 1$ αν $x = \frac{1}{k}$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, και $f(x) = 0$ αλλιώς. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,2]$. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η f είναι φραγμένη.

(ii) Αν $0 < b < 2$, τότε η f έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας στο $[b,2]$ (είναι ακριβώς τόσα όσοι είναι οι φυσικοί k για τους οποίους $1/k \geq b$).

(iii) Αν $0 < b < 2$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[b,2]$ (από την σημείωση μετά την Άσκηση 3).

(iv) Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,2]$ (από την Άσκηση 9).

14. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι*

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Υπόδειξη. Έστω ότι $\int_a^b f(x)dx = 0$. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδενική. Τότε, υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) > 0$. Λόγω συνέχειας, η f παίρνει θετικές τιμές σε μια (αρκετά μικρή) περιοχή του x_0, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $a < x_0 < b$ (ότι $x_0 \neq a$ και $x_0 \neq b$).

Επιλέγουμε $\varepsilon = f(x_0)/2 > 0$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας: μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ (και αν χρειάζεται να το μικρύνουμε) ώστε $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$ και, για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$,

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \quad \Longrightarrow \quad f(x) > \frac{f(x_0)}{2}.$$

Αφού η f είναι μη αρνητική παντού στο $[a, b]$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)dx \\ &\geq 0 + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + 0 \geq 2\delta \cdot \frac{f(x_0)}{2} = \delta f(x_0) > 0. \end{aligned}$$

Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Ο αντίστροφος ισχυρισμός ισχύει προφανώς.

15. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις ώστε*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

Υπόδειξη. Θεωρώντας την $h = f - g$ βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε το εξής: αν $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $\int_a^b h(x)dx = 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $h(x_0) = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε, είτε $h(x) > 0$ παντού στο $[a, b]$ ή $h(x) < 0$ παντού στο $[a, b]$ (αν η h έπαιρνε και αρνητικές και θετικές τιμές στο $[a, b]$ τότε, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, θα υπήρχε σημείο στο οποίο θα μηδενιζόταν).

Έστω λοιπόν ότι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Η h παίρνει ελάχιστη θετική τιμή στο $[a, b]$: υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε $h(x) \geq h(y) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε,

$$\int_a^b h(x)dx \geq h(y)(b - a) > 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $h(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

16. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ισχύει $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Η f είναι συνεχής, μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την υπόθεση για την $g = f$. Τότε, $\int_a^b f^2(x)dx = 0$. Η f^2 είναι συνεχής και μη αρνητική. Από την Άσκηση 14 συμπεραίνουμε ότι $f^2(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

17. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $g(a) = g(b) = 0$, ισχύει*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδενική. Τότε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) > 0$. Όπως στην Άσκηση 6, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$ και $f(x) > f(x_0)/2 > 0$ για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Ορίζουμε μια συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ως εξής: θέτουμε $g(x) = 0$ στα $[a, x_0 - \delta]$ και $[x_0 + \delta, b]$, ορίζουμε $g(x_0) = f(x_0)$, και επεκτείνουμε γραμμικά στα $[x_0 - \delta, x_0]$ και $[x_0, x_0 + \delta]$. Αφού $g(a) = g(b) = 0$, από την υπόθεση πρέπει να ισχύει $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Όμως,

$$0 = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)g(x)dx$$

και η fg είναι μη αρνητική στο $[x_0-\delta, x_0+\delta]$. Από την Άσκηση 14, έχουμε $f(x)g(x) = 0$ για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Ειδικότερα, $0 = f(x_0)g(x_0) = f^2(x_0)$, το οποίο είναι άτοπο.

18. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$P(t) = \int_a^b (tf(x) + g(x))^2 dx.$$

Η P ορίζεται καλά: αφού οι f, g είναι ολοκληρώσιμες, η $tf + g$ (άρα και η $(tf + g)^2$) είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι η P είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού:

$$P(t) = t^2 \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) + 2t \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right) + \left(\int_a^b g^2(x)dx \right).$$

Αφού $P(t) \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, η διακρίνουσα είναι μη αρνητική:

$$4 \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - 4 \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx \right) \leq 0.$$

19. *Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)dx.$$

Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε το $[0, 1]$ με τυχόν διάστημα $[a, b]$;

Υπόδειξη. Εφαρμόστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για την f και τη σταθερή συνάρτηση $g \equiv 1$:

$$\left(\int_0^1 f(x) \cdot 1 \, dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2(x)dx \right) \left(\int_0^1 1^2 dx \right) = \int_0^1 f^2(x)dx.$$

Η ίδια ανισότητα ισχύει αν αντικαταστήσουμε το $[0, 1]$ με οποιοδήποτε διάστημα $[a, b]$ που έχει μήκος μικρότερο ή ίσο του 1 (αν όμως πάρετε σαν $[a, b]$ το $[0, 2]$ και σαν f τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$, τότε η ανισότητα παίρνει τη μορφή $4 \leq 2$, άτοπο).

20. *Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = f(0).$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο 0, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 \leq t < \delta$ τότε $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$. Έστω $x \in (0, \delta)$. Τότε, για κάθε $t \in [0, x]$ έχουμε $0 \leq t \leq x < \delta$, άρα $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt - f(0) \right| &= \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt - \frac{1}{x} \int_0^x f(0)dt \right| \\
&= \frac{1}{x} \left| \int_0^x (f(t) - f(0))dt \right| \\
&\leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f(0)| \, dt \\
&\leq \frac{1}{x} \int_0^x \varepsilon \, dt = \frac{\varepsilon x}{x} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = f(0).$$

21. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία*

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

συγκλίνει στο $\int_0^1 f(x)dx$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία διαμερίσεων $P^{(n)} = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < 1\right\}$ και την επιλογή σημείων $\Xi^{(n)} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$. Αφού το πλάτος της διαμέρισης $P^{(n)}$ είναι $\|P^{(n)}\| = \frac{1}{n} \to 0$, από τον ορισμό του Riemann έχουμε

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum\left(f, P^{(n)}, \Xi^{(n)}\right) \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

22. *Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζοντας το συμπέρασμα της προηγούμενης Άσκησης για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0,1]$, παίρνουμε

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \to \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}.$$

23. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας $a_n = \int_0^1 f(x^n)dx$. Δείξτε ότι $a_n \to f(0)$.*

Υπόδειξη. Η f είναι συνεχής, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(y)| \leq M$ για κάθε $y \in [0,1]$. Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Από τη συνέχεια της f στο 0, υπάρχει $0 < \delta < 1$ ώστε: αν $0 \leq y \leq \delta$ τότε

$$|f(y) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}\right)^n < \delta.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ μπορούμε να γράφουμε (παρατηρήστε ότι αν $0 < x < 1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}$ τότε $|f(x^n) - f(0)| < \varepsilon/2$)

$$\begin{aligned} |a_n - f(0)| &= \left|\int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}} (f(x^n) - f(0))dx + \int_{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}}^1 (f(x^n) - f(0))dx\right| \\ &\leq \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}} |f(x^n) - f(0)|\,dx + \int_{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}}^1 (|f(x^n)| + |f(0)|)\,dx \\ &\leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M+1}\cdot 2M \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, $a_n \to f(0)$.

24. *Δείξτε ότι η ακολουθία* $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}dx$ *συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Η $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, άρα

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \leq 0,$$

δηλαδή η (γ_n) είναι φθίνουσα. Επίσης,

$$\int_1^n \frac{1}{x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_2^3 \frac{1}{x}dx + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x}dx \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1},$$

άρα

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}dx \geq \frac{1}{n} > 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η (γ_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0, συγκλίνει.

25. *Έστω* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *Lipschitz συνεχής συνάρτηση ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

για κάθε $x, y \in [0,1]$*. Δείξτε ότι*

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} |f(x) - f(k/n)|dx.$$

Στο διάστημα $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ έχουμε

$$|f(x) - f(k/n)| \leq M\left(\frac{k}{n} - x\right),$$

άρα

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} |f(x) - f(k/n)| \leq M\int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - x\right) dx = M\int_0^{1/n} y\,dy = \frac{M}{2n^2}.$$

Άρα,

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}.$$

Ομάδα Γ′

26. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_a^b f(x)dx = bf(b)-af(a)-\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx.$$

Υπόδειξη. Κάθε διαμέριση $P=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_k<x_{k+1}<\cdots<x_n=b\}$ του $[a,b]$ ορίζει με φυσιολογικό τρόπο μια διαμέριση του $[f(a),f(b)]$: την

$$Q=\{f(a)=f(x_0)<f(x_1)<\cdots<f(x_k)<f(x_{k+1})<\cdots<f(x_n)=f(b)\}.$$

Η f είναι αύξουσα, άρα

$$L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1}-x_k).$$

Η f^{-1} είναι επίσης αύξουσα, άρα

$$U(f^{-1},Q)=\sum_{k=0}^{n-1} f^{-1}(f(x_{k+1}))(f(x_{k+1})-f(x_k))=\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}(f(x_{k+1})-f(x_k)).$$

Προσθέτοντας, παίρνουμε

$$(*)\qquad L(f,P)+U(f^{-1},Q)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}f(x_{k+1})-x_kf(x_k))=bf(b)-af(a).$$

Οι f και f^{-1} είναι συνεχείς, άρα ολοκληρώσιμες. Από την $(*)$ παίρνουμε

$$bf(b)-af(a)=L(f,P)+U(f^{-1},Q)\geq L(f,P)+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx$$

και, αφού η P ήταν τυχούσα, παίρνοντας supremum ως προς P έχουμε

$$bf(b)-af(a)\geq \int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx.$$

Με ανάλογο τρόπο δείξτε ότι για τις διαμερίσεις P και Q ισχύει

$$(**)\qquad U(f,P)+L(f^{-1},Q)=bf(b)-af(a).$$

Τότε,

$$U(f,P)+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx\geq U(f,P)+L(f^{-1},Q)=bf(b)-af(a),$$

και παίρνοντας infimum ως προς P έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx\geq bf(b)-af(a).$$

Άρα,

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx = bf(b) - af(a).$$

27. *Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $a, b > 0$,*

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(a) = b$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f(a) \geq b$. Αν $b = f(y)$ τότε $y \leq a$ (διότι η f είναι αύξουσα) και από την προηγούμενη Άσκηση (θα χρειαστείτε την υπόθεση ότι $f(0) = 0$) έχουμε

$$yb = yf(y) = \int_0^y f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx.$$

Για να δείξουμε ότι

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx$$

αρκεί να ελέγξουμε (εξηγήστε γιατί) ότι

$$b(a - y) \leq \int_y^a f(x)dx.$$

Όμως, η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[y, a]$, άρα

$$\int_y^a f(x)dx \geq f(y)(a - y) = b(a - y)$$

με ισότητα μόνο αν $a = y$, δηλαδή αν $f(a) = b$.
Εξετάστε την περίπτωση $f(a) \leq b$ με τον ίδιο τρόπο.

28. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|f(x)| \leq M \int_a^x |f(t)|dt$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Υπόδειξη. Η f είναι συνεχής, άρα υπάρχει $A > 0$ ώστε $|f(t)| \leq A$ για κάθε $t \in [a, b]$. Αυτό δείχνει ότι

$$|f(x)| \leq M \int_a^x |f(t)|dt \leq M \int_a^x A\, dt = MA(x - a)$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Εισάγοντας αυτή την εκτίμηση πάλι στην υπόθεση, παίρνουμε

$$|f(x)| \leq M \int_a^x |f(t)|dt \leq M^2 A \int_a^x (t - a)\, dt = \frac{M^2 A}{2}(x - a)^2$$

για κάθε $x \in [a, b]$, και επαγωγικά,

$$|f(x)| \leq \frac{M^n A}{n!}(x-a)^n$$

για κάθε $x \in [a, b]$ και *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. Όμως,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M^n A}{n!}(x-a)^n = 0,$$

άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

29. *Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει θετική συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ώστε*

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)dx = a \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2.$$

Υπόδειξη. Έστω ότι υπάρχει θετική συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)dx = a \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x-a)^2 f(x)dx &= \int_0^1 x^2 f(x)dx - 2a\int_0^1 xf(x)dx + a^2\int_0^1 f(x)dx \\ &= a^2 - 2a\cdot a + a^2\cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

Αφού η $(x-a)^2 f(x)$ είναι μη αρνητική και συνεχής, από την Άσκηση 14 βλέπουμε ότι $(x-a)^2 f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Όμως η f είναι παντού θετική, άρα $x = a$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αυτό είναι άτοπο.

30. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, μη αρνητική συνάρτηση. Θέτουμε $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Δείξτε οτι η ακολουθία*

$$\gamma_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n}$$

συγκλίνει, και $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = M$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρήστε ότι

$$\gamma_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \leq \left(\int_a^b M^n dx\right)^{1/n} = M(b-a)^{1/n}$$

και $M(b-a)^{1/n} \to M$ όταν $n \to \infty$, άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\gamma_n < M + \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad n \geq n_1.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, παίρνει τη μέγιστη τιμή της: υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = M$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει κάποιο διάστημα $J \subset [a, b]$

με μήκος $\delta > 0$ και $x_0 \in J$, ώστε $f(x) > M - \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $x \in J$. Επίσης, αφού $\delta^{1/n} \to 1$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_2$,

$$\left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \geq \left(\int_J [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \geq \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)\delta^{1/n} > M - \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε

$$|\gamma_n - M| = \left|\left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n} - M\right| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, $\gamma_n \to M$.

Σημείωση. Χρησιμοποιώντας τα $\limsup \gamma_n$ και $\liminf \gamma_n$ μπορούμε να απλουστεύσουμε (κάπως) το επιχείρημα. Από την ανισότητα $\gamma_n \leq M(b-a)^{1/n}$ – που δείξαμε παραπάνω – και από την $M(b-a)^{1/n} \to M$ συμπεραίνουμε ότι $\limsup \gamma_n \leq M$. Από την ανισότητα $\gamma_n \geq \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)\delta^{1/n}$ – που δείξαμε παραπάνω – και από την $\delta^{1/n} \to 1$ συμπεραίνουμε ότι $\liminf \gamma_n \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$ για τυχόν $\varepsilon > 0$, συνεπώς, $\liminf \gamma_n \geq M$. Έπεται ότι $\limsup \gamma_n = \liminf \gamma_n = M$, άρα $\gamma_n \to 1$.

31. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε ότι η f έχει πολλά σημεία συνέχειας.*

(α) *Υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε $U(f,P) - L(f,P) < b - a$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε ότι υπάρχουν $a_1 < b_1$ στο $[a,b]$ ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και*

$$\sup\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} < 1.$$

(β) *Επαγωγικά ορίστε κιβωτισμένα διαστήματα $[a_n, b_n] \subseteq (a_{n-1}, b_{n-1})$ με μήκος μικρότερο από $1/n$ ώστε*

$$\sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(γ) *Η τομή αυτών των κιβωτισμένων διαστημάτων περιέχει ακριβώς ένα σημείο. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής σε αυτό.*

(δ) *Τώρα δείξτε ότι η f έχει άπειρα σημεία συνέχειας στο $[a,b]$ (δεν χρειάζεται περισσότερη δουλειά!).*

Υπόδειξη. (α) Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε $U(f,P_1) - L(f,P_1) < b - a$. Περνώντας αν χρειαστεί σε εκλέπτυνση της P_1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πλάτος της P_1 είναι μικρότερο από 1. Αφού

$$\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) < b - a = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k),$$

υπάρχει $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ώστε $M_k - m_k < 1$. Αν θέσουμε $a_1 = x_k$ και $b_1 = x_{k+1}$, βλέπουμε ότι $a_1 < b_1$, $a_1, b_1 \in [a,b]$, $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} = M_k - m_k < 1.$$

(β) Με τον ίδιο τρόπο δείξτε ότι υπάρχει $[a_2, b_2] \subseteq (a_1, b_1)$ με μήκος μικρότερο από $1/2$ ώστε

$$\sup\{f(x) : a_2 \leq x \leq b_2\} - \inf\{f(x) : a_2 \leq x \leq b_2\} < \frac{1}{2}.$$

Για να πετύχετε τον εγκλεισμό $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1)$ ξεκινήστε από ένα υποδιάστημα $[c, d]$ του $[a_1, b_1]$ με $a_1 < c < d < b_1$ (η f είναι ολοκληρώσιμη και στο $[c, d]$). Βρείτε διαμέριση P_2 του $[c, d]$ με $U(f, P_2) - L(f, P_2) < \frac{d-c}{2}$ και πλάτος μικρότερο από $1/2$ και συνεχίστε όπως πριν.

Επαγωγικά μπορείτε να βρείτε $[a_n, b_n] \subset (a_{n-1}, b_{n-1})$ ώστε $b_n - a_n < 1/n$ και

$$\sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(γ) Η τομή των κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n, b_n]$ περιέχει ακριβώς ένα σημείο x_0. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0: έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Αφού $x_0 \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$, έχουμε $x_0 \in (a_n, b_n)$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a_n, b_n)$. Τότε, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Αυτό δείχνει τη συνέχεια της f στο x_0.

(δ) Ας υποθέσουμε ότι η f έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία συνέχειας στο $[a, b]$. Τότε, υπάρχει διάστημα $[c, d] \subset [a, b]$ στο οποίο η f δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας (εξηγήστε γιατί). Αυτό είναι άτοπο από το προηγούμενο βήμα: η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c, d]$, άρα έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας σε αυτό.

Για την ακρίβεια, το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε δείχνει κάτι ισχυρότερο: αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας σε *κάθε υποδιάστημα* του $[a, b]$. Με άλλα λόγια, το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι *πυκνό* στο $[a, b]$.

32. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (όχι αναγκαστικά συνεχής) συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι*

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Υπόδειξη. Από την προηγούμενη Άσκηση, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ στο οποίο η f είναι συνεχής. Αφού $f(x_0) > 0$, υπάρχει διάστημα $J \subseteq [a, b]$ με μήκος $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in J$ ισχύει $f(x) > f(x_0)/2$. Συνεχίστε όπως στην Άσκηση 14.

Κεφάλαιο 5

Παράγωγος και Ολοκλήρωμα

Ομάδα Α΄

1. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s \in [a, b]$ ώστε*

$$\int_a^s f(t)dt = \int_s^b f(t)dt.$$

Μπορούμε πάντα να επιλέγουμε ένα τέτοιο s στο ανοικτό διάστημα (a, b);

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_a^s f(t)dt - \int_s^b f(t)dt = \int_a^s f(t)dt - \left(\int_a^b f(t)dt - \int_a^s f(t)dt\right) \\ &= 2\int_a^s f(t)dt - \int_a^b f(t)dt. \end{aligned}$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, η g είναι συνεχής. Παρατηρήστε ότι

$$g(a) = -\int_a^b f(t)dt \qquad \text{και} \qquad g(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

Αφού $g(a)g(b) = -\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq 0$, υπάρχει $s \in [a, b]$ ώστε $g(s) = 0$. Για κάθε τέτοιο s ισχύει η

$$\int_a^s f(t)dt = \int_s^b f(t)dt.$$

Μπορούμε να επιλέξουμε ένα τέτοιο s στο ανοικτό διάστημα (a, b) αν $\int_a^b f(t)dt \neq 0$ (εξηγήστε γιατί). Αν όμως πάρετε την $f(x) = x$ στο $[-1, 1]$, τότε τα μόνα σημεία $s \in [-1, 1]$ για τα οποία $g(s) = 0$ είναι τα $s = \pm 1$ (σε αυτό το παράδειγμα, το ολοκλήρωμα της f στο $[-1, 1]$ ισούται με μηδέν).

2. *Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και θετική συνάρτηση ώστε $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση $\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ ώστε $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = \frac{1}{n}$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $F(t) = \int_0^t f(x)dx$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη και θετική, η F είναι συνεχής και αύξουσα στο $[0,1]$. Αφού $\int_0^1 f(x)dx = 1$, έχουμε $F(0) = 0$ και $F(1) = 1$.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, για κάθε $k = 1, \dots, n-1$ υπάρχει $t_k \in [0,1]$ ώστε $F(t_k) = \frac{k}{n}$. Θέτουμε $t_0 = 0$ και $t_n = 1$: τότε $F(t_0) = 0 = \frac{0}{n}$ και $F(t_n) = 1 = \frac{n}{n}$. Παρατηρήστε ότι $t_k < t_{k+1}$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$. Αν για κάποιο k είχαμε $t_k \geq t_{k+1}$, τότε θα παίρναμε

$$\frac{k}{n} = \int_0^{t_k} f(x)dx = \int_0^{t_{k+1}} f(x)dx + \int_{t_{k+1}}^{t_k} f(x)dx \geq \int_0^{t_{k+1}} f(x)dx = \frac{k+1}{n},$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ και

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = \int_0^{t_{k+1}} f(x)dx - \int_0^{t_k} f(x)dx = \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$.

3. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s \in [0,1]$ ώστε*

$$\int_0^1 f(x)x^2dx = \frac{f(s)}{3}.$$

Υπόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, αν η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η μη αρνητική συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $s \in [0,1]$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = f(s)\int_0^1 g(x)dx.$$

Εφαρμόστε το παραπάνω για την $g(x) = x^2$.

4. *Υποθέτουμε ότι η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι*

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση έπεται ότι

$$2\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Δηλαδή, η συνάρτηση $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ είναι σταθερή. Αφού η f είναι συνεχής, η F είναι παραγωγίσιμη και $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αφού η F είναι σταθερή, έχουμε $F' \equiv 0$. Άρα, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

5. *Έστω $f, h : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$. Υποθέτουμε ότι η h είναι συνεχής και η f είναι παραγωγίσιμη. Ορίζουμε*

$$F(x) = \int_0^{f(x)} h(t)dt.$$

Δείξτε ότι $F'(x) = h(f(x)) \cdot f'(x)$.

Υπόδειξη. Αφού η h είναι συνεχής, η συνάρτηση $G(y) = \int_0^y h(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και $G'(y) = h(y)$. Παρατηρήστε ότι $F(x) = G(f(x)) = (G \circ f)(x)$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$F'(x) = G'(f(x)) \cdot f'(x) = h(f(x)) \cdot f'(x).$$

6. *Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνεχής και έστω* $\delta > 0$. *Ορίζουμε*

$$g(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt.$$

Δείξτε ότι η g *είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την* g'.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$g(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt = \int_0^{x+\delta} f(t)dt - \int_0^{x-\delta} f(t)dt = H_1(x) - H_2(x),$$

όπου

$$H_1(x) = \int_0^{x+\delta} f(t)dt \qquad \text{και} \qquad H_2(x) = \int_0^{x-\delta} f(t)dt.$$

Το επιχείρημα της προηγούμενης Άσκησης δείχνει ότι οι H_1, H_2 είναι παραγωγίσιμες, $H_1'(x) = f(x+\delta)$ και $H_2'(x) = f(x-\delta)$ (αν $0 > x+\delta$ ή $0 > x-\delta$, το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει: θυμηθείτε τη σύμβαση $\int_b^a f = -\int_a^b f$). Έπεται ότι $g'(x) = f(x+\delta) - f(x-\delta)$.

7. *Έστω* $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ορίζουμε*

$$G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} t^2 dt.$$

Δείξτε ότι η G *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$ *και βρείτε την* G'.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} t^2 dt = \int_0^{g(x)} t^2 dt - \int_0^{h(x)} t^2 dt.$$

Αφού οι g, h είναι παραγωγίσιμες και η $f(t) = t^2$ είναι συνεχής, η G είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (δείτε τις προηγούμενες δύο Ασκήσεις) και $G'(x) = g^2(x)g'(x) - h^2(x)h'(x)$.

8. *Έστω* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε*

$$F(x) = \int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right) dt.$$

Βρείτε την F'.

Υπόδειξη. Θέτουμε $u = \frac{x}{t}$. Τότε, $dt = -\frac{x}{u^2}du$ και

$$F(x) = \int_x^1 -x\frac{\varphi(u)}{u^2}\,du = \int_1^x x\frac{\varphi(u)}{u^2}\,du = x\int_1^x \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du.$$

Άρα,

$$F'(x) = \int_1^x \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du + x\frac{\varphi(x)}{x^2} = \int_1^x \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du + \frac{\varphi(x)}{x}.$$

9. *Έστω $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι, για κάθε $x \in [0,a]$,*

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right) du.$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε τις συναρτήσεις

$$F(x) = \int_0^x f(u)(x-u)du = x\int_0^x f(u)du - \int_0^x f(u)u\,du$$

και

$$G(x) = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right) du = \int_0^x R(u)du,$$

όπου

$$R(u) = \int_0^u f(t)dt.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,a]$, το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού δείχνει ότι οι F, G και R είναι παραγωγίσιμες. Επίσης,

$$F'(x) = \int_0^x f(u)du + xf(x) - f(x)x = \int_0^x f(u)du$$

και

$$G'(x) = R(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x f(u)du.$$

Άρα,

$$(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = \int_0^x f(u)du - \int_0^x f(u)du = 0.$$

Έπεται ότι η $G - F$ είναι σταθερή στο $[0,a]$. Παρατηρώντας ότι $F(0) = G(0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι $G \equiv F$ στο $[0,a]$. Δηλαδή,

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right) du$$

για κάθε $x \in [0,a]$.

10. *Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$, δείξτε ότι*

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $k = 0, \dots, n-1$, η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[x_k, x_{k+1}]$. Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (για τη συνεχή συνάρτηση f') έχουμε

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\, dx \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(x)|\, dx.$$

Άρα,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(x)|\, dx = \int_a^b |f'(x)|\, dx.$$

11. *Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $x > 0$,*

$$\int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\, dt = xf(x).$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $L, R : [0, +\infty) \to [0, \infty)$ με

$$L(x) = \int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\, dt \quad \text{και} \quad R(x) = xf(x).$$

Οι L, R είναι παραγωγίσιμες (εξηγήστε γιατί) και $L(0) = 0 = R(0)$. Παρατηρήστε ότι

$$L'(x) = f(x) + f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) = f(x) + xf'(x) = R'(x)$$

για κάθε $x \geq 0$. Έπεται ότι $L(x) = R(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

Ομάδα Β′

12. *Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει*

$$|f(x)| \leq \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Υπόδειξη. Η f' είναι συνεχής, άρα είναι ολοκληρώσιμη. Χρησιμοποιώντας την $f(0) = 0$, το δεύτερο θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού και την ανισότητα Cauchy-Schwarz, για κάθε $x \in [0, 1]$ γράφουμε

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(0)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| \cdot 1\, dt \\ &\leq \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x 1^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \sqrt{x} \\ &\leq \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

13. *Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, η οποία ικανοποιεί την*

$$f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)dt$$

για κάθε $x \geq 0$. Δείξτε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \geq 0$.

Υπόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη, τότε παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της

$$(*) \qquad f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)dt$$

παίρνουμε

$$2f(x)f'(x) = 2f(x)$$

για κάθε $x > 0$, και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x) = 1$ για κάθε $x > 0$. Από την $(*)$ βλέπουμε (θέτοντας $x = 0$) ότι $f(0) = 0$, άρα

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x dt = x$$

για κάθε $x \geq 0$. Μένει να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Από την $(*)$ και την $f(x) \neq 0$ έχουμε: για κάθε $x > 0$ ισχύει $\int_0^x f(t)dt > 0$ και

$$f(x) = g(x) := \sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f(t)dt} \quad \text{ή} \quad f(x) = h(x) := -\sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f(t)dt}.$$

Αφού η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $(0,+\infty)$, το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής δείχνει ότι είτε $f \equiv g$ στο $[0,+\infty)$ ή $f \equiv h$ στο $[0,+\infty)$. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται, αφού η h παίρνει αρνητικές τιμές στο $(0,+\infty)$ και $\int_0^x f(t)dt > 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα,

$$f(x) = g(x) := \sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f(t)dt}$$

για κάθε $x \geq 0$. Αφού η f είναι συνεχής, έπεται ότι η g (δηλαδή, η f) είναι παραγωγίσιμη.

14. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)dx = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

Υπόδειξη. Αφού η f' είναι συνεχής, μπορούμε να εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cos(nx)dx &= \int_a^b f(x)\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)' dx \\ &= \frac{f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na)}{n} - \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)dx.\end{aligned}$$

Η f' είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα υπάρχει $M>0$ ώστε $|f'(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$. Έπεται ότι

$$\left|\frac{f(b)\sin(nb)-f(a)\sin(na)}{n}\right|\leq\frac{|f(a)|+|f(b)|}{n}\to 0$$

και

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)dx\right|\leq\frac{1}{n}\int_a^b|f'(x)|dx\leq\frac{M(b-a)}{n}\to 0$$

καθώς το $n\to\infty$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)dx=0,\quad \text{και όμοια,}\quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx=0.$$

15. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες*

$$a_n=\int_0^\pi\sin(nx)dx\quad\text{και}\quad b_n=\int_0^\pi|\sin(nx)|dx.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$a_n=\int_0^\pi\sin(nx)dx=\int_0^\pi\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)'dx=\frac{\cos 0-\cos(n\pi)}{n}.$$

Άρα, $|a_n|\leq 2/n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έπεται ότι $a_n\to 0$ καθώς το $n\to\infty$. Για την (b_n) κάνουμε την αντικατάσταση $y=nx$:

$$b_n=\int_0^\pi|\sin(nx)|\,dx=\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}|\sin y|\,dy.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin y|\,dy=\int_0^\pi|\sin y|\,dy$$

για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ (κάντε την αντικατάσταση $y=k\pi+u$). Άρα,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{n}\int_0^{n\pi}|\sin y|\,dy=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin y|\,dy\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi|\sin y|\,dy=\int_0^\pi|\sin y|\,dy\\
&= \int_0^\pi\sin y\,dy=\cos(0)-\cos(\pi)=2
\end{aligned}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έπεται ότι $b_n\to 2$.

16. *Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν συνεχείς, αύξουσες και θετικές συναρτήσεις $g,h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ώστε $f=g-h$.*

Υπόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής: αν $g, h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις τότε οι $\max\{g, h\}$ και $\min\{g, h\}$ είναι συνεχείς. Αυτό έπεται από τις

$$\max\{g, h\} = \frac{g + h + |g - h|}{2} \quad \text{και} \quad \min\{g, h\} = \frac{g + h - |g - h|}{2}.$$

Η $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, άρα οι συναρτήσεις

$$g := \max\{f', 0\} \qquad \text{και} \qquad h := -\min\{f', 0\}$$

είναι συνεχείς και μη αρνητικές στο $[0, +\infty)$. Επίσης,

$$g - h = \max\{f', 0\} + \min\{f', 0\} = f'.$$

Ορίζουμε

$$G_1(x) = \int_0^x g(t)dt \qquad \text{και} \qquad H_1(x) = \int_0^x h(t)dt.$$

Αφού οι g, h είναι συνεχείς και μη αρνητικές, οι G_1, H_1 είναι παραγωγίσιμες, αύξουσες και $G_1(0) = H_1(0) = 0$. Από τον τρόπο ορισμού τους και από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού βλέπουμε ότι

$$G_1(x) - H_1(x) = \int_0^x (g(t) - h(t))\, dt = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$$

για κάθε $x \geq 0$. Ορίζουμε

$$G(x) = 1 + |f(0)| + G_1(x) \qquad \text{και} \qquad H(x) = 1 + |f(0)| - f(0) + H_1(x).$$

Τότε, οι G, H είναι παραγωγίσιμες, αύξουσες, θετικές και

$$G(x) - H(x) = G_1(x) - H_1(x) + f(0) = f(x)$$

για κάθε $x \geq 0$. Δηλαδή, η f γράφεται σαν διαφορά δύο συνεχών, αυξουσών και θετικών συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$.

Κεφάλαιο 6

Τεχνικές Ολοκλήρωσης

Ομάδα Α΄

1. *Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:*

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+2}dx\ , \qquad \int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}dx\ , \qquad \int \frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}dx.$$

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{2x}{(x+1)^2+1}\,dx$$

και χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $y = x+1$.
(β) Ανάλυση σε απλά κλάσματα. Ζητάμε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

Ελέγξτε ότι $a = 1$, $b = 1$ και $c = 1$.
(γ) Παρατηρούμε ότι $x^3+2x^2+2x+1 = (x+1)(x^2+x+1)$ και κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα.

2. *Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:*

$$\int \frac{dx}{x^4+1}\ , \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\ , \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\ , \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\ .$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $x^4+1 = (x^2+1)^2-2x^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ και κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα.
(β) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt[6]{x}$ προκύπτει το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{6u^5}{u^3+u^2}\,du = \int \frac{6u^3}{u+1}\,du$$

το οποίο υπολογίζεται εύκολα (μπορείτε να κάνετε τη νέα αντικατάσταση $y = u+1$).

(γ) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{x^2-1}$ έχουμε $\frac{dx}{x} = \frac{u\,du}{u^2+1}$, οπότε προκύπτει το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan(\sqrt{x^2-1}) + c.$$

(δ) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{1+e^x}$ έχουμε $du = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\,dx = \frac{u^2-1}{2u}\,dx$, οπότε προκύπτει το ολοκλήρωμα $\int \frac{2du}{u^2-1}$, το οποίο υπολογίζεται εύκολα με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

3. *Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:*

$$\int \cos^3 x\,dx\ ,\quad \int \cos^2 x \sin^3 x\,dx\ ,\quad \int \tan^2 x\,dx\ ,\quad \int \frac{dx}{\cos^4 x}\ ,\quad \int \sqrt{\tan x}\,dx\ .$$

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)(\sin x)' dx$$

και θέτουμε $u = \sin x$.

(β) Γράφουμε

$$\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx = \int \cos^2 x(1-\cos^2 x)(-1)(\cos x)' dx$$

και θέτουμε $u = \cos x$.

(γ) Γράφουμε

$$\int \tan^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \tan x - x + c.$$

(δ) Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos^4 x} dx &= \int (\tan x)' \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' dx \\ &= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int \tan x \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int \frac{2(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x}\,dx \\ &= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx + 2\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$3\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} + 2\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} + \tan x + c.$$

(ε) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{\tan x}$ παίρνουμε

$$du = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}}(\tan^2 x + 1)\,dx = \frac{u^4+1}{2u}\,dx,$$

οπότε θεωρούμε το

$$\int \frac{2u^2}{u^4+1}\,du,$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

4. *Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, δείξτε ότι: για κάθε* $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}\ .$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} &= \int (x)'\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx - 2n\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n.$$

5. *Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:*

$$\int \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2-1)}\,dx\ , \qquad \int \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\,dx\ , \qquad \int x\log x\,dx$$

$$\int x\cos x\,dx\ , \qquad \int e^x\sin x\,dx\ , \qquad \int x\sin^2 x\,dx$$

$$\int \log(x+\sqrt{x})\,dx\ , \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx\ , \qquad \int \frac{x+4}{(x^2+1)(x-1)}\,dx$$

$$\int \frac{x}{1+\sin x}\,dx\ , \qquad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx\ , \qquad \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}\ .$$

Υπόδειξη. (α) Ανάλυση σε απλά κλάσματα.
(β) Ανάλυση σε απλά κλάσματα.
(γ) Ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int x\log x\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2)'\log x\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4} + c.$$

(δ) Ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c.$$

(ε) Ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned}
I = \int e^x\sin x\,dx &= \int (e^x)'\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx \\
&= e^x\sin x - \int (e^x)'\cos x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x + \int e^x(\cos x)'dx \\
&= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) - I.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι
$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + c.$$
(στ) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ παίρνουμε
$$\int x \sin^2 x \, dx = \int \frac{x}{2} \, dx - \int x \frac{\cos(2x)}{2} \, dx.$$
Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $u = 2x$ και ολοκλήρωση κατά μέρη όπως στο (δ).

(ζ) Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε
$$\int \log(x+\sqrt{x}) \, dx = \int (x)' \log(x+\sqrt{x}) \, dx = x \log(x+\sqrt{x}) - \int \frac{x}{x+\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx.$$
Κατόπιν, εφαρμόστε την αντικατάσταση $u = \sqrt{x}$.

(η) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{1-x^2}$ βλέπουμε ότι $\frac{dx}{x} = \frac{udu}{u^2-1}$, οπότε καταλήγουμε στο
$$\int \frac{1}{u^2-1} \, du$$
το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(ϑ) Ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(ι) Θέτουμε $y = \tan \frac{x}{2}$. Ελέγξτε ότι $dx = \frac{2}{1+y^2} dy$ και $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$. Αναγόμαστε έτσι στο ολοκλήρωμα
$$\begin{aligned}
\int 2 \arctan y \frac{1}{1+\frac{2y}{1+y^2}} \frac{2}{1+y^2} \, dy &= 4 \int \arctan y \frac{1}{(1+y)^2} \, dy \\
&= 4 \int \arctan y \left(-\frac{1}{1+y}\right)' dy \\
&= -4 \frac{\arctan y}{1+y} + 4 \int \frac{1}{(1+y^2)(1+y)} \, dy.
\end{aligned}$$
Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(κ) Γράφουμε
$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} (\sin x)' dx$$
και κάνουμε την αντικατάσταση $u = \sin x$.

(λ) Αντικατάσταση $y = x + 1$.

6. *Υπολογίστε τα ολοκληρώματα*
$$\int \sin(\log x) \, dx \, , \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} \log(1-x) \, dx.$$

Υπόδειξη. (α) Αν θέσουμε $u = \log x$, τότε $dx = e^u du$ και καταλήγουμε στο ολοκλήρωμα
$$\int e^u \sin u \, du,$$

το οποίο υπολογίζεται με ολοκλήρωση κατά μέρη.
(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\log(1-x)\,dx &= -2\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'\log(1-x)\,dx \\ &= -\frac{2\log(1-x)}{\sqrt{x}} - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{1-x}\,dx.\end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αντικατάσταση $u=\sqrt{x}$.

7. *Υπολογίστε τα ολοκληρώματα*

$$\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx\ , \qquad \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx.$$

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx &= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\arctan x\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\arctan x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx.\end{aligned}$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε τον αναγωγικό τύπο της Άσκησης 4.
(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx &= -\int\left(\frac{1}{1+x}\right)' xe^x\,dx \\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x}(xe^x)'dx \\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x}(1+x)e^x\,dx \\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + c.\end{aligned}$$

8. *Υπολογίστε τα ολοκληρώματα*

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx\ , \qquad \int \frac{\log(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx.$$

Υπόδειξη. (α) Με την αντικατάσταση $u=e^x$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης.
(β) Με την αντικατάσταση $u=\tan x$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int \log u\,du = u\log u - u + c.$$

9. *Υπολογίστε τα ολοκληρώματα*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx \quad , \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}dx$$

$$\int_0^5 x\log\left(\sqrt{1+x^2}\right)\,dx \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\,dx.$$

Υπόδειξη. Υπολογίστε πρώτα τα αόριστα ολοκληρώματα:
(α) Γράφουμε

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = x\tan x - \int \tan x\,dx = x\tan x + \log(\cos x) + c.$$

(β) Γράφουμε

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^6 x}\,dx$$

και κάνουμε την αντικατάσταση $u = \cos x$.
(γ) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{1+x^2}$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int u \log u\,du,$$

το οποίο υπολογίζεται με ολοκλήρωση κατά μέρη.
(δ) Γράφουμε

$$\int x\tan^2 x\,dx = \int x\frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int x\,dx.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίστηκε στο (α).

10. *Υπολογίστε τα ακόλουθα εμβαδά:*

(α) *Του χωρίου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x-2$ και από τον x-άξονα.*

(β) *Του χωρίου που φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \cos x$ και $g(x) = \sin x$ στο διάστημα $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.*

Υπόδειξη. (α) Το εμβαδόν είναι ίσο με

$$\int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\,dx.$$

Εξηγήστε γιατί και υπολογίστε το.
(β) Το εμβαδόν είναι ίσο με

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\,dx.$$

Εξηγήστε γιατί και υπολογίστε το.

Ομάδα Β′

11. *Υπολογίστε τα ολοκληρώματα*

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx\ ,\quad \int \frac{1}{\sin x}\,dx\ ,\quad \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx\ ,\quad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx\ ,\quad \int x\arctan x\,dx\ ,\quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\ ,\quad \int \sqrt{x^2-1}\,dx.$$

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $y = \tan\frac{x}{2}$. Ελέγξτε ότι $dx = \frac{2}{1+y^2}dy$, $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ και $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$. Αναγόμαστε έτσι στο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{(1+y)^2}{y^2(1+y^2)}\,dy,$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.
(β) Γράφουμε

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx$$

και κάνοντας την αντικατάσταση $u = \cos x$ αναγόμαστε στο $\int \frac{1}{u^2-1}\,du$, το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.
(γ) Με την αντικατάσταση $u = x^2+1$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u} + c.$$

(δ) Με την αντικατάσταση $x = \sin u$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{1}{\sin u}\,du,$$

το οποίο υπολογίστηκε στο (β).
(ε) Χρησιμοποιούμε τον αναγωγικό τύπο της Άσκησης 4.
(στ) Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\int x\arctan x\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + c.$$

Για την τελευταία ισότητα παρατηρήστε ότι

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

(ζ) Με την αντικατάσταση $u = x^2+1$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + c.$$

(η) Θέτουμε $x^2 - 1 = (x-t)^2$. Ισοδύναμα, $x = \frac{t^2+1}{2t}$. Τότε, $dx = \frac{t^2-1}{2t^2}\,dt$ και $x - t = \frac{1-t^2}{2t}$, οπότε αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{-(t^2-1)^2}{4t^3}\,dt.$$

12. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Υπόδειξη. Με την αντικατάσταση $y = \pi - x$ παίρνουμε

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - y)\sin y}{1+\cos^2 y}\, dy = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}\, dy - I,$$

δηλαδή

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}\, dy.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αντικατάσταση $u = \cos y$.

13. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx.$$

Υπόδειξη. Η αντικατάσταση $y = \frac{\pi}{2} - x$ δίνει (εξηγήστε γιατί)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos y}{\cos y + \sin y}\, dy = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx.$$

Αφού

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

14. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan x)\, dx.$$

Υπόδειξη. Η αντικατάσταση $y = \frac{\pi}{4} - x$ δίνει

$$I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\, dx = \int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan(\pi/4 - y))\, dy.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \frac{1 - \tan y}{1 + \tan y},$$

άρα,

$$1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \frac{2}{1 + \tan y}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\, dx &= \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1+\tan y}\right) dy \\ &= \int_0^{\pi/4} \left(\log 2 - \log(1+\tan y)\right) dy \\ &= \frac{\pi(\log 2)}{4} - I. \end{aligned}$$

Έπεται ότι
$$I = \frac{\pi(\log 2)}{8}.$$

15. *Δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα*
$$\int_0^\infty x^p dx$$
δεν είναι πεπερασμένο για κανένα $p \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις: αν $p > -1$ τότε
$$\int_1^\infty x^p dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M x^p dx = \lim_{M\to+\infty} \frac{M^{p+1}-1}{p+1} = +\infty.$$
Αν $p < -1$ τότε
$$\int_0^1 x^p dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^1 x^p dx = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1-\delta^{p+1}}{p+1} = +\infty.$$
Τέλος, αν $p = -1$ τότε
$$\int_1^\infty x^p dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M\to+\infty} \log M = +\infty.$$
Σε κάθε περίπτωση, έπεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty x^p dx$ απειρίζεται.

16. *Υπολογίστε τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα:*
$$\int_0^\infty xe^{-x^2} dx\ ,\quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\quad \int_0^1 \log x\, dx\ .$$

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $M > 0$ έχουμε
$$\int_0^M xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^M = \frac{1-e^{-M^2}}{2}.$$
Έπεται ότι
$$\int_0^\infty xe^{-x^2} dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M xe^{-x^2} dx = \lim_{M\to\infty} \frac{1-e^{-M^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$
(β) Για κάθε $s \in (0,1)$ έχουμε
$$\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^s = \arcsin s - \arcsin 0 = \arcsin s.$$
Έπεται ότι
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{s\to 1^-} \int_0^s \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{s\to 1^-} \arcsin s = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$
Λόγω συμμετρίας,
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

(γ) Για κάθε $\delta \in (0,1)$ έχουμε

$$\int_\delta^1 \log x\, dx = x\log x - x\Big|_\delta^1 = -1 - \delta\log\delta + \delta.$$

Έπεται ότι

$$\int_0^1 \log x\, dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^1 \log x\, dx = \lim_{\delta\to 0^+} (-\delta\log\delta + \delta - 1) = -1.$$

17. *Δείξτε ότι, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n!$$

Υπόδειξη. Με επαγωγή: για $n = 0$ έχουμε

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$$

Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε, για κάθε $M > 0$ έχουμε

$$\int_0^M e^{-x}x^n dx = \int_0^M (-e^{-x})' x^n dx = -e^{-x}x^n\Big|_0^M + n\int_0^M e^{-x}x^{n-1}dx.$$

Αφήνοντας το $M \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$I_n = \int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = nI_{n-1}.$$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι $I_{n-1} = (n-1)!$, τότε $I_n = n\cdot(n-1)! = n!$.

18. *Βρείτε τα όρια*

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x^6}\int_0^{x^3} e^{t^2}dt\,, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} e^t\sin t\, dt.$$

Υπόδειξη. (α) Με την αντικατάσταση $y = x^3$ βλέπουμε ότι αρκεί να υπολογίσουμε το

$$\lim_{y\to+\infty} ye^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}dt.$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του L' Hospital:

$$\frac{\left(\int_0^y e^{t^2}dt\right)'}{(e^{y^2}/y)'} = \frac{e^{y^2}}{2e^{y^2} - e^{y^2}/y^2} = \frac{1}{2-y^{-2}} \to \frac{1}{2}$$

όταν $y \to +\infty$. Άρα,

$$\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x^6}\int_0^{x^3} e^{t^2}dt = \frac{1}{2}.$$

(α) Με την αντικατάσταση $y = x^2$ βλέπουμε ότι αρκεί να υπολογίσουμε το

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^2}\int_0^y e^t \sin t\, dt.$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του L' Hospital:

$$\frac{\left(\int_0^y e^t \sin t\, dt\right)'}{(y^2)'} = \frac{e^y \sin y}{2y} \to \frac{1}{2}$$

όταν $y \to 0^+$. Άρα,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} e^t \sin t\, dt = \frac{1}{2}.$$

Κεφάλαιο 7

Θεώρημα Taylor

1. *Έστω $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ πολυώνυμο βαθμού n και έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχουν $b_0, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ ώστε*

$$p(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n \quad \textit{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι

$$b_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Υπόδειξη. Με επαγωγή. Για $n = 1$ μπορούμε να γράψουμε $p(x) = a_0 + a_1x = a_0 + a_1a + a_1(x-a) = p(a) + a_1(x-a)$ και να θέσουμε $b_0 = p(a)$, $b_1 = a_1$.

Για το επαγωγικό βήμα παρατηρήστε ότι $p(x) - p(a) = (a_1x + \cdots + a_nx^n) - (a_1a + \cdots + a_na^n) = (x-a)p_1(x)$, όπου p_1 πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Το p_1 γράφεται στη μορφή $b_1 + b_2(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^{n-1}$ (από την επαγωγική υπόθεση) οπότε $p(x) = p(a) + (x-a)p_1(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n$, με $b_0 = p(a)$.

Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $p^{(k)}(x) = \sum_{s=k}^{n} s(s-1)\cdots(s-k+1)b_s(x-a)^{s-k}$, οπότε $p^{(k)}(a) = [k(k-1)\cdots 1]b_k = k!b_k$.

2. *Γράψτε καθένα από τα παρακάτω πολυώνυμα στη μορφή $b_0 + b_1(x-3) + \cdots + b_n(x-3)^n$:*

$$p_1(x) = x^2 - 4x - 9, \quad p_2(x) = x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1, \qquad p_3(x) = x^5.$$

3. *Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,a}$ που υποδεικνύεται.*

$$\begin{aligned}
(T_{3,f,0}) &\ :\ f(x) = \exp(\sin x).\\
(T_{2n+1,f,0}) &\ :\ f(x) = (1+x^2)^{-1}.\\
(T_{n,f,0}) &\ :\ f(x) = (1+x)^{-1}.\\
(T_{4,f,0}) &\ :\ f(x) = x^5 + x^3 + x.\\
(T_{6,f,0}) &\ :\ f(x) = x^5 + x^3 + x.\\
(T_{5,f,1}) &\ :\ f(x) = x^5 + x^3 + x.
\end{aligned}$$

4. *Έστω $n \geq 1$ και $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις n φορές παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $T_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ και $T_{n,g,x_0}(x) = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Επίσης, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_{n,g,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$. Συνεπώς,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}}{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

5. *Έστω $n \geq 2$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση n φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.*

(β) *Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.*

(γ) *Αν ο n είναι περιττός, τότε η f δεν έχει τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο στο x_0, αλλά το x_0 είναι σημείο καμπής για την f.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $T_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, συνεπώς,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{T_{n,f,x_0}(x) + R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

(α) Αν $f^{(n)}(x_0) > 0$, τότε η f κοντά στο x_0 έχει το ίδιο πρόσημο με την $(x-x_0)^n$ και αφού ο n είναι άρτιος συμπεραίνουμε ότι $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0. Αφού $f(x_0) = 0$, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

(β) Αν $f^{(n)}(x_0) < 0$, τότε η f κοντά στο x_0 έχει αντίθετο πρόσημο από την $(x-x_0)^n$ και αφού ο n είναι άρτιος συμπεραίνουμε ότι $f(x) \leq 0$ κοντά στο x_0. Αφού $f(x_0) = 0$, η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

(γ) Υποθέτουμε ότι $f^{(n)}(x_0) > 0$. Δουλεύοντας όπως στα (α) και (β), και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι ο n είναι περιττός, βλέπουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) < 0$ στο $(x_0 - \delta)$ και $f(x) > 0$ στο $(x_0, x_0 + \delta)$. Άρα, η f δεν έχει τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο στο x_0.

Το ίδιο ακριβώς ισχύει για την f''. Παρατηρήστε πρώτα ότι $n \geq 3$ (είναι περιττός και μεγαλύτερος ή ίσος του 2). Θεωρώντας την $g = f''$ βλέπουμε ότι $g^{(n-2)}(x_0) > 0$ και όλες οι προηγούμενες παράγωγοι της g μηδενίζονται στο x_0. Άρα, η $g = f''$ έχει διαφορετικό πρόσημο σε περιοχές αριστερά και δεξιά του x_0, το οποίο σημαίνει ότι το x_0 είναι σημείο καμπής για την f.

6. *Αν $f(x) = \ln x$, $x > 0$, βρείτε την πλησιέστερη ευθεία και την πλησιέστερη παραβολή στο γράφημα της f στο σημείο $(e, 1)$.*

Υπόδειξη. Ζητάμε τα $T_{1,f,e}(x)$ και $T_{2,f,e}(x)$. Αφού $f(e) = 1$, $f'(e) = \frac{1}{e}$ και $f''(e) = -\frac{1}{e^2}$, συμπεραίνουμε ότι $T_{1,f,e}(x) = 1 + \frac{x-e}{e} = \frac{x}{e}$ και $T_{2,f,e}(x) = \frac{x}{e} - \frac{1}{e^2}(x-e)^2$.

7. *Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ για τη συνάρτηση*

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Υπόδειξη. Από το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} + g_n(t)$$

όπου

$$|g_n(t)| \leq \frac{e^{t^2}}{(n+1)!}(t^2)^{n+1}.$$

Άρα,

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt + \int_0^x g_n(t) dt.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left| \int_0^x g_n(t)\, dt \right| \leq \frac{e^{x^2}}{(n+1)!} \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| \leq \frac{e^{x^2} |x|^{2n+3}}{(n+1)!(2n+3)}.$$

Θέτουμε

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Τότε,

$$\left| \frac{f(x) - P_{2n+1}(x)}{x^{2n+2}} \right| = \left| \frac{1}{x^{2n+2}} \int_0^x g_n(t)\, dt \right| \leq \frac{e^{x^2} |x|^{2n+3}}{|x|^{2n+2}(n+1)!(2n+3)} \to 0$$

όταν $x \to 0$. Από τον χαρακτηρισμό του πολυωνύμου Taylor $T_{s,f,0}$ έπεται ότι

$$T_{2n+1,f,0}(x) = T_{2n+2,f,0}(x) = P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

8. *Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $f(0) = 0$ και*

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \qquad x \neq 0.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$ και

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} e^{-1/x^2} = \lim_{y \to \pm\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = 0.$$

(β) Η δεύτερη παράγωγος της f, αλλά και κάθε παράγωγος της f είναι της μορφής

$$f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}, \quad x \neq 0$$

όπου P_k πολυώνυμο. Δείξτε το με επαγωγή.

(γ) Δείξτε ότι $\lim_{y\to\pm\infty} P(y)e^{-y^2} = 0$ για κάθε πολυώνυμο $P(y)$ και, από το (β), συμπεράνατε ότι $f^{(k)}(0) = 0$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$. Πράγματι,

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = \lim_{y\to\pm\infty} yP_k(y)e^{-y^2}$$

και η συνάρτηση $y \mapsto yP_k(y)$ είναι πολυώνυμο.

Έπεται ότι $T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. *Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης* $\arctan x$ $(-1 \leq x \leq 1)$ *υπολογίστε το άθροισμα*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n(2n+1)}.$$

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ αν $-1 \leq x \leq 1$. Συνεπώς,

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n\sqrt{3}} \frac{1}{2n+1}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n(2n+1)} = \sqrt{3} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

10. *Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι* $f''' = f$ *και* $f(0) = 1$, $f'(0) = f''(0) = 0$.

(α) *Έστω* $R > 0$. *Δείξτε ότι υπάρχει* $M = M(R) > 0$ *ώστε: για κάθε* $x \in [-R, R]$ *και για κάθε* $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$|f^{(k)}(x)| \leq M.$$

(β) *Βρείτε το πολυώνυμο Taylor* $T_{3n,f,0}$ *και, χρησιμοποιώντας το (α) και οποιονδήποτε τύπο υπολοίπου, δείξτε ότι*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. (α) Από την υπόθεση ότι $f''' = f$ βλέπουμε ότι, για κάθε $k = 0, 1, 2 \ldots$, η $f^{(k)}$ είναι κάποια από τις f, f', f''. Οι τρεις αυτές συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες, άρα συνεχείς. Συνεπώς, αν σταθεροποιήσουμε $R > 0$ τότε καθεμία από τις f, f', f'' είναι φραγμένη στο $[-R, R]$. Δηλαδή, υπάρχει $M = M(R) > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$, $|f'(x)| \leq M$ και $|f''(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [-R, R]$. Έπεται ότι, για κάθε $x \in [-R, R]$ και για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$|f^{(k)}(x)| \leq M.$$

(β) Έχουμε $f^{(3k)}(0) = 1$, $f^{(3k+1)}(0) = 0$ και $f^{(3k+2)}(0) = 0$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$. Άρα,

$$T_{3n,f,0}(x) = \sum_{s=0}^{3n} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} x^s = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(3k)!} x^{3k}.$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Σταθεροποιούμε $R > |x|$ και θεωρούμε την σταθερά $M = M(R)$ από το (α). Ισχύει

$$|R_{3n,f,0}(x)| = \left| \frac{f^{(3n+1)}(\xi)}{(3n+1)!} x^{3n+1} \right|$$

για κάποιο ξ μεταξύ των 0 και x. Αφού $|\xi| \leq |x| < R$, έχουμε $|f^{(3n+1)}(\xi)| \leq M$. Άρα,

$$|R_{3n,f,0}(x)| \leq \frac{M}{(3n+1)!} |x|^{3n+1}.$$

Με το κριτήριο του λόγου βλέπουμε ότι η ακολουθία του δεξιού μέλους συγκλίνει στο 0. Άρα, $R_{3n,f,0}(x) \to 0$ όταν $n \to \infty$. Έπεται ότι

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_{3n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!}.$$

Το $x \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, οπότε έχουμε το ζητούμενο.

11. *Βρείτε προσεγγιστική τιμή, με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6}, για καθέναν από τους αριθμούς*

$$\sin 1, \quad \sin 2, \quad \sin \frac{1}{2}, \quad e, \quad e^2.$$

12. (α) *Δείξτε ότι*

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

και

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

(β) *Δείξτε ότι $\pi = 3.14159\cdots$ (με άλλα λόγια, βρείτε προσεγγιστική τιμή για τον αριθμό π με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6}).*

Κεφάλαιο 8

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Ομάδα Α΄

1. *Έστω $f, f_n : I \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n είναι κυρτή συνάρτηση και ότι $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in I$. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή.*

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in I$ και έστω $t \in [0,1]$. Από την υπόθεση έχουμε $f_n(x) \to f(x)$, $f_n(y) \to f(y)$ και $f_n((1-t)x+ty) \to f((1-t)x+ty)$ όταν το $n \to \infty$. Από την κυρτότητα των f_n έχουμε

$$f_n((1-t)x+ty) \leq (1-t)f_n(x) + tf_n(y)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\begin{aligned} f((1-t)x+ty) &= \lim_{n\to\infty} f_n((1-t)x+ty) \leq \lim_{n\to\infty}((1-t)f_n(x)+tf_n(y)) \\ &= (1-t)\lim_{n\to\infty} f_n(x) + t\lim_{n\to\infty} f_n(y) = (1-t)f(x)+tf(y). \end{aligned}$$

Αφού τα $x, y \in I$ και $t \in [0,1]$ ήταν τυχόντα, η f είναι κυρτή.

2. *Έστω $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία κυρτών συναρτήσεων $f_n : I \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : I \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. Αν η f είναι πεπερασμένη παντού στο I, τότε η f είναι κυρτή.*

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in I$ και έστω $t \in [0,1]$. Από τον ορισμό της f και την κυρτότητα των f_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$f_n((1-t)x+ty) \leq (1-t)f_n(x)+tf_n(y) \leq (1-t)f(x)+tf(y).$$

Ο αριθμός $(1-t)f(x)+tf(y)$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{f_n((1-t)x+ty) : n \in \mathbb{N}\}$, άρα

$$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y).$$

Αφού τα $x, y \in I$ και $t \in [0,1]$ ήταν τυχόντα, η f είναι κυρτή.

3. *Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτές συναρτήσεις. Υποθέτουμε ακόμα ότι η g είναι αύξουσα. Δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι κυρτή.*

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ και έστω $t \in [0,1]$. Αφού η f είναι κυρτή, έχουμε

$$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y).$$

Η g είναι αύξουσα, άρα

$$(g\circ f)((1-t)x+ty) = g(f((1-t)x+ty)) \leq g((1-t)f(x)+tf(y)).$$

Αφού η g είναι κυρτή, έχουμε

$$g((1-t)f(x)+tf(y)) \leq (1-t)g(f(x))+tg(f(y)) = (1-t)(g\circ f)(x)+t(g\circ f)(y).$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ανισότητες παίρνουμε

$$(g\circ f)((1-t)x+ty) \leq (1-t)(g\circ f)(x)+t(g\circ f)(y).$$

Αφού τα $x, y \in \mathbb{R}$ και $t \in [0,1]$ ήταν τυχόντα, η $g\circ f$ είναι κυρτή.

4. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$f(x_1+\delta)-f(x_1) \leq f(x_2+\delta)-f(x_2)$$

για κάθε $x_1 < x_2 \in I$ και $\delta > 0$ για το οποίο $x_1+\delta, x_2+\delta \in I$.

Υπόδειξη. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(α) $x_1+\delta < x_2$: Εφαρμόζοντας το λήμμα των τριών χορδών για τα $x_1 < x_1+\delta < x_2$ και $x_1+\delta < x_2 < x_2+\delta$, παίρνουμε

$$\frac{f(x_1+\delta)-f(x_1)}{\delta} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1+\delta)}{x_2-x_1-\delta} \leq \frac{f(x_2+\delta)-f(x_2)}{\delta}.$$

Συνεπώς, $f(x_1+\delta)-f(x_1) \leq f(x_2+\delta)-f(x_2)$.

(β) $x_2 < x_1+\delta$: Εφαρμόζοντας το λήμμα των τριών χορδών για τα $x_1 < x_2 < x_1+\delta$ και $x_2 < x_1+\delta < x_2+\delta$, παίρνουμε

$$\frac{f(x_1+\delta)-f(x_1)}{\delta} \leq \frac{f(x_1+\delta)-f(x_2)}{x_1+\delta-x_2} \leq \frac{f(x_2+\delta)-f(x_2)}{\delta}.$$

Συνεπώς, $f(x_1+\delta)-f(x_1) \leq f(x_2+\delta)-f(x_2)$.

(γ) $x_2 = x_1+\delta$: Το ζητούμενο έπεται άμεσα από το λήμμα των τριών χορδών για τα $x_1 < x_2 = x_1+\delta < x_2+\delta$.

5. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι η f δεν είναι αναγκαστικά συνάρτηση Lipschitz σε ολόκληρο το $[a,b]$, ακόμα και αν υποθέσουμε ότι η f είναι φραγμένη. Επίσης, δείξτε ότι η f δεν είναι αναγκαστικά συνεχής στο $[a,b]$.*

Υπόδειξη. (α) Η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1-\sqrt{x}$ είναι κυρτή και φραγμένη συνάρτηση. Δεν είναι όμως Lipschitz συνεχής στο $[0,1]$. Παρατηρήστε ότι

$$\frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty \quad \text{καθώς το} \quad x \to 0^+.$$

(β) Ελέγξτε ότι η $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ όταν $-1 < x < 1$ και $f(-1) = f(1) = 2$ είναι κυρτή συνάρτηση. Όμως, δεν είναι συνεχής στα άκρα του $[-1,1]$.

6. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $\xi \in (a,b)$. Δείξτε ότι:*

(α) *αν η f έχει ολικό μέγιστο στο ξ τότε η f είναι σταθερή.*

(β) *αν η f έχει ολικό ελάχιστο στο ξ τότε η f είναι φθίνουσα στο (a,ξ) και αύξουσα στο (ξ,b).*

(γ) *αν η f έχει τοπικό ελάχιστο στο ξ τότε έχει ολικό ελάχιστο στο ξ.*

(δ) *αν η f είναι γνησίως κυρτή, τότε έχει το πολύ ένα σημείο ολικού ελαχίστου.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι η f έχει ολικό μέγιστο στο ξ. Τότε, $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in (a,b)$. Επιλέγουμε τυχόντα $x_1, x_2 \in (a,b)$ με $x_1 < \xi < x_2$. Ψπάρχει $t \in (0,1)$ ώστε $\xi = (1-t)x_1 + tx_2$. Η f είναι κυρτή, άρα

$$f(\xi) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \leq (1-t)f(\xi) + tf(\xi) = f(\xi).$$

Αναγκαστικά, $f(x_1) = f(x_2) = f(\xi)$ (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι $f(x) = f(\xi)$ για κάθε $x \in (a,b)$ (δηλαδή, η f είναι σταθερή).

(β) Υποθέτουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο ξ. Έστω $a < x < y < \xi$. Υπάρχει $t \in (0,1)$ ώστε $y = (1-t)x + t\xi$. Η f είναι κυρτή και $f(\xi) \leq f(y)$, άρα

$$f(y) \leq (1-t)f(x) + tf(\xi) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

άρα $(1-t)f(y) \leq (1-t)f(x)$. Αφού $0 < 1-t < 1$, συμπεραίνουμε ότι $f(y) \leq f(x)$. Αυτό δείχνει ότι η f είναι φθίνουσα στο (a,ξ). Με τον ίδιο τρόπο ελέγχουμε ότι η f είναι αύξουσα στο (ξ,b).

(γ) Υποθέτουμε ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο ξ. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(\xi - 2\delta, \xi + 2\delta) \subset (a,b)$ και $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in (\xi - 2\delta, \xi + 2\delta)$.

Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $y \in (\xi, b)$ ισχύει $f(y) < f(\xi)$. Αναγκαστικά, έχουμε $y \geq \xi + 2\delta$. Υπάρχει $t \in (0,1)$ ώστε $\xi + \delta = (1-t)\xi + ty$. Από την κυρτότητα της f παίρνουμε

$$f(\xi) \leq f(\xi + \delta) \leq (1-t)f(\xi) + tf(y) < f(\xi)$$

το οποίο είναι άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι για κάποιο $y \in (a,\xi)$ ισχύει $f(y) < f(\xi)$, καταλήγουμε σε άτοπο με τον ίδιο τρόπο. Άρα, η f έχει ολικό ελάχιστο στο ξ.

(δ) Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως κυρτή. Έστω ότι η f έχει ολικό ελάχιστο m στα $x < y$. Τότε,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{m+m}{2} = m$$

από την γνήσια κυρτότητα της f. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα η f έχει το πολύ ένα σημείο ολικού ελαχίστου.

7. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν η f είναι άνω φραγμένη, τότε είναι σταθερή.*

Υπόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή. Υπάρχουν $x \neq y$ στο $\mathbb{R}$ με $f(x) < f(y)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) $x < y$: Έστω $z > y$. Τότε,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y},$$

δηλαδή

$$f(z) \geq A(z) := f(y) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-y).$$

Παρατηρήστε ότι $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$, άρα $\lim\limits_{z\to+\infty} A(z) = +\infty$. Έπεται ότι η f δεν είναι άνω φραγμένη.
(β) $y < x$: Έστω $z < y$. Τότε,

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y},$$

δηλαδή

$$f(z) \geq B(z) := f(y) - \frac{f(x)-f(y)}{x-y}(y-z).$$

Παρατηρήστε ότι $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0$, άρα $\lim\limits_{z\to-\infty} B(z) = +\infty$. Έπεται ότι η f δεν είναι άνω φραγμένη.

8. *Δείξτε ότι κάθε κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε φραγμένο διάστημα είναι κάτω φραγμένη.*

Υπόδειξη. Έστω I ένα φραγμένο διάστημα και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Θεωρούμε τυχόντα $a < b$ στο εσωτερικό του I. Ορίζουμε $g : I \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Η g είναι γραμμική και συμπίπτει με την f στα a και b. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η g είναι κάτω φραγμένη στο I: υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x) \geq m$ για κάθε $x \in I$.

(ii) Αν $x \in I$ και $x < a$ ή $x > b$, τότε $f(x) \geq g(x) \geq m$.

(iii) Η f παίρνει ελάχιστη τιμή m' στο $[a, b]$.

(iv) Η f είναι κάτω φραγμένη στο I: για κάθε $x \in I$ ισχύει η $f(x) \geq \min\{m, m'\}$.

9. *Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ κοίλη, αύξουσα, άνω φραγμένη και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 0.$$

Υπόδειξη. Η f είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 0.$$

Για κάθε $x > 0$ εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x/2, x]$: υπάρχει $\xi_x \in (x/2, x)$ ώστε

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = f'(\xi_x)\frac{x}{2}.$$

Αφού η f είναι κοίλη, η f' είναι φθίνουσα (και μη αρνητική, γιατί η f είναι αύξουσα). Άρα,

$$f'(\xi_x) \geq f'(x) \geq 0.$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις βλέπουμε ότι

$$0 \leq xf'(x) \leq 2\left(f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right) \to 0.$$

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

Ομάδα Β′

10. *Δείξτε ότι αν η* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *είναι κυρτή και* $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m > 0$, *τότε*

$$(x_1 + \cdots + x_m) f\left(\frac{y_1 + \cdots + y_m}{x_1 + \cdots + x_m}\right) \leq \sum_{i=1}^{m} x_i f\left(\frac{y_i}{x_i}\right).$$

Δείξτε ότι η $f(x) = (1+x^p)^{1/p}$ *είναι κυρτή στο* $(0, +\infty)$ *όταν* $p \geq 1$, *και συμπεράνατε ότι*

$$((x_1 + \cdots + x_m)^p + (y_1 + \cdots + y_m)^p)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^{m} (x_i^p + y_i^p)^{1/p}.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $S = x_1 + \cdots + x_m$ και εφαρμόζουμε την ανισότητα του Jensen ως εξής: αφού η f είναι κυρτή και

$$\frac{y_1 + \cdots + y_m}{S} = \frac{x_1}{S}\frac{y_1}{x_1} + \cdots + \frac{x_m}{S}\frac{y_m}{x_m},$$

παίρνουμε

$$f\left(\frac{y_1 + \cdots + y_m}{x_1 + \cdots + x_m}\right) = f\left(\frac{y_1 + \cdots + y_m}{S}\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{S} f\left(\frac{y_i}{x_i}\right).$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη αυτής της ανισότητας επί S παίρνουμε το ζητούμενο.

Έστω $p \geq 1$. Τότε, η $f(x) = (1+x^p)^{1/p}$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$: αυτό προκύπτει αν παραγωγίσουμε δύο φορές. Έχουμε $f'(x) = x^{p-1}(1 + x^p)^{\frac{1}{p}-1}$ και

$$f''(x) = (p-1)x^{p-2}(1+x^p)^{\frac{1}{p}-1} - (p-1)x^{2p-2}(1+x^p)^{\frac{1}{p}-2} = (p-1)x^{p-2}(1+x^p)^{\frac{1}{p}-2} \geq 0.$$

Παρατηρούμε ότι

$$((x_1 + \cdots + x_m)^p + (y_1 + \cdots + y_m)^p)^{1/p} = (x_1 + \cdots + x_m) f\left(\frac{y_1 + \cdots + y_m}{x_1 + \cdots + x_m}\right).$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα του πρώτου ερωτήματος βλέπουμε ότι η τελευταία ποσότητα φράσσεται από

$$\sum_{i=1}^{m} x_i f\left(\frac{y_i}{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(1 + \frac{y_i^p}{x_i^p}\right)^{1/p} = \sum_{i=1}^{m} (x_i^p + y_i^p)^{1/p}.$$

11. *Δείξτε ότι η συνάρτηση $-\sin x$ είναι κυρτή στο $[0,\pi]$. Χρησιμοποιώντας το δείξτε ότι η μέγιστη περίμετρος n-γώνου που εγγράφεται στο μοναδιαίο κύκλο είναι $2n\sin(\pi/n)$.*

Υπόδειξη. Έχουμε $(-\sin x)'' = \sin x \geq 0$ στο $[0,\pi]$, άρα η $f(x) = -\sin x$ είναι κυρτή στο $[0,\pi]$.

Έστω T ένα n-γωνο που εγγράφεται στο μοναδιαίο κύκλο. Αν $\phi_1,\ldots,\phi_n$ είναι οι επίκεντρες γωνίες που αντιστοιχούν στις πλευρές του και $\ell_1,\ldots,\ell_n$ είναι τα μήκη των πλευρών του, τότε

$$\ell_i = 2\sin\frac{\phi_i}{2} \quad \text{για κάθε } i = 1,\ldots,n.$$

Άρα, η περίμετρος P του T ισούται με

$$P = 2\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\phi_i}{2}.$$

Όμως, $\sum_{i=1}^{n}\phi_i = 2\pi$, άρα $\sum_{i=1}^{n}\frac{\phi_i}{2} = \pi$. Η $g(x) = -\sin x$ είναι κυρτή στο $[0,\pi]$ και $\phi_i/2 \in [0,\pi]$ για κάθε $i = 1,\ldots,n$. Από την ανισότητα του Jensen,

$$-\sin\left(\frac{1}{n}\frac{\phi_1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\frac{\phi_n}{2}\right) \leq -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{\phi_i}{2},$$

δηλαδή,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\phi_i}{2} \leq \sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right).$$

Άρα,

$$P = 2\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\phi_i}{2} \leq 2n\sin\frac{\pi}{n}.$$

12. *Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ θετικοί αριθμοί. Δείξτε ότι*

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_n) \geq \left(1 + (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)^{1/n}\right)^n.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $x_i = \ln\alpha_i$ $(i = 1,\ldots,n)$. Για να δείξουμε την

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_n) \geq \left(1 + (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)^{1/n}\right)^n$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(1 + e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}}\right)^n \leq (1+e^{x_1})(1+e^{x_2})\cdots(1+e^{x_n}),$$

ή, ισοδύναμα,

$$\ln\left(1 + e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+e^{x_i}).$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα του Jensen, αν δείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln(1+e^x)$ είναι κυρτή. Παρατηρήστε ότι $g'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ και $g''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \geq 0$. Έπεται το ζητούμενο.

Ομάδα Γ΄

13. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ θετική κοίλη συνάρτηση. Δείξτε ότι η $1/f$ είναι κυρτή.*

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in I$ και έστω $t \in (0,1)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\frac{1-t}{f(x)} + \frac{t}{f(y)} - \frac{1}{f((1-t)x+ty)} = \frac{(1-t)f(y)+tf(x)}{f(x)f(y)} - \frac{1}{f((1-t)x+ty)} \geq 0,$$

η οποία ισχύει αν και μόνο αν

$$A := f((1-t)x+ty)\cdot((1-t)f(y)+tf(x)) \geq f(x)f(y).$$

Αφού η f είναι κοίλη, έχουμε

$$\begin{aligned} A &\geq ((1-t)f(x)+tf(y))((1-t)f(y)+tf(x)) \\ &= [(1-t)^2+t^2]f(x)f(y) + t(1-t)[f^2(y)+f^2(x)] \\ &\geq [(1-t)^2+t^2]f(x)f(y) + t(1-t)\cdot 2f(x)f(y) \\ &= f(x)f(y), \end{aligned}$$

όπου, στο προτελευταίο βήμα, χρησιμοποιήσαμε την $a^2+b^2 \geq 2ab$.

Άλλος τρόπος: Έχουμε $\frac{1}{f} = \exp\left(\ln\frac{1}{f}\right)$. Αφού η exp είναι κυρτή και αύξουσα, αρκεί να δείξουμε ότι η $\ln\frac{1}{f}$ είναι κυρτή (Άσκηση 4). Όμως, $\ln\frac{1}{f} = -\ln f$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η $\ln f$ είναι κοίλη. Αφού η f είναι κοίλη και η ln είναι κοίλη και αύξουσα, επιχείρημα όμοιο με αυτό της Άσκησης 4 δείχνει ότι η $\ln f$ είναι κοίλη.

14. *Έστω $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $k \geq 1$,*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx \geq 0.$$

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx &= \frac{1}{k}\int_0^{2k\pi} f\left(\frac{y}{k}\right)\cos y\,dy \\ &= \frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\int_{2m\pi}^{2m\pi+2\pi} f\left(\frac{y}{k}\right)\cos y\,dy \\ &= \frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{y+2m\pi}{k}\right)\cos y\,dy. \end{aligned}$$

Για κάθε $m = 0, \ldots, k-1$, η συνάρτηση $g_m(y) = f\left(\frac{y+2m\pi}{k}\right)$ είναι κυρτή στο $[0,2\pi]$ (εξηγήστε γιατί). Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν $g : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ είναι μια κυρτή συνάρτηση τότε $\int_0^{2\pi} g(x)\cos x\,dx \geq 0$ (το ζητούμενο, για $k=1$). Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} g(x)\cos x\,dx &= \int_0^{\pi/2} g(x)\cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} g(x)\cos x\,dx \\ &\quad + \int_{\pi}^{3\pi/2} g(x)\cos x\,dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} g(x)\cos x\,dx. \end{aligned}$$

Κάνοντας τις αλλαγές μεταβλητής $y = \pi - x$, $z = x - \pi$, $w = 2\pi - x$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{\pi} g(x)\cos x\,dx &= -\int_0^{\pi/2} g(\pi - y)\cos y\,dy \\
\int_{\pi}^{3\pi/2} g(x)\cos x\,dx &= -\int_0^{\pi/2} g(z + \pi)\cos z\,dz \\
\int_{3\pi/2}^{2\pi} g(x)\cos x\,dx &= \int_0^{\pi/2} g(2\pi - w)\cos w\,dw,
\end{aligned}$$

άρα

$$\int_0^{2\pi} g(x)\cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} [g(x) - g(\pi - x) - g(\pi + x) + g(2\pi - x)]\cos x\,dx.$$

Αν $0 \leq x \leq \pi/2$ τότε $x \leq \pi - x \leq \pi + x \leq 2\pi - x$. Η g είναι κυρτή, άρα

$$\frac{g(\pi - x) - g(x)}{(\pi - x) - x} \leq \frac{g(2\pi - x) - g(\pi + x)}{(2\pi - x) - (\pi + x)}.$$

Όμως, $(\pi - x) - x = \pi - 2x = (2\pi - x) - (\pi + x)$. Άρα,

$$g(x) - g(\pi - x) - g(\pi + x) + g(2\pi - x) \geq 0.$$

Αφού $\cos x \geq 0$ στο $[0, \pi/2]$, έπεται ότι $\int_0^{2\pi} g(x)\cos x\,dx \geq 0$.

15. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή αν και μόνο αν*

$$f(x) \leq \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)dt$$

για κάθε διάστημα $[x-h, x+h] \subset (a,b)$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι κυρτή. Έστω $x \in (a,b)$ και $h > 0$ για το οποίο $[x-h, x+h] \subset (a,b)$. Για κάθε $t \in [0,h]$ έχουμε

$$f(x) \leq \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

από την κυρτότητα της f. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{h} f(x+t)dt &= \int_0^h f(x+t)\,dt + \int_0^h f(x-t)\,dt \\
&= \int_0^h (f(x+t) + f(x-t))\,dt \\
&\geq \int_0^h 2f(x)\,dt \\
&= 2hf(x).
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$(*) \qquad f(x) \leq \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)\,dt.$$

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την $(*)$ για κάθε διάστημα $[x - h, x + h] \subset (a, b)$. Έστω $[x, y] \subset (a, b)$. Η f παίρνει μέγιστη τιμή στο $[x, y]$ (λόγω συνέχειας). Ας υποθέσουμε ότι αυτή η μέγιστη τιμή δεν πιάνεται σε κάποιο από τα x ή y. Δηλαδή, υπάρχει $c \in (x, y)$ ώστε $f(z) \leq f(c)$ για κάθε $z \in [x, y]$ και $\max\{f(x), f(y)\} < f(c)$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $h = c - x \leq y - c$. Τότε, η μέγιστη τιμή της f στο $[c - h, c + h]$ παίρνεται στο σημείο c και $f(c - h) = f(x) < f(c)$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[c - h, c + h]$, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-h}^{h} f(c + t)\, dt < 2h \cdot f(c).$$

Τότε, η υπόθεση $(*)$ οδηγεί σε άτοπο: έχουμε

$$f(c) \leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(c + t)\, dt < f(c).$$

Έχουμε λοιπόν δείξει το εξής:

> *Ισχυρισμός*. Αν η συνεχής συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την $(*)$ για κάθε διάστημα $[x - h, x + h] \subset (a, b)$, τότε για κάθε διάστημα $[x, y] \subset (a, b)$ η μέγιστη τιμή της f στο $[x, y]$ παίρνεται σε κάποιο από τα άκρα του $[x, y]$.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θα δείξουμε ότι η f είναι κυρτή. Έστω $x < y$ στο (a, b). Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση $\ell : (a, b) \to \mathbb{R}$ που συμπίπτει με την f στα x και y. Δηλαδή,

$$\ell(z) = f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x).$$

Παρατηρήστε ότι

$$\ell(z) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \ell(z + t)\, dt$$

για κάθε $z \in (a, b)$ και $[z - h, z + h] \subset (a, b)$. Άρα, η συνάρτηση $g := f - \ell$ ικανοποιεί την

$$g(z) \leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} g(z + t)\, dt$$

για κάθε $z \in (a, b)$ και $[z - h, z + h] \subset (a, b)$. Από τον ισχυρισμό, η g παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $[x, y]$ σε κάποιο από τα x, y. Όμως, $g(x) = f(x) - \ell(x) = 0$ και, όμοια, $g(y) = 0$. Άρα, $f(z) \leq \ell(z)$ για κάθε $z \in [x, y]$. Ισοδύναμα, για κάθε $t \in [0, 1]$ έχουμε

$$f((1 - t)x + ty) \leq f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}[t(y - x)] = (1 - t)f(x) + tf(y).$$

Αφού τα $x, y \in (a, b)$ και $t \in [0, 1]$ ήταν τυχόντα, η f είναι κυρτή.

16. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $c \in (a, b)$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο c αν και μόνο αν*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) + f(c - h) - 2f(c)}{h} = 0.$$

Υπόδειξη. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο c, τότε

$$f'(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} = -\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c-h)-f(c)}{h},$$

άρα

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} + \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c-h)-f(c)}{h} = 0.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι

$$(*) \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h} = 0.$$

Αφού η f είναι κυρτή, υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι

$$f'_+(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \quad \text{και} \quad f'_-(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c-h)-f(c)}{-h}.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$f'_+(c) - f'_-(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h}.$$

Από την $(*)$, το τελευταίο όριο είναι ίσο με 0. Άρα, $f'_+(c) = f'_-(c)$. Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο c.

17. *Έστω $f : [0,+\infty)$ κυρτή, μη αρνητική συνάρτηση με $f(0)=0$. Ορίζουμε $F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $F(0)=0$ και*

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Δείξτε ότι η F είναι κυρτή.

Υπόδειξη. Έστω $x>0$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = xs$ βλέπουμε ότι

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(xs)\,ds.$$

Έστω $x,y>0$ και $t\in[0,1]$. Από την κυρτότητα της f έχουμε

$$f([(1-t)x+ty]s) \leq (1-t)f(xs) + tf(ys)$$

για κάθε $s\in[0,1]$. Άρα,

$$\begin{aligned} F((1-t)x+ty) &= \int_0^1 f([(1-t)x+ty]s)\,ds \\ &\leq (1-t)\int_0^1 f(xs)\,ds + t\int_0^1 f(ys)\,ds \\ &= (1-t)F(x) + tF(y). \end{aligned}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας τις $f(0) = 0$ και $F(0) = 0$ βλέπουμε ότι: για κάθε $x > 0$ και για κάθε $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F((1-t)0 + tx) &= \int_0^1 f([(1-t)0 + tx]s)\, ds \\ &\leq (1-t)\int_0^1 f(0)\, ds + t\int_0^1 f(xs)\, ds \\ &= tF(x) = (1-t)F(0) + tF(x). \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι η F είναι κυρτή.