

Απειροστικός Λογισμός II (2010–11)
Παράγωγος και Ολοκλήρωμα – Ασκήσεις

Ομάδα Α'

1. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^s f(t)dt = \int_s^b f(t)dt.$$

Μπορούμε πάντα να επιλέγουμε ένα τέτοιο s στο ανοικτό διάστημα (a, b) ;

2. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και θετική συνάρτηση ώστε $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$ ώστε $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = \frac{1}{n}$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$.

3. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s \in [0, 1]$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)x^2 dx = \frac{f(s)}{3}.$$

4. Υποθέτουμε ότι $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$$

για κάθε $x \in [0, 1]$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

5. Έστω $f, h : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι η h είναι συνεχής και η f είναι παραγωγίσιμη. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_0^{f(x)} h(t)dt.$$

Δείξτε ότι $F'(x) = h(f(x)) \cdot f'(x)$.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\delta > 0$. Ορίζουμε

$$g(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt.$$

Δείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την g' .

7. Έστω $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ορίζουμε

$$G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} t^2 dt.$$

Δείξτε ότι η G είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και βρείτε την G' .

8. Έστω $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right) dt.$$

Βρείτε την F' .

9. Έστω $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι, για κάθε $x \in [0, a]$,

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du.$$

10. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a, b]$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \int_a^b |f'(x)| dx.$$

11. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $x > 0$,

$$\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = xf(x).$$

Ομάδα Β'

12. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει

$$|f(x)| \leq \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

13. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, η οποία ικανοποιεί την

$$f(x)^2 = 2 \int_0^x f(t) dt$$

για κάθε $x \geq 0$. Δείξτε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \geq 0$.

14. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0.$$

15. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες

$$a_n = \int_0^\pi \sin(nx) dx \quad \text{και} \quad b_n = \int_0^\pi |\sin(nx)| dx.$$

16. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν συνεχείς, αύξουσες και θετικές συναρτήσεις $g, h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f = g - h$.