Κεφάλαιο 3

Ομοιόμορφη συνέχεια

3.1 Ομοιόμορφη συνέχεια

Πριν δώσουμε τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, θα εξετάσουμε πιο προσεκτικά δύο απλά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων.

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, κάτι που εύκολα επιβεβαιώνουμε αυστηρά χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας:
Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Ζητάμε $\delta > 0$ ώστε

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{δηλαδή } |x - x_0| < \varepsilon. \tag{3.1.1}$$

Η επιλογή του δ είναι προφανής: αρκεί να πάρουμε $\delta = \varepsilon$. Παρατηρήστε ότι το δ που βρήκαμε εξαρτάται μόνο από το ε που δόθηκε και όχι από το συγκεκριμένο σημείο x_0. Η συνάρτηση f μεταβάλλεται με τον «ίδιο ρυθμό» σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \varepsilon$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(β) Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι πάλι γνωστό ότι η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (αφού $g = f \cdot f$). Αν θελήσουμε να το επιβεβαιώσουμε με τον εψιλοντικό ορισμό, θεωρούμε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, και ζητάμε $\delta > 0$ με την ιδιότητα

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |x^2 - x_0^2| < \varepsilon. \tag{3.1.2}$$

Ένας τρόπος για να επιλέξουμε κατάλληλο δ είναι ο εξής. Συμφωνούμε από την αρχή ότι θα πάρουμε $0 < \delta \leq 1$, οπότε

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| &= |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq (|x| + |x_0|) \cdot |x - x_0| \\ &\leq (2|x_0| + 1)|x - x_0|. \end{aligned}$$

Αν λοιπόν επιλέξουμε

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}\right\}, \tag{3.1.3}$$

τότε

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |x^2 - x_0^2| < (2|x_0| + 1)\delta \leq \varepsilon. \tag{3.1.4}$$

Άρα, η g είναι συνεχής στο x_0. Παρατηρήστε όμως ότι το δ που επιλέξαμε δεν εξαρτάται μόνο από το ε που μας δόθηκε, αλλά και από το σημείο x_0 στο οποίο ελέγχουμε την συνέχεια της g. Η επιλογή που κάναμε στην (3.1.3) δείχνει ότι όσο πιο μακριά βρίσκεται το x_0 από το 0, τόσο πιο μικρό πρέπει να επιλέξουμε το δ.

Θα μπορούσε βέβαια να πει κανείς ότι ίσως υπάρχει καλύτερος τρόπος επιλογής του δ, ακόμα και ανεξάρτητος από το σημείο x_0. Ας δούμε το ίδιο πρόβλημα με έναν δεύτερο τρόπο. Θεωρούμε $x_0 > 0$ και $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varepsilon < x_0^2$, αφού τα μικρά ε είναι αυτά που παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Μπορούμε επίσης να κοιτάμε μόνο $x > 0$, αφού μας ενδιαφέρει τι γίνεται κοντά στο x_0 το οποίο έχει υποτεθεί θετικό. Η ανισότητα $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$ ικανοποιείται αν και μόνο αν $x_0^2 - \varepsilon < x^2 < x_0^2 + \varepsilon$, δηλαδή αν και μόνο αν

$$\sqrt{x_0^2 - \varepsilon} < x < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}. \tag{3.1.5}$$

Ισοδύναμα, αν

$$-\left(x_0 - \sqrt{x_0^2 - \varepsilon}\right) < x - x_0 < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0. \tag{3.1.6}$$

Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} |x - x_0| &< \min\left\{x_0 - \sqrt{x_0^2 - \varepsilon}, \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0\right\} \\ &= \min\left\{\frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 - \varepsilon} + x_0}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0}\right\} \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0}. \end{aligned}$$

Υποθέσαμε ότι $x_0^2 > \varepsilon$. Άρα,

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0} < \frac{x_0^2}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0} < \frac{x_0^2}{x_0} = x_0. \tag{3.1.7}$$

Αν λοιπόν $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2+\varepsilon}+x_0}$, τότε $|x - x_0| < x_0 \Rightarrow x > 0$ και ο προηγούμενος υπολογισμός δείχνει ότι $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$. Δηλαδή, αν $0 < \varepsilon < x_0^2$ τότε η καλύτερη επιλογή του δ στο σημείο x_0 είναι

$$\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0}. \tag{3.1.8}$$

Δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε την (3.1.2) αν επιλέξουμε μεγαλύτερο δ.

Αν τα προηγούμενα δύο επιχειρήματα δεν είναι απολύτως πειστικά, δίνουμε κι ένα τρίτο.

Ισχυρισμός. Θεωρούμε την $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. **Δεν** υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|y - x| < \delta$ τότε $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$.

Παρατηρήστε ότι ο ισχυρισμός είναι ισοδύναμος με το εξής: για δοθέν $\varepsilon > 0$ δεν υπάρχει κάποια *ομοιόμορφη επιλογή* του δ που να μας επιτρέπει να ελέγχουμε την (3.1.2) σε *κάθε* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη του ισχυρισμού. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|y-x| < \delta$ τότε $|g(y)-g(x)| < \varepsilon$. Αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\left|x + \frac{\delta}{2} - x\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$, πρέπει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η

$$\left|\left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right| < \varepsilon. \tag{3.1.9}$$

Ειδικότερα, για κάθε $x > 0$ πρέπει να ισχύει η

$$\delta x < \delta x + \frac{\delta^2}{4} = \left|\left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right| < \varepsilon. \tag{3.1.10}$$

Όμως τότε, για κάθε $x > 0$ θα είχαμε

$$x < \frac{\varepsilon}{\delta}. \tag{3.1.11}$$

Αυτό είναι άτοπο: το $\mathbb{R}$ θα ήταν άνω φραγμένο. □

Τα παραδείγματα που δώσαμε δείχνουν μια «παράλειψή» μας στον ορισμό της συνέχειας. Ένας πιο προσεκτικός ορισμός θα ήταν ο εξής:

> Η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ ώστε: αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ο συμβολισμός $\delta(\varepsilon, x_0)$ θα έδειχνε ότι το δ εξαρτάται τόσο από το ε όσο και από το σημείο x_0. Οι συναρτήσεις (όπως η $f(x) = x$) που μας επιτρέπουν να επιλέγουμε το δ ανεξάρτητα από το x_0 λέγονται *ομοιόμορφα συνεχείς*:

Ορισμός 3.1.1. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι **ομοιόμορφα συνεχής** στο A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε

$$\text{αν} \quad x, y \in A \quad \text{και} \quad |x - y| < \delta \quad \text{τότε} \; |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3.1.12}$$

Παραδείγματα

(α) Η $f(x) = x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(β) Η $g(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2$ του (β), περιορισμένη όμως στο κλειστό διάστημα $[-M, M]$, όπου $M > 0$. Τότε, για κάθε $x, y \in [-M, M]$ έχουμε

$$|g(y) - g(x)| = |y^2 - x^2| = |x + y| \cdot |y - x| \leq 2M \cdot |y - x|. \tag{3.1.13}$$

Δίνεται $\varepsilon > 0$. Αν επιλέξουμε $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2M}$ τότε η (3.1.13) δείχνει ότι αν $x, y \in [-M, M]$ και $|x - y| < \delta$ έχουμε

$$|g(y) - g(x)| \leq 2M \cdot |y - x| < 2M\delta = \varepsilon. \tag{3.1.14}$$

Δηλαδή, η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-M, M]$.

Το παράδειγμα (γ) οδηγεί στον εξής ορισμό.

Ορισμός 3.1.2. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι *Lipschitz συνεχής* αν υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in A$

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|. \tag{3.1.15}$$

Πρόταση 3.1.3. *Κάθε Lipschitz συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $M > 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ για κάθε $x, y \in A$. Αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Τότε, για κάθε $x, y \in A$ με $|x - y| < \delta$ έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta = \varepsilon. \tag{3.1.16}$$

Έπεται ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. □

Η επόμενη Πρόταση μας δίνει ένα χρήσιμο κριτήριο για να εξασφαλίζουμε ότι μια συνάρτηση είναι Lipschitz συνεχής (άρα, ομοιόμορφα συνεχής).

Πρόταση 3.1.4. *Έστω I ένα διάστημα και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη: υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε: $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Τότε, η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά M.*

Απόδειξη. Έστω $x < y$ στο I. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (x, y)$ ώστε

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x). \tag{3.1.17}$$

Τότε,

$$|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |y - x| \leq M|y - x|. \tag{3.1.18}$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.2, η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά M. □

Από τη συζήτηση που προηγήθηκε του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας, είναι λογικό να περιμένουμε ότι οι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις είναι συνεχείς. Αυτό αποδεικνύεται με απλή σύγκριση των δύο ορισμών:

Πρόταση 3.1.5. *Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Πράγματι: έστω $x_0 \in A$ και $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in A$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Επιλέγουμε αυτό το δ. Αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (πάρτε $y = x_0$). Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η f είναι συνεχής στο x_0. □

3.2 Χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών

Θυμηθείτε τον χαρακτηρισμό της συνέχειας μέσω ακολουθιών: αν $f : A \to \mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \in A$ και $x_n \to x_0$, ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.

Ο αντίστοιχος χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας έχει ως εξής:

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι ακολουθιών (x_n), (y_n) στο A με $x_n - y_n \to 0$ ισχύει*

$$f(x_n) - f(y_n) \to 0. \tag{3.2.1}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. Έστω (x_n), (y_n) δύο ακολουθίες στο A με $x_n - y_n \to 0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$:

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{(3.2.2)} \qquad \text{αν } x, y \in A \text{ και } |x-y| < \delta \quad \text{τότε} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Αφού $x_n - y_n \to 0$, υπάρχει $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geq n_0$ τότε $|x_n - y_n| < \delta$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε, $|x_n - y_n| < \delta$ και $x_n, y_n \in A$, οπότε η (3.2.2) δίνει

$$\text{(3.2.3)} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Αντίστροφα: ας υποθέσουμε ότι

$$\text{(3.2.4)} \qquad \text{αν } x_n, y_n \in A \text{ και } x_n - y_n \to 0 \quad \text{τότε} \quad f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. Έστω ότι δεν είναι. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα:

> Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $x_\delta, y_\delta \in A$ με $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ αλλά $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$.

Επιλέγοντας διαδοχικά $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, βρίσκουμε ζευγάρια $x_n, y_n \in A$ ώστε

$$\text{(3.2.5)} \qquad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{αλλά} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Θεωρούμε τις ακολουθίες (x_n), (y_n). Από την κατασκευή έχουμε $x_n - y_n \to 0$, αλλά από την $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βλέπουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει η $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ (εξηγήστε γιατί). Αυτό είναι άτοπο, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. □

Παραδείγματα

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $(0, 1]$. Η f είναι συνεχής αλλά *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής. Για να το δούμε, αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $(0, 1]$ που να ικανοποιούν την $x_n - y_n \to 0$ αλλά να μην ικανοποιούν την $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \to 0$.

Παίρνουμε $x_n = \frac{1}{n}$ και $y_n = \frac{1}{2n}$. Τότε, $x_n, y_n \in (0, 1]$ και

$$\text{(3.2.6)} \qquad x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \to 0$$

αλλά

$$\text{(3.2.7)} \qquad f(x_n) - f(y_n) = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} = n - 2n = -n \to -\infty.$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2$ στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $x_n = n + \frac{1}{n}$ και $y_n = n$. Τότε,

$$\text{(3.2.8)} \qquad x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$$

αλλά

$$\text{(3.2.9)} \qquad g(x_n) - g(y_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0.$$

Άρα, η g δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(γ) Ορίζουμε $f(x) = \cos(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $|f(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, η f είναι επιπλέον φραγμένη. Όμως η f *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής: για να το δείτε, θεωρήστε τις ακολουθίες

$$x_n = \sqrt{(n+1)\pi} \quad \text{και} \quad y_n = \sqrt{n\pi}. \tag{3.2.10}$$

Τότε,

$$x_n - y_n = \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} = \frac{(n+1)\pi - n\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} = \frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} \to 0, \tag{3.2.11}$$

αλλά

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |\cos((n+1)\pi) - \cos(n\pi)| = 2 \tag{3.2.12}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα 3.2.1 έπεται το συμπέρασμα. Υπάρχουν λοιπόν φραγμένες συνεχείς συναρτήσεις που δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς (σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $\cos(x^2)$ για να δείτε το λόγο: για μεγάλα x, η f ανεβαίνει από την τιμή -1 στην τιμή 1 και κατεβαίνει από την τιμή 1 στην τιμή -1 όλο και πιο γρήγορα - ο ρυθμός μεταβολής της γίνεται πολύ μεγάλος).

3.3 Συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστά διαστήματα

Στην παράγραφο §3.1 είδαμε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $I = \mathbb{R}$ αλλά είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $I = [-M, M]$, $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο κι αν είναι το M). Αυτό που ισχύει γενικά είναι ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής:

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ και δύο ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $[a, b]$ με $x_n - y_n \to 0$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αφού $a \leq x_n, y_n \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οι (x_n) και (y_n) είναι φραγμένες ακολουθίες. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Αφού $a \leq x_{k_n} \leq b$ για κάθε n, συμπεραίνουμε ότι $a \leq x \leq b$. Δηλαδή,

$$x_{k_n} \to x \in [a, b]. \tag{3.3.1}$$

Παρατηρήστε ότι $x_{k_n} - y_{k_n} \to 0$, άρα

$$y_{k_n} = x_{k_n} - (x_{k_n} - y_{k_n}) \to x - 0 = x. \tag{3.3.2}$$

Από τη συνέχεια της f στο x έπεται ότι

$$f(x_{k_n}) \to f(x) \quad \text{και} \quad f(y_{k_n}) \to f(x). \tag{3.3.3}$$

Δηλαδή,

$$f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}) \to x - x = 0. \tag{3.3.4}$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$. $\square$

Παρατήρηση. Το γεγονός ότι η f ήταν ορισμένη στο **κλειστό διάστημα** $[a,b]$ χρησιμοποιήθηκε με δύο τρόπους. Πρώτον, μπορέσαμε να βρούμε συγκλίνουσες υπακολουθίες των (x_n), (y_n) (θεώρημα Bolzano-Weierstrass). Δεύτερον, μπορούσαμε να πούμε ότι το κοινό όριο x αυτών των υπακολουθιών εξακολουθεί να βρίσκεται στο πεδίο ορισμού $[a,b]$ της f. Χρησιμοποιήσαμε δηλαδή το εξής:

$$\text{αν } a \leq z_n \leq b \text{ και } z_n \to z, \text{ τότε } a \leq z \leq b. \tag{3.3.5}$$

Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει ότι οι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις έχουν την εξής «καλή ιδιότητα»: απεικονίζουν ακολουθίες Cauchy σε ακολουθίες Cauchy. Αυτό δεν ισχύει για όλες τις συνεχείς συναρτήσεις: θεωρήστε την $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $(0,1]$. Η $x_n = \frac{1}{n}$ είναι ακολουθία Cauchy στο $(0,1]$, όμως η $f(x_n) = n$ δεν είναι ακολουθία Cauchy.

Θεώρημα 3.3.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση και έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στο A. Τότε, η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in A$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, άρα υπάρχει $n_0(\delta)$ ώστε

$$\text{αν } m, n \geq n_0(\delta), \quad \text{τότε} \quad |x_n - x_m| < \delta. \tag{3.3.6}$$

Όμως τότε,

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon. \tag{3.3.7}$$

Βρήκαμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$\text{αν } m, n \geq n_0(\delta) \quad \text{τότε} \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon. \tag{3.3.8}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy. $\square$

Είδαμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Θα εξετάσουμε το εξής ερώτημα: Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Πώς μπορούμε να ελέγξουμε αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a,b);

Θεώρημα 3.3.3. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a,b) αν και μόνο αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχουν τα $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$. Ορίζουμε μια «επέκταση» g της f στο $[a,b]$, θέτοντας: $g(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $g(b) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ και $g(x) = f(x)$ αν $x \in (a,b)$.

Η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ (εξηγήστε γιατί), άρα ομοιόμορφα συνεχής. Θα δείξουμε ότι η f είναι κι αυτή ομοιόμορφα συνεχής στο (a,b). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [a,b]$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Θεωρούμε $x, y \in (a,b)$ με $|x-y| < \delta$. Τότε, από τον ορισμό της g έχουμε

$$|f(x) - f(y)| = |g(x) - g(y)| < \varepsilon. \tag{3.3.9}$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a,b) και δείχνουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to a^+} f(x)$ (η ύπαρξη του άλλου πλευρικού ορίου αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο).

Θα δείξουμε ότι αν (x_n) είναι ακολουθία στο (a,b) με $x_n \to a$, τότε η $(f(x_n))$ συγκλίνει. Αυτό είναι άμεσο από το Θεώρημα 3.3.2: η (x_n) συγκλίνει, άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, άρα η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy, άρα η $(f(x_n))$ συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό ℓ.

Επίσης, το όριο της $(f(x_n))$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της (x_n): έστω (y_n) μια άλλη ακολουθία στο (a,b) με $y_n \to a$. Τότε, $x_n - y_n \to 0$. Από το Θεώρημα 3.2.1,

$$f(x_n) - f(y_n) \to 0. \tag{3.3.10}$$

Ξέρουμε ήδη ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$, άρα

$$f(y_n) = f(x_n) - (f(x_n) - f(y_n)) \to \ell + 0 = \ell. \tag{3.3.11}$$

Από την αρχή της μεταφοράς (για το όριο συνάρτησης) έπεται ότι $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$. □

Παραδείγματα

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0,1]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, επομένως είναι ομοιόμορφα συνεχής. Όμως, η f δεν είναι Lipschitz συνεχής στο $[0,1]$.

Αν ήταν, θα υπήρχε $M > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \tag{3.3.12}$$

για κάθε $x, y \in [0,1]$. Ειδικότερα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα είχαμε

$$\left| f\left(\frac{1}{n^2}\right) - f(0) \right| = \frac{1}{n} = n \cdot \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| \leq M \cdot \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right|. \tag{3.3.13}$$

Δηλαδή, $n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι άτοπο: το $\mathbb{N}$ θα ήταν άνω φραγμένο.

(β) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι Lipschitz συνεχής στο $[1,+\infty)$, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, αν $x \geq 1$ τότε

$$|f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}, \tag{3.3.14}$$

δηλαδή η f έχει φραγμένη παράγωγο στο $[1,+\infty)$. Από την Πρόταση 3.1.4 είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά $1/2$.

(γ) Ας δούμε τώρα την ίδια συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0,+\infty)$. Η f δεν είναι Lipschitz συνεχής στο $[0,+\infty)$ ούτε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.3.1. Είδαμε όμως ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$ και ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$. Αυτό φτάνει για να δείξουμε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$:

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε: αν $x, y \in [0,1]$ και $|x-y| < \delta_1$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (από την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο $[0,1]$).

Επίσης, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε: αν $x, y \in [1,+\infty)$ και $|x-y| < \delta_2$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (από την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο $[1,+\infty)$).

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Έστω $x < y \in [0,+\infty)$ με $|x-y| < \delta$. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις:

(i) Αν $0 \leq x < y \leq 1$ και $|x-y| < \delta$, τότε $|x-y| < \delta_1$ άρα $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

(ii) Αν $1 \leq x < y$ και $|x-y| < \delta$, τότε $|x-y| < \delta_2$ άρα $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

(iii) Αν $x < 1 < y$ και $|x-y| < \delta$, παρατηρούμε ότι $|x-1| < \delta$ και $|1-y| < \delta$. Όμως, $x, 1 \in [0,1]$ και $1, y \in [1,+\infty)$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(1)| + |f(1)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3.4 Συστολές – θεώρημα σταθερού σημείου

Ορισμός 3.4.1. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται *συστολή* αν υπάρχει $0 < M < 1$ ώστε: για κάθε $x, y \in A$

$$|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|. \tag{3.4.1}$$

Προφανώς, κάθε συστολή είναι Lipschitz συνεχής.

Θεώρημα 3.4.2 (θεώρημα σταθερού σημείου). *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συστολή. Υπάρχει μοναδικό $y \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα*

$$f(y) = y. \tag{3.4.2}$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $0 < M < 1$ ώστε $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Η f είναι Lipschitz συνεχής, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Επιλέγουμε τυχόν $x_1 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε μια ακολουθία (x_n) μέσω της

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.4.3}$$

Τότε,

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq M|x_n - x_{n-1}| \tag{3.4.4}$$

για κάθε $n \geq 2$. Επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι

$$|x_{n+1} - x_n| \leq M^{n-1}|x_2 - x_1| \tag{3.4.5}$$

για κάθε $n \geq 2$. Έπεται ότι αν $n > m$ στο $\mathbb{N}$, τότε

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n-1}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \\ &\leq (M^{n-2} + \cdots + M^{m-1})|x_2 - x_1| \\ &= \frac{1-M^{n-m}}{1-M} M^{m-1}|x_2 - x_1| \\ &\leq \frac{M^{m-1}}{1-M}|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Αφού $0 < M < 1$, έχουμε $M^m \to 0$. Άρα, για δοθέν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n > m \geq n_0$ τότε $\frac{M^{m-1}}{1-M}|x_2 - x_1| < \varepsilon$, και συνεπώς, $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Επομένως, η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και αυτό σημαίνει ότι συγκλίνει: υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ ώστε $x_n \to y$. Θα δείξουμε ότι $f(y) = y$: από την $x_n \to y$ και τη συνέχεια της f στο y βλέπουμε ότι $f(x_n) \to f(y)$. Όμως $x_{n+1} = f(x_n)$ και $x_{n+1} \to y$, άρα $f(x_n) \to y$. Από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας προκύπτει η $f(y) = y$.

Το y είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της f. Έστω $z \neq y$ με $f(z) = z$. Τότε,

$$0 < |z-y| = |f(z)-f(y)| \leq M|z-y|, \tag{3.4.6}$$

δηλαδή $1 \leq M$, το οποίο είναι άτοπο. □