Κεφάλαιο 6

Τεχνικές ολοκλήρωσης

Σε αυτό το Κεφάλαιο περιγράφουμε, χωρίς ιδιαίτερη αυστηρότητα, τις βασικές μεθόδους υπολογισμού ολοκληρωμάτων. Δίνεται μια συνάρτηση f και θέλουμε να βρούμε μια αντιπαράγωγο της f, δηλαδή μια συνάρτηση F με την ιδιότητα $F' = f$. Τότε,

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

6.1 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

6.1α΄ Πίνακας στοιχειωδών ολοκληρωμάτων

Κάθε τύπος παραγώγισης $F'(x) = f(x)$ μας δίνει έναν τύπο ολοκλήρωσης: η F είναι αντιπαράγωγος της f. Μπορούμε έτσι να δημιουργήσουμε έναν πίνακα βασικών ολοκληρωμάτων, αντιστρέφοντας τους τύπους παραγώγισης των πιο βασικών συναρτήσεων:

$$\begin{aligned}
\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}, \qquad a \neq -1, \qquad & \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c \\
\int e^x dx = e^x + c, \qquad & \int \sin x\, dx = -\cos x + c \\
\int \cos x\, dx = \sin x + c, \qquad & \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c \\
\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x + c, \qquad & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c \\
\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c. &
\end{aligned}$$

6.1β΄ Υπολογισμός του $\int f(\phi(x))\phi'(x)\, dx$

Η αντικατάσταση $u = \phi(x)$, $du = \phi'(x)\, dx$ μας δίνει

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\, dx = \int f(u)\, du, \qquad u = \phi(x).$$

Αν το ολοκλήρωμα δεξιά υπολογίζεται ευκολότερα, θέτοντας όπου u την $\phi(x)$ υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αριστερά.

Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του
$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$
θέτουμε $u = \arctan x$. Τότε, $du = \frac{dx}{1+x^2}$ και αναγόμαστε στο
$$\int u\,du = \frac{u^2}{2} + c.$$
Έπεται ότι
$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \frac{(\arctan x)^2}{2} + c.$$
(β) Για τον υπολογισμό του
$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$
θέτουμε $u = \cos x$. Τότε, $du = -\sin x\,dx$ και αναγόμαστε στο
$$-\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + c.$$
Έπεται ότι
$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c.$$
(γ) Για τον υπολογισμό του
$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$$
θέτουμε $u = \sqrt{x}$. Τότε, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ και αναγόμαστε στο
$$\int 2\cos u\,du = 2\sin u + c.$$
Έπεται ότι
$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sin(\sqrt{x}) + c.$$

6.1γ′ Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα

Ολοκληρώματα που περιέχουν δυνάμεις ή γινόμενα τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορούν να αναχθούν σε απλούστερα αν χρησιμοποιήσουμε τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες:
$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1, & 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}\\
1 + \cot^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x}, & \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2}\\
\sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2}, & \sin 2x &= 2\sin x\,\cos x\\
\sin ax \sin bx &= \frac{\cos(a-b)x - \cos(a+b)x}{2}, & \sin ax \cos bx &= \frac{\sin(a+b)x + \sin(a-b)x}{2}\\
\cos ax \cos bx &= \frac{\cos(a+b)x + \cos(a-b)x}{2}.
\end{aligned}$$

Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του
$$\int \cos^2 x\, dx$$
χρησιμοποιούμε την $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$: έχουμε
$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c.$$
Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπλογίσουμε το $\int \cos^4 x\, dx$, χρησιμοποιώντας την
$$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{8}.$$
(β) Για τον υπολογισμό του
$$\int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x\, \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\, dx$$
είναι προτιμότερη η αντικατάσταση $u = \cos x$. Τότε, $du = -\sin x\, dx$ και αναγόμαστε στο
$$-\int (1-u^2)^2\, du = -u + \frac{2u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c.$$
Έπεται ότι
$$\int \sin^5 x\, dx = -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c.$$
Την ίδια μέθοδο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για οποιοδήποτε ολοκλήρωμα της μορφής
$$\int \cos^m x \sin^n x\, dx$$
αν ένας από τους εκθέτες m, n είναι περιττός και ο άλλος άρτιος. Για παράδειγμα, αν $m = 3$ και $n = 4$, γράφουμε
$$\int \cos^3 x \sin^4 x\, dx = \int (1-\sin^2 x)\sin^4 x \cos x\, dx$$
και, με την αντικατάσταση $u = \sin x$, αναγόμαστε στο απλό ολοκλήρωμα
$$\int (1-u^2)u^4 du.$$
(γ) Δύο χρήσιμα ολοκληρώματα είναι τα
$$\int \tan^2 x\, dx \ \text{ και } \int \cot^2 x\, dx.$$
Για το πρώτο γράφουμε
$$\int \tan^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int [(\tan x)' - 1]\, dx = \tan x - x + c,$$
και, όμοια, για το δεύτερο γράφουμε
$$\int \cot^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int [(-\cot x)' - 1]\, dx = -\cot x - x + c.$$

6.1δ′ Υπολογισμός του $\int f(x)\,dx$ με την αντικατάσταση $x = \phi(t)$

Η αντικατάσταση $x = \phi(t)$, $dx = \phi'(t)\,dt$ – όπου ϕ αντιστρέψιμη συνάρτηση – μας δίνει

$$\int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$

Αν το ολοκλήρωμα δεξιά υπολογίζεται ευκολότερα, θέτοντας όπου t την $\phi^{-1}(x)$ υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αριστερά.

Παραδείγματα: τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

(α) Σε ολοκληρώματα που περιέχουν την $\sqrt{a^2 - x^2}$ θέτουμε $x = a\sin t$. Τότε,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t \;\text{ και }\; dx = a\cos t\,dt.$$

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 - x^2}},$$

αν θέσουμε $x = 3\sin t$, τότε $dx = 3\cos t\,dt$ και $\sqrt{9 - x^2} = 3\cos t$, και αναγόμαστε στο

$$\int \frac{3\cos t\,dt}{9\sin^2 t(3\cos t)} = \frac{1}{9}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{9}\cot t + c.$$

Τότε, από την

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x},$$

παίρνουμε

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 - x^2}} = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{9x} + c.$$

(β) Σε ολοκληρώματα που περιέχουν την $\sqrt{x^2 - a^2}$ θέτουμε $x = a/\cos t$. Τότε,

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan t \;\text{ και }\; dx = \frac{a\sin t}{\cos^2 t}\,dt.$$

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}\,dx,$$

αν θέσουμε $x = \frac{2}{\cos t}$, τότε $dx = \frac{2\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \frac{2\tan t}{\cos t}\,dt$ και $\sqrt{x^2 - 4} = 2\tan t$, και αναγόμαστε στο

$$\int \frac{2\tan t}{2/\cos t}\frac{2\tan t}{\cos t}\,dt = 2\int \tan^2 t\,dt = 2\tan t - 2t + c.$$

Αφού $t = \arctan\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$, παίρνουμε

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}\,dx = \sqrt{x^2 - 4} - 2\arctan\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} + c.$$

(γ) Σε ολοκληρώματα που περιέχουν την $\sqrt{x^2+a^2}$ θέτουμε $x = a\tan t$. Τότε,

$$\sqrt{x^2+a^2} = \frac{a}{\cos t} \quad \text{και} \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t}\,dt.$$

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx,$$

αν θέσουμε $x = \tan t$, τότε $dx = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt$ και $\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\cos t}$, και αναγόμαστε στο

$$\int \frac{1}{\cos t}\frac{1}{\tan^4 t}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{\cos t}{\sin^4 t}\,dt = -\frac{2}{3\sin^3 t} + c.$$

Αφού $t = \arctan x$, βλέπουμε ότι $\sin t = \tan t\cos t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ και τελικά παίρνουμε

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx = -\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3x^3} + c.$$

6.2 Ολοκλήρωση κατά μέρη

Ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη είναι:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

και προκύπτει άμεσα από την $(fg)' = fg' + f'g$, αν ολοκληρώσουμε τα δύο μέλη της. Συχνά, είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος.

Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του $\int x\log x\,dx$ γράφουμε

$$\int x\log x\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2)'\log x\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4} + c.$$

(β) Για τον υπολογισμό του $\int x\cos x\,dx$ γράφουμε

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c.$$

(γ) Για τον υπολογισμό του $\int e^x\sin x\,dx$ γράφουμε

$$\begin{aligned} I = \int e^x\sin x\,dx &= \int (e^x)'\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx \\ &= e^x\sin x - \int (e^x)'\cos x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x + \int e^x(\cos x)'dx \\ &= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) - I. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int e^x\sin x\,dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + c.$$

(δ) Για τον υπολογισμό του $\int x\sin^2 x\,dx$ χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ γράφουμε

$$\int x\sin^2 x\,dx = \int \frac{x}{2}\,dx - \int x\frac{\cos(2x)}{2}\,dx.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $u = 2x$ και ολοκλήρωση κατά μέρη όπως στο (β).

(ε) Για τον υπολογισμό του $\int \log(x+\sqrt{x})\,dx$ γράφουμε

$$\int \log(x+\sqrt{x})\,dx = \int (x)'\log(x+\sqrt{x})\,dx = x\log(x+\sqrt{x}) - \int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.$$

Κατόπιν, εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \sqrt{x}$.

6.3 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Σε αυτή την παράγραφο περιγράφουμε μια μέθοδο με την οποία μπορεί κανείς να υπολογίσει το αόριστο ολοκλήρωμα οποιασδήποτε ρητής συνάρτησης

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}. \tag{6.3.1}$$

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι $n < m$. Αν ο βαθμός n του αριθμητή $p(x)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον βαθμό m του παρονομαστή $q(x)$, τότε διαιρούμε το $p(x)$ με το $q(x)$: υπάρχουν πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ ώστε ο βαθμός του $\upsilon(x)$ να είναι μικρότερος από m και

$$p(x) = \pi(x)q(x) + \upsilon(x). \tag{6.3.2}$$

Τότε,

$$f(x) = \frac{\pi(x)q(x)+\upsilon(x)}{q(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{q(x)}. \tag{6.3.3}$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό του $\int f(x)\,dx$ μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε χωριστά το $\int \pi(x)\,dx$ (απλό ολοκλήρωμα πολυωνυμικής συνάρτησης) και το $\int \frac{\upsilon(x)}{q(x)}\,dx$ (ρητή συνάρτηση με την πρόσθετη ιδιότητα ότι $\deg(\upsilon) < \deg(q)$).

Υποθέτουμε λοιπόν στη συνέχεια ότι $f = p/q$ και $\deg(p) < \deg(q)$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $a_n = b_m = 1$. Χρησιμοποιούμε τώρα το γεγονός ότι κάθε πολυώνυμο αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων όρων. Το $q(x) = x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ γράφεται στη μορφή

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}\cdots(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}. \tag{6.3.4}$$

Οι $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ είναι οι πραγματικές ρίζες του $q(x)$ (και r_j είναι η πολλαπλότητα της ρίζας α_j) ενώ οι όροι $x^2+\beta_i x+\gamma_i$ είναι τα γινόμενα $(x-z_i)(x-\overline{z_i})$ όπου z_i οι μιγαδικές ρίζες του $q(x)$ (και s_i είναι η πολλαπλότητα της ρίζας z_i). Παρατηρήστε ότι κάθε όρος της μορφής $x^2+\beta_i x+\gamma_i$ έχει αρνητική διακρίνουσα. Επίσης, οι $k, s \geq 0$ και $r_1+\cdots+r_k+2s_1+\cdots+2s_l = m$ (ο βαθμός του $q(x)$).

Γράφουμε την $f(x)$ στη μορφή

$$f(x) = \frac{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}\cdots(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}}, \tag{6.3.5}$$

και την «αναλύουμε σε απλά κλάσματα»: υπάρχουν συντελεστές A_{jt}, B_{it}, Γ_{it} ώστε

$$\begin{aligned} f(x) \;\; = \;\; & \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}} \\ & + \cdots \\ & + \frac{A_{k1}}{x-\alpha_k} + \frac{A_{k2}}{(x-\alpha_k)^2} + \cdots + \frac{A_{kr_1}}{(x-\alpha_k)^{r_k}} \\ & + \frac{B_{11}x+\Gamma_{11}}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \frac{B_{12}x+\Gamma_{12}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1s_1}x+\Gamma_{1s_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}} \\ & + \cdots \\ & + \frac{B_{l1}x+\Gamma_{l1}}{x^2+\beta_l x+\gamma_l} + \frac{B_{l2}x+\Gamma_{l2}}{(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^2} + \cdots + \frac{B_{ls_1}x+\Gamma_{ls_l}}{(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}}. \end{aligned}$$

Η εύρεση των συντελεστών γίνεται ως εξής: πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της ισότητας με το $q(x)$ (παρατηρήστε ότι ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών του δεξιού μέλους). Προκύπτει τότε μια ισότητα πολυωνύμων. Εξισώνοντας τους συντελεστές τους, παίρνουμε ένα σύστημα m εξισώσεων με m αγνώστους: τους $A_{j1}, \ldots, A_{jr_j}$, $B_{i1}, \ldots, B_{is_i}$, $\Gamma_{i1}, \ldots, \Gamma_{is_i}$, $j = 1, \ldots, k$, $i = 1, \ldots, l$.

Μετά από αυτό το βήμα, χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του ολοκληρώματος, αναγόμαστε στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων των εξής δύο μορφών:

(α) Ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}dx$. Αυτά υπολογίζονται άμεσα: αν $k \geq 2$ τότε

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = -\frac{1}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} + c, \tag{6.3.6}$$

και αν $k = 1$ τότε

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \ln|x-\alpha| + c. \tag{6.3.7}$$

(β) Ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+bx+\gamma)^k}dx$, όπου το $x^2 + bx + \gamma$ έχει αρνητική διακρίνουσα. Γράφοντας $Bx + \Gamma = \frac{B}{2}(2x + b) + \left(\Gamma - \frac{Bb}{2}\right)$, αναγόμαστε στα ολοκληρώματα

$$\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+\gamma)^k}dx \;\; \text{και} \;\; \int \frac{1}{(x^2+bx+\gamma)^k}\,dx. \tag{6.3.8}$$

Το πρώτο υπολογίζεται με την αντικατάσταση $y = x^2 + bx + \gamma$ (εξηγήστε γιατί). Για το δεύτερο, γράφουμε πρώτα $x^2+bx+\gamma = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4\gamma-b^2}{4}$ και με την αντικατάσταση $x + \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{4\gamma-b^2}}{2}y$ αναγόμαστε (εξηγήστε γιατί) στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy. \tag{6.3.9}$$

Ο υπολογισμός του I_k βασίζεται στην αναδρομική σχέση

$$I_{k+1} = \frac{1}{2k}\frac{y}{(y^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k}I_k. \tag{6.3.10}$$

Για την απόδειξη της (6.3.10) χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά μέρη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
I_k = \int \frac{dx}{(y^2+1)^k} &= \int (y)'\frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy = \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(y^2+1)^{k+1}}\,dy \\
&= \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2k\int \frac{y^2+1-1}{(y^2+1)^{k+1}}\,dy \\
&= \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2k\int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy - 2k\int \frac{1}{(y^2+1)^{k+1}}\,dy \\
&= \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2kI_k - 2kI_{k+1}.
\end{aligned}$$

Έπεται το ζητούμενο. Γνωρίζουμε ότι

$$I_1 = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan y + c, \tag{6.3.11}$$

άρα, χρησιμοποιώντας την (6.3.10), μπορούμε διαδοχικά να βρούμε τα $I_2, I_3, \ldots$.

Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{3x^2+6}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int \frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)}\,dx,$$

ζητάμε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)} &= \frac{a(x-1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)} \\
&= \frac{(a+b+c)x^2 + (a+2b-c)x - 2a}{x(x-1)(x+2)},
\end{aligned}$$

και λύνουμε το σύστημα

$$a+b+c = 3, \qquad a+2b-c = 0, \qquad -2a = 6.$$

Η λύση είναι: $a = -3$, $b = 3$ και $c = 3$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)}\,dx &= -3\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x+2} \\
&= -3\ln|x| + 3\ln|x-1| + 3\ln|x+2| + c.
\end{aligned}$$

(β) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}\,dx = \int \frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2}\,dx,$$

ζητάμε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{a(x+2)^2+b(x-1)(x+2)+c(x-1)}{(x-1)(x+2)^2} \\
&= \frac{(a+b)x^2+(4a+b+c)x+(4a-2b-c)}{(x-1)(x+2)^2},
\end{aligned}$$

και λύνουμε το σύστημα

$$a+b=5, \qquad 4a+b+c=12, \qquad 4a-2b-c=1.$$

Η λύση είναι: $a=2$, $b=3$ και $c=1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2}\,dx &= 2\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{(x+2)^2} \\
&= 2\ln|x-1| + 3\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + c.
\end{aligned}$$

(γ) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{x+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx,$$

ζητάμε $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2}.$$

Καταλήγουμε στην

$$x+1 = a(x^2+1)^2 + (bx+c)(x-1)(x^2+1) + (dx+e)(x-1)$$

και λύνουμε το σύστημα

$$a+b=0, \quad -b+c=0, \quad 2a+b-c+d=0, \quad -b+c-d+e=1, \quad a-c-e=1.$$

Η λύση είναι: $a=1/2$, $b=-1/2$, $c=-1/2$, $d=-1$ και $e=0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| - \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + c.
\end{aligned}$$

6.4 Κάποιες χρήσιμες αντικαταστάσεις

6.4α′ Ρητές συναρτήσεις των $\cos x$ και $\sin x$

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx$$

όπου $R(u, v)$ είναι πηλίκο πολυωνύμων με μεταβλητές u και v, συχνά χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση

$$u = \tan \frac{x}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

και

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2u}{1 + u^2}.$$

Επίσης, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1+\tan^2 \frac{x}{2}}{2}$, δηλαδή

$$dx = \frac{2du}{1 + u^2}.$$

Έτσι, αναγόμαστε στο ολοκλήρωμα

$$\int R\left(\frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \frac{2u}{1 + u^2}\right) \frac{2}{1 + u^2}\, du.$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση $F(u) = R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right) \frac{2}{1+u^2}$ είναι ρητή συνάρτηση του u, το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τη μέθοδο που περιγράψαμε στην Παράγραφο 6.3.

Παραδείγματα.

(α) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}\, dx$$

θέτουμε $u = \tan \frac{x}{2}$. Αφού $dx = \frac{2}{1+u^2} du$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ και $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, αναγόμαστε στο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{(1 + u)^2}{u^2(1 + u^2)}\, du,$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(α) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{x}{1 + \sin x}\, dx$$

θέτουμε $u = \tan\frac{x}{2}$. Αφού $dx = \frac{2}{1+u^2}du$ και $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, αναγόμαστε στο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
\int 2\arctan u \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\,du &= 4\int \arctan u \frac{1}{(1+u)^2}\,du \\
&= 4\int \arctan u \left(-\frac{1}{1+u}\right)'\,du \\
&= -4\frac{\arctan u}{1+u} + 4\int \frac{1}{(1+u^2)(1+u)}\,du.
\end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

6.4β΄ Ολοκληρώματα αλγεβρικών συναρτήσεων ειδικής μορφής

Περιγράφουμε εδώ κάποιες αντικαταστάσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int R(x,\sqrt{1-x^2})\,dx, \qquad \int R(x,\sqrt{x^2-1})\,dx, \qquad \int R(x,\sqrt{x^2+1})\,dx,$$

όπου $R(u,v)$ είναι πηλίκο πολυωνύμων με μεταβλητές u και v.

(α) Για το ολοκλήρωμα $\int R(x,\sqrt{1-x^2})\,dx$, κάνουμε πρώτα την αλλαγή μεταβλητής $x = \sin t$. Αφού $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ και $dx = \cos t\,dt$, αναγόμαστε στο ολοκλήρωμα

$$\int R(\sin t, \cos t)\cos t\,dt,$$

το οποίο υπολογίζεται με την αντικατάσταση της προηγούμενης υποπαραγράφου (ρητή συνάρτηση των $\cos t$ και $\sin t$).

(β) Για το ολοκλήρωμα $\int R(x,\sqrt{x^2-1})\,dx$, μια ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{1}{\cos t}$. Τότε, $\sqrt{x^2-1} = \frac{\sin t}{\cos t}$ και $dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$. Αναγόμαστε έτσι στο ολοκλήρωμα

$$\int R\left(\frac{1}{\sin t}, \frac{\sin t}{\cos t}\right)\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \int R_1(\cos t, \sin t)\,dt$$

για κάποια ρητή συνάρτηση $R_1(u,v)$, το οποίο υπολογίζεται με την αντικατάσταση της προηγούμενης υποπαραγράφου (ρητή συνάρτηση των $\cos t$ και $\sin t$).

Είναι όμως προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε την εξής αλλαγή μεταβλητής:

$$u = x + \sqrt{x^2-1}.$$

Τότε,

$$x = \frac{u^2+1}{2u}, \qquad \sqrt{x^2-1} = \frac{u^2-1}{2u}, \qquad dx = \frac{u^2-1}{2u^2}\,du.$$

Αναγόμαστε έτσι στο ρητό ολοκλήρωμα

$$\int R\left(\frac{u^2+1}{2u}, \frac{u^2-1}{2u}\right)\frac{u^2-1}{2u^2}\,du$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(β) Για το ολοκλήρωμα $\int R(x, \sqrt{x^2+1})\,dx$, μια ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = -\cot t$. Τότε, $\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{\sin t}$ και $dx = \frac{1}{\sin^2 t}\,dt$. Αναγόμαστε έτσι στο ολοκλήρωμα

$$\int R\left(-\frac{\cos t}{\sin t}, \frac{1}{\sin t}\right)\frac{1}{\sin^2 t}\,dt = \int R_1(\cos t, \sin t)\,dt$$

για κάποια ρητή συνάρτηση $R_1(u,v)$, το οποίο υπολογίζεται με την αντικατάσταση της προηγούμενης υποπαραγράφου (ρητή συνάρτηση των $\cos t$ και $\sin t$).

Είναι όμως προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε την εξής αλλαγή μεταβλητής:

$$u = x + \sqrt{x^2+1}.$$

Τότε,

$$x = \frac{u^2-1}{2u}, \qquad \sqrt{x^2-1} = \frac{u^2+1}{2u}, \qquad dx = \frac{u^2+1}{2u^2}\,du.$$

Αναγόμαστε έτσι στο ρητό ολοκλήρωμα

$$\int R\left(\frac{u^2-1}{2u}, \frac{u^2+1}{2u}\right)\frac{u^2+1}{2u^2}\,du$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx$$

θέτουμε $x^2-1 = (x-u)^2$. Ισοδύναμα, $x = \frac{u^2+1}{2u}$. Τότε, $dx = \frac{u^2-1}{2u^2}\,du$ και $x-u = \frac{1-u^2}{2u}$, οπότε αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{-(u^2-1)^2}{4u^3}\,du.$$

(β) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

θέτουμε $u = x + \sqrt{x^2+1}$. Τότε,

$$x = \frac{u^2-1}{2u}, \qquad \sqrt{x^2-1} = \frac{u^2+1}{2u}, \qquad dx = \frac{u^2+1}{2u^2}\,du.$$

Αναγόμαστε έτσι στο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{2}{u^2-1}\,du$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.