Κεφάλαιο 8

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

8.1 Ορισμός

Σε αυτό το κεφάλαιο, με I συμβολίζουμε ένα (κλειστό, ανοικτό ή ημιανοικτό, πεπερασμένο ή άπειρο) διάστημα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Στο επόμενο Λήμμα περιγράφουμε τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $[a, b]$.

Λήμμα 8.1.1. *Αν $a < b$ στο $\mathbb{R}$ τότε*

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb : 0 \leq t \leq 1\}. \tag{8.1.1}$$

Ειδικότερα, για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b. \tag{8.1.2}$$

Απόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι, για κάθε $t \in [0, 1]$ ισχύει

$$a \leq (1-t)a + tb = a + t(b-a) \leq b, \tag{8.1.3}$$

δηλαδή

$$\{(1-t)a + tb : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq [a, b]. \tag{8.1.4}$$

Αντίστροφα, κάθε $x \in [a, b]$ γράφεται στη μορφή

$$x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b. \tag{8.1.5}$$

Παρατηρώντας ότι $t := (x-a)/(b-a) \in [0, 1]$ και $1 - t = (b-x)/(b-a)$, βλέπουμε ότι

$$[a, b] \subseteq \{(1-t)a + tb : 0 \leq t \leq 1\}. \tag{8.1.6}$$

Τα σημεία $(1-t)a + tb$ του $[a, b]$ λέγονται *κυρτοί συνδυασμοί* των a και b. $\square$

Ορισμός 8.1.2. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.

(α) Η f λέγεται *κυρτή* αν

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b) \tag{8.1.7}$$

για κάθε $a, b \in I$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $0 < t < 1$ (παρατηρήστε ότι, αφού το I είναι διάστημα, το Λήμμα 8.1.1 δείχνει ότι το σημείο $(1-t)a+tb \in [a,b] \subseteq I$, δηλαδή η f ορίζεται καλά σε αυτό). Η γεωμετρική σημασία του ορισμού είναι η εξής: η χορδή που έχει σαν άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ δεν είναι πουθενά κάτω από το γράφημα της f.

(β) Η f λέγεται *γνησίως κυρτή* αν είναι κυρτή και έχουμε γνήσια ανισότητα στην (8.1.7) για κάθε $a < b$ στο I και για κάθε $0 < t < 1$.

(γ) Η $f : I \to \mathbb{R}$ λέγεται *κοίλη* (αντίστοιχα, γνησίως κοίλη) αν η $-f$ είναι κυρτή (αντίστοιχα, γνησίως κυρτή).

Παρατήρηση 8.1.3. Ισοδύναμοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να περιγραφεί η κυρτότητα της $f : I \to \mathbb{R}$ είναι οι εξής:

(α) Αν $a, b, x \in I$ και $a < x < b$, τότε

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b). \tag{8.1.8}$$

Παρατηρήστε ότι το δεξιό μέλος αυτής της ανισότητας ισούται με

$$f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \tag{8.1.9}$$

(β) Αν $a, b \in I$ και αν $t, s > 0$ με $t+s=1$, τότε

$$f(ta+sb) \leq tf(a)+sf(b). \tag{8.1.10}$$

8.2 Κυρτές συναρτήσεις ορισμένες σε ανοικτό διάστημα

Σε αυτή την Παράγραφο μελετάμε ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα μια κυρτή συνάρτηση που ορίζεται σε ανοικτό διάστημα. Όλα τα αποτελέσματα που θα αποδείξουμε είναι συνέπειες του ακόλουθου «λήμματος των τριών χορδών»:

Πρόταση 8.2.1 (το λήμμα των τριών χορδών). *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $y < x < z$ στο (a,b), τότε*

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{8.2.1}$$

Απόδειξη. Αφού η f είναι κυρτή, έχουμε

$$f(x) \leq \frac{z-x}{z-y}f(y)+\frac{x-y}{z-y}f(z). \tag{8.2.2}$$

Από αυτή την ανισότητα βλέπουμε ότι

$$f(x)-f(y) \leq \frac{y-x}{z-y}f(y)+\frac{x-y}{z-y}f(z) = \frac{x-y}{z-y}[f(z)-f(y)], \tag{8.2.3}$$

το οποίο αποδεικνύει την αριστερή ανισότητα στην (8.2.1). Ξεκινώντας πάλι από την (8.2.2), γράφουμε

$$f(x)-f(z)\leq \frac{z-x}{z-y}f(y)+\frac{x-z}{z-y}f(z)=-\frac{z-x}{z-y}[f(z)-f(y)], \tag{8.2.4}$$

απ' όπου προκύπτει η δεξιά ανισότητα στην (8.2.1). □

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την εξής απλή συνέπεια του λήμματος των τριών χορδών.

Λήμμα 8.2.2. *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $y<x<z<w$ στο (a,b), τότε*

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq\frac{f(w)-f(z)}{w-z}. \tag{8.2.5}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 8.2.1 για τα σημεία $y<x<z$, παίρνουμε

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq\frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{8.2.6}$$

Εφαρμόζοντας πάλι την Πρόταση 8.2.1 για τα σημεία $x<z<w$, παίρνουμε

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(w)-f(z)}{w-z}. \tag{8.2.7}$$

Έπεται το συμπέρασμα. □

Θεώρημα 8.2.3. *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $x\in(a,b)$, τότε υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι*

$$f'_-(x)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\quad \textit{και}\quad f'_+(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{8.2.8}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι υπάρχει η δεξιά πλευρική παράγωγος $f'_+(x)$ (με τον ίδιο τρόπο δουλεύουμε για την αριστερή πλευρική παράγωγο $f'_-(x)$). Θεωρούμε τη συνάρτηση $g_x:(x,b)\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$g_x(z):=\frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{8.2.9}$$

Η g_x είναι αύξουσα: αν $x<z_1<z_2<b$, το λήμμα των τριών χορδών δείχνει ότι

$$g_x(z_1)=\frac{f(z_1)-f(x)}{z_1-x}\leq\frac{f(z_2)-f(x)}{z_2-x}=g_x(z_2). \tag{8.2.10}$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε τυχόν $y\in(a,x)$, το λήμμα των τριών χορδών (για τα $y<x<z$) δείχνει ότι

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=g_x(z) \tag{8.2.11}$$

για κάθε $z\in(x,b)$, δηλαδή η g_x είναι κάτω φραγμένη. Άρα, υπάρχει το

$$\lim_{z\to x^+}g_x(z)=\lim_{z\to x^+}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{8.2.12}$$

Δηλαδή, υπάρχει η δεξιά πλευρική παράγωγος $f'_+(x)$. □

Θεώρημα 8.2.4. *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Οι πλευρικές παράγωγοι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες στο (a,b) και $f'_-\leq f'_+$ στο (a,b).*

Απόδειξη. Έστω $x<y$ στο (a,b). Για αρκετά μικρό θετικό h έχουμε $x\pm h, y\pm h\in (a,b)$ και $x+h<y-h$. Από την Πρόταση 8.2.1 και από το Λήμμα 8.2.2 βλέπουμε ότι
(8.2.13)
$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\leq\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\leq\frac{f(y)-f(y-h)}{h}\leq\frac{f(y+h)-f(y)}{h}.$$

Παίρνοντας όρια καθώς $h\to 0^+$, συμπεραίνουμε ότι

$$f'_-(x)\leq f'_+(x)\leq f'_-(y)\leq f'_+(y). \tag{8.2.14}$$

Οι ανισότητες $f'_-(x)\leq f'_-(y)$ και $f'_+(x)\leq f'_+(y)$ δείχνουν ότι οι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες στο (a,b). Η αριστερή ανισότητα στην (8.2.14) δείχνει ότι $f'_-\leq f'_+$ στο (a,b). □

Η ύπαρξη των πλευρικών παραγώγων εξασφαλίζει ότι κάθε κυρτή συνάρτηση $f:I\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο εσωτερικό του I:

Θεώρημα 8.2.5. *Κάθε κυρτή συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $x\in(a,b)$. Τότε, για μικρά $h>0$ έχουμε $x+h, x-h\in(a,b)$ και

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h\to f(x)+f'_+(x)\cdot 0=f(x) \tag{8.2.15}$$

όταν $h\to 0^+$, ενώ, τελείως ανάλογα,

$$f(x-h)=f(x)+\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\cdot(-h)\to f(x)+f'_-(x)\cdot 0=f(x) \tag{8.2.16}$$

όταν $h\to 0^+$. Άρα, η f είναι συνεχής στο x. □

8.3 Παραγωγίσιμες κυρτές συναρτήσεις

Στον Απειροστικό Λογισμό Ι δόθηκε ένας διαφορετικός ορισμός της κυρτότητας για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in(a,b)$, θεωρήσαμε την εφαπτομένη

$$u=f(x)+f'(x)(u-x) \tag{8.3.1}$$

του γραφήματος της f στο $(x,f(x))$ και είπαμε ότι η f είναι *κυρτή* στο (a,b) αν για κάθε $x\in(a,b)$ και για κάθε $y\in(a,b)$ έχουμε

$$f(y)\geq f(x)+f'(x)(y-x). \tag{8.3.2}$$

Δηλαδή, αν το γράφημα $\{(y,f(y)):\, a<y<b\}$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι, αν περιοριστούμε στην κλάση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οι «δύο ορισμοί» συμφωνούν.

Θεώρημα 8.3.1. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι κυρτή.*

(β) *Η f' είναι αύξουσα.*

(γ) *Για κάθε $x, y \in (a,b)$ ισχύει η*

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x). \tag{8.3.3}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι κυρτή. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, έχουμε $f' = f'_- = f'_+$ στο (a,b). Από το Θεώρημα 8.2.4 οι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες, άρα η f' είναι αύξουσα.

Υποθέτουμε τώρα ότι η f' είναι αύξουσα. Έστω $x, y \in (a,b)$. Αν $x < y$, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x,y]$, βρίσκουμε $\xi \in (x,y)$ ώστε $f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x)$. Αφού $\xi > x$ και η f' είναι αύξουσα, έχουμε $f'(\xi) \geq f'(x)$. Αφού $y - x > 0$, έπεται ότι

$$f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x) \geq f(x) + f'(x)(y-x). \tag{8.3.4}$$

Αν $x > y$, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[y,x]$, βρίσκουμε $\xi \in (y,x)$ ώστε $f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x)$. Αφού $\xi < x$ και η f' είναι αύξουσα, έχουμε $f'(\xi) \leq f'(x)$. Αφού $y - x < 0$, έπεται πάλι ότι

$$f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x) \geq f(x) + f'(x)(y-x). \tag{8.3.5}$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι η (8.3.3) ισχύει για κάθε $x, y \in (a,b)$ και θα δείξουμε ότι η f είναι κυρτή. Έστω $x < y$ στο (a,b) και έστω $0 < t < 1$. Θέτουμε $z = (1-t)x + ty$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση για τα ζευγάρια x, z και y, z, παίρνουμε

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x-z) \quad \text{και} \quad f(y) \geq f(z) + f'(z)(y-z). \tag{8.3.6}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} (1-t)f(x) + tf(y) &\geq (1-t)f(z) + tf(z) + f'(z)[(1-t)(x-z) + t(y-z)] \\ &= f(z) + f'(z)[(1-t)x + ty - z] \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Δηλαδή, $(1-t)f(x) + tf(y) \geq f((1-t)x + ty)$. □

Στην περίπτωση που η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b), η ισοδυναμία των (α) και (β) στο Θεώρημα 8.3.1 δίνει έναν απλό χαρακτηρισμό της κυρτότητας μέσω της δεύτερης παραγώγου.

Θεώρημα 8.3.2. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η f είναι κυρτή αν και μόνο αν $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$.*

Απόδειξη. Η f' είναι αύξουσα αν και μόνο αν $f'' \geq 0$ στο (a,b). Όμως, στο Θεώρημα 8.3.1 είδαμε ότι η f' είναι αύξουσα αν και μόνο αν η f είναι κυρτή. □

8.4 Ανισότητα του Jensen

Η *ανισότητα του Jensen* αποδεικνύεται με επαγωγή και «γενικεύει» την ανισότητα του ορισμού της κυρτής συνάρτησης.

Πρόταση 8.4.1 (ανισότητα του Jensen). *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $x_1, \ldots, x_m \in I$ και $t_1, \ldots, t_m \geq 0$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε $\sum_{i=1}^{m} t_i x_i \in I$ και*

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_mx_m) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_mf(x_m). \tag{8.4.1}$$

Απόδειξη. Έστω $a = \min\{x_1, \ldots, x_m\}$ και $b = \max\{x_1, \ldots, x_m\}$. Αφού το I είναι διάστημα και $a, b \in I$, συμπεραίνουμε ότι $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq [a, b] \subseteq I$. Αφού $t_i \geq 0$ και $t_1 + \cdots + t_m = 1$, έχουμε

$$a = (t_1 + \cdots + t_m)a \leq t_1x_1 + \cdots + t_mx_m \leq (t_1 + \cdots + t_m)b = b, \tag{8.4.2}$$

δηλαδή, $t_1x_1 + \cdots + t_mx_m \in I$.

Θα δείξουμε την (8.4.1) με επαγωγή ως προς m. Για $m = 1$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, ενώ για $m = 2$ η (8.4.1) ικανοποιείται από τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης.

Για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι $m \geq 2$, $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1} \in I$ και $t_1, \ldots, t_m, t_{m+1} \geq 0$ με $t_1 + \cdots + t_m + t_{m+1} = 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάποιος $t_i < 1$ (αλλιώς, η ανισότητα ισχύει τετριμμένα). Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $t_{m+1} < 1$. Θέτουμε $t = t_1 + \cdots + t_m = 1 - t_{m+1} > 0$. Αφού $x_1, \ldots, x_m \in I$ και $\frac{t_1}{t} + \cdots + \frac{t_m}{t} = 1$, η επαγωγική υπόθεση μας δίνει

$$x = \frac{t_1}{t}x_1 + \cdots + \frac{t_m}{t}x_m \in I \tag{8.4.3}$$

και

$$tf(x) = tf\left(\frac{t_1}{t}x_1 + \cdots + \frac{t_m}{t}x_m\right) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_mf(x_m). \tag{8.4.4}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης, παίρνουμε

$$f(tx + t_{m+1}x_{m+1}) \leq tf(x) + t_{m+1}f(x_{m+1}). \tag{8.4.5}$$

Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες ανισότητες, έχουμε

$$\begin{aligned} f(t_1x_1 + \cdots + t_mx_m + t_{m+1}x_{m+1}) &= f(tx + t_{m+1}x_{m+1}) \\ &\leq t_1f(x_1) + \cdots + t_mf(x_m) \\ &\quad + t_{m+1}f(x_{m+1}). \end{aligned}$$

□

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Jensen θα δείξουμε κάποιες κλασικές ανισότητες. Η πρώτη από αυτές γενικεύει την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου.

Ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. *Έστω $x_1, \ldots, x_n$ και $r_1, \ldots, r_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $r_1 + \cdots + r_n = 1$. Τότε,*

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{r_i} \leq \sum_{i=1}^{n} r_i x_i. \tag{8.4.6}$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $x \mapsto \ln x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$. Αφού $r_i > 0$ και $r_1 + \cdots + r_n = 1$, η ανισότητα του Jensen (για την κυρτή συνάρτηση $-\ln$) δείχνει ότι

$$r_1 \ln x_1 + \cdots + r_n \ln x_n \leq \ln(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n). \tag{8.4.7}$$

Δηλαδή,

$$\ln(x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}) \leq \ln(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n). \tag{8.4.8}$$

Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι η εκθετική συνάρτηση $x \mapsto e^x$ είναι αύξουσα. □

Ειδικές περιπτώσεις της προηγούμενης ανισότητας είναι οι εξής:

(α) Η κλασική ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \tag{8.4.9}$$

όπου $x_1, \ldots, x_n > 0$, η οποία προκύπτει από την (8.4.6) αν πάρουμε $r_1 = \cdots = r_n = \frac{1}{n}$.

(β) Η **ανισότητα του Young**: *Αν $x, y > 0$ και $t, s > 0$ με $t + s = 1$, τότε*

$$x^t y^s \leq tx + sy. \tag{8.4.10}$$

Η (8.4.10) εμφανίζεται πολύ συχνά στην εξής μορφή: *αν $x, y > 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{8.4.11}$$

Πράγματι, αρκεί να πάρουμε τους x^p, y^q στη θέση των x, y και τους $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}$ στη θέση των t, s. Οι p και q λέγονται *συζυγείς εκθέτες*. Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα μπορούμε να δείξουμε την κλασική **ανισότητα του Hölder**: *Έστω p, q συζυγείς εκθέτες. Αν $a_1, \ldots, a_n$ και $b_1, \ldots, b_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}. \tag{8.4.12}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $A = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}$, $B = \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$ και $x_i = a_i/A$, $y_i = b_i/B$. Τότε, η ζητούμενη ανισότητα (8.4.12) παίρνει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 1. \tag{8.4.13}$$

Από την (8.4.11) έχουμε

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q} \right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n x_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n y_i^q. \tag{8.4.14}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i=1}^n x_i^p = \frac{1}{A^p} \sum_{i=1}^n a_i^p = 1 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^n y_i^q = \frac{1}{B^q} \sum_{i=1}^n b_i^q = 1. \tag{8.4.15}$$

Άρα,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{q} \cdot 1 = 1. \tag{8.4.16}$$

Έπεται η (8.4.12). □.

Επιλέγοντας $p = q = 2$ παίρνουμε την **ανισότητα Cauchy-Schwarz**: *αν* $a_1, \ldots, a_n$ *και* $b_1, \ldots, b_n$ *είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{1/2}. \tag{8.4.17}$$