Κεφάλαιο 2

Σειρές πραγματικών αριθμών

2.1 Σύγκλιση σειράς

Ορισμός 2.1.1. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε την ακολουθία

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n. \tag{2.1.1}$$

Δηλαδή,

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots \tag{2.1.2}$$

Το σύμβολο $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι η *σειρά* με k-οστό όρο τον a_k. Το άθροισμα $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ είναι το *n-οστό μερικό άθροισμα* της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και η (s_n) είναι η *ακολουθία των μερικών αθροισμάτων* της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Αν η (s_n) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό s, τότε γράφουμε

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{ή} \quad s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{2.1.3}$$

και λέμε ότι η σειρά *συγκλίνει* (στο s), το δε όριο $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ είναι το *άθροισμα* της σειράς.

Αν $s_n \to +\infty$ ή αν $s_n \to -\infty$, τότε γράφουμε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ ή $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$ και λέμε ότι *η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$* αντίστοιχα.

Αν η (s_n) δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, τότε λέμε ότι *η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.*

Παρατηρήσεις 2.1.2. (α) Πολλές φορές εξετάζουμε τη σύγκλιση σειρών της μορφής $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ή $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ όπου $m \geq 2$. Σε αυτήν την περίπτωση θέτουμε $s_{n+1} = a_0 + a_1 +$

$\cdots + a_n$ ή $s_{n-m+1} = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$ (για $n \geq m$) αντίστοιχα, και εξετάζουμε τη σύγκλιση της ακολουθίας (s_n).

(β) Από τους ορισμούς που δώσαμε είναι φανερό ότι για να εξετάσουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση μιας σειράς, απλώς εξετάζουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση μιας ακολουθίας (της ακολουθίας (s_n) των μερικών αθροισμάτων της σειράς). Ο n-οστός όμως όρος της ακολουθίας (s_n) είναι ένα «άθροισμα με ολοένα αυξανόμενο μήκος», το οποίο αδυνατούμε (συνήθως) να γράφουμε σε κλειστή μορφή. Συνεπώς, η εύρεση του ορίου $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ (όταν αυτό υπάρχει) είναι πολύ συχνά ανέφικτη. Σκοπός μας είναι λοιπόν να αναπτύξουμε κάποια κριτήρια τα οποία να μας επιτρέπουν (τουλάχιστον) να πούμε αν η (s_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό ή όχι.

Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα, θα δούμε κάποιες απλές προτάσεις που θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα στη συνέχεια.

Αν έχουμε δύο σειρές $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, μπορούμε να σχηματίσουμε τον γραμμικό συνδυασμό τους $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 2.1.3. *Αν* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$ *και* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = t$, *τότε*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda s + \mu t = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{2.1.4}$$

Απόδειξη. Αν $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ και $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k)$ είναι τα n-οστά μερικά αθροίσματα των σειρών, τότε $u_n = \lambda s_n + \mu t_n$. Αυτό προκύπτει εύκολα από τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αφού έχουμε αθροίσματα με πεπερασμένους το πλήθος όρους. Όμως, $s_n \to s$ και $t_n \to t$, άρα $u_n \to \lambda s + \mu t$. Από τον ορισμό του αθροίσματος σειράς έπεται η (2.1.4). □

Πρόταση 2.1.4. (α) *Αν απαλείψουμε πεπερασμένο πλήθος «αρχικών» όρων μιας σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή απόκλισή της.*

(β) *Αν αλλάξουμε πεπερασμένους το πλήθος όρους μιας σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή απόκλισή της.*

Απόδειξη. (α) Θεωρούμε τη σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Με τη φράση «απαλείφουμε τους αρχικούς όρους $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$» εννοούμε ότι θεωρούμε την καινούργια σειρά $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$. Αν συμβολίσουμε με s_n και t_n τα n-οστά μερικά αθροίσματα των δύο σειρών αντιστοίχως, τότε για κάθε $n \geq m$ έχουμε

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + a_m + \cdots + a_n = a_1 + \cdots + a_{m-1} + t_{n-m+1}. \tag{2.1.5}$$

Άρα η (s_n) συγκλίνει αν και μόνον αν η (t_{n-m+1}) συγκλίνει, δηλαδή αν και μόνον αν η (t_n) συγκλίνει. Επίσης, αν $s_n \to s$ και $t_n \to t$, τότε $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + t$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \cdots + a_{m-1} + \sum_{k=m}^{\infty} a_k. \tag{2.1.6}$$

(β) Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Αλλάζουμε πεπερασμένους το πλήθος όρους της (a_k). Θεωρούμε δηλαδή μια νέα σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ που όμως έχει την εξής ιδιότητα: υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $a_k = b_k$ για κάθε $k \geq m$. Αν απαλείψουμε τους πρώτους $m-1$ όρους των δύο σειρών, προκύπτει η ίδια σειρά $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$. Τώρα, εφαρμόζουμε το (α). □

Πρόταση 2.1.5. (α) *Αν* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, *τότε* $a_n \to 0$.

(β) *Αν η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει, τότε για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *ώστε: για κάθε* $n \geq N$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon. \tag{2.1.7}$$

Απόδειξη. (α) Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, τότε $s_n \to s$ και $s_{n-1} \to s$. Άρα,

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0. \tag{2.1.8}$$

Στην πραγματικότητα, αυτό που κάνουμε εδώ είναι να θεωρήσουμε μια δεύτερη ακολουθία (t_n) η οποία ορίζεται ως εξής: δίνουμε αυθαίρετη τιμή στον t_1 – για παράδειγμα, $t_1 = 0$ – και για κάθε $n \geq 2$ θέτουμε $t_n = s_{n-1}$. Τότε, $t_n \to s$ (άσκηση) και για κάθε $n \geq 2$ έχουμε $a_n = s_n - t_n \to s - s = 0$ (εξηγήστε την πρώτη ισότητα).

Ένας άλλος τρόπος για να αποδείξουμε ότι $a_n \to 0$ είναι με τον ορισμό. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $s_n \to s$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_1$. Θέτουμε $n_0 = n_1 + 1$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $n \geq n_1$ και $n - 1 \geq n_1$. Συνεπώς, $|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|s - s_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2}$, απ' όπου έπεται ότι

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| \leq |s_n - s| + |s - s_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Με βάση τον ορισμό, $a_n \to 0$.

(β) Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, τότε από την (2.1.6) έχουμε

$$\beta_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = s - s_n \to 0 \tag{2.1.9}$$

καθώς το $n \to \infty$. Από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq N$, $|\beta_n| < \varepsilon$. □

Σημείωση. Το μέρος (α) της Πρότασης 2.1.5 χρησιμοποιείται σαν *κριτήριο απόκλισης*: Αν η ακολουθία (a_k) δεν συγκλίνει στο 0 τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αναγκαστικά αποκλίνει.

Παραδείγματα

(α) Η *γεωμετρική σειρά* με λόγο $x \in \mathbb{R}$ είναι η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k. \tag{2.1.10}$$

Δηλαδή $a_k = x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Αν $x = 1$ τότε $s_n = n + 1$, ενώ αν $x \neq 1$ έχουμε

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}. \tag{2.1.11}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $|x| \geq 1$ τότε $|a_k| = |x|^k \geq 1$, δηλαδή $a_k \not\to 0$. Από την Πρόταση 2.1.5(α) βλέπουμε ότι η σειρά (2.1.10) αποκλίνει.

(ii) Αν $|x| < 1$ τότε $x^{n+1} \to 0$, οπότε η (2.1.11) δείχνει ότι $s_n \to \frac{1}{1-x}$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}. \tag{2.1.12}$$

(β) *Τηλεσκοπικές σειρές.* Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (a_k) ικανοποιεί την

$$a_k = b_k - b_{k+1} \tag{2.1.13}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, όπου (b_k) μια άλλη ακολουθία. Τότε, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνον αν η ακολουθία (b_k) συγκλίνει. Πράγματι, έχουμε

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}, \tag{2.1.14}$$

οπότε $b_n \to b$ αν και μόνον αν $s_n \to b_1 - b$.

Σαν παράδειγμα θεωρούμε τη σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Τότε,

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = b_k - b_{k+1}, \tag{2.1.15}$$

όπου $b_k = \frac{1}{k}$. Άρα,

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \cdots + a_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1. \tag{2.1.16}$$

Θεώρημα 2.1.6 (κριτήριο Cauchy). *Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $N \leq m < n$ τότε*

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon. \tag{2.1.17}$$

Απόδειξη. Αν $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς, η σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν η (s_n) συγκλίνει. Δηλαδή, αν και μόνον αν η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy. Αυτό όμως είναι (από τον ορισμό της ακολουθίας Cauchy) ισοδύναμο με το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $N \leq m < n$,

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| = |(a_1 + \cdots + a_n) - (a_1 + \cdots + a_m)| = |s_n - s_m| < \varepsilon. \tag{2.1.18}$$ □

Παράδειγμα: Η *αρμονική σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Έχουμε $a_k = \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι: αν $n > m$ τότε

$$a_{m+1} + \cdots + a_n = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \frac{n-m}{n}. \tag{2.1.19}$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Cauchy. Αν η αρμονική σειρά συγκλίνει, τότε, για $\varepsilon = \frac{1}{4}$, πρέπει να υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $N \leq m < n$ τότε

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| < \frac{1}{4}. \tag{2.1.20}$$

Επιλέγουμε $m = N$ και $n = 2N$. Τότε, συνδυάζοντας τις (2.1.19) και (2.1.20) παίρνουμε

$$\frac{1}{4} > a_{N+1} + \cdots + a_{2N} \geq \frac{2N - N}{2N} = \frac{1}{2}, \tag{2.1.21}$$

που είναι άτοπο. Άρα, η αρμονική σειρά αποκλίνει.

Σημείωση: Το παράδειγμα της αρμονικής σειράς δείχνει ότι το αντίστροφο της Προτασης 2.1.5(α) δεν ισχύει. Αν $a_k \to 0$ δεν είναι απαραίτητα σωστό ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

2.2 Σειρές με μη αρνητικούς όρους

Σε αυτή την παράγραφο συζητάμε τη σύγκλιση ή απόκλιση σειρών με μη αρνητικούς όρους. Η βασική παρατήρηση είναι ότι αν για την ακολουθία (a_k) έχουμε $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα: πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$s_{n+1} - s_n = (a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + \cdots + a_n) = a_{n+1} \geq 0. \tag{2.2.1}$$

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω (a_k) ακολουθία με $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνον αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη. Αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.*

Απόδειξη. Η (s_n) είναι αύξουσα ακολουθία. Αν είναι άνω φραγμένη τότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, άρα η σειρά συγκλίνει. Αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε, αφού είναι αύξουσα, έχουμε $s_n \to +\infty$. □

Σημείωση. Είδαμε ότι μια σειρά με μη αρνητικούς όρους συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$. Επιστρέφοντας στο παράδειγμα της αρμονικής σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, βλέπουμε ότι, αφού δεν συγκλίνει, αποκλίνει στο $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty. \tag{2.2.2}$$

Θα δώσουμε μια απευθείας απόδειξη για το γεγονός ότι η ακολουθία $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ τείνει στο $+\infty$. Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε με επαγωγή ότι

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Για $n = 1$ η ανισότητα ισχύει ως ισότητα: $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$. Υποθέτουμε ότι η $(*)$ ισχύει για κάποιον φυσικό n. Τότε,

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Παρατηρήστε ότι ο $s_{2^{n+1}} - s_{2^n}$ είναι ένα άθροισμα 2^n το πλήθος αριθμών και ότι ο μικρότερος από αυτούς είναι ο $\frac{1}{2^{n+1}}$. Συνεπώς,

$$s_{2^{n+1}} \geq s_{2^n} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}.$$

Άρα, η $(*)$ ισχύει για τον φυσικό $n+1$. Έπεται ότι $s_{2^n} \to +\infty$. Αφού η (s_n) είναι αύξουσα και έχει υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$, συμπεραίνουμε ότι $s_n \to +\infty$.

2.2α΄ Σειρές με φθίνοντες μη αρνητικούς όρους

Πολλές φορές συναντάμε σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ των οποίων οι όροι a_k *φθίνουν* προς το 0: $a_{k+1} \leq a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_k \to 0$. Ένα κριτήριο σύγκλισης που εφαρμόζεται συχνά σε τέτοιες περιπτώσεις είναι το *κριτήριο συμπύκνωσης*.

Πρόταση 2.2.2 (Κριτήριο συμπύκνωσης - Cauchy). *Έστω (a_k) μια φθίνουσα ακολουθία με $a_k > 0$ και $a_k \to 0$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. Τότε, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$t_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} \tag{2.2.3}$$

είναι άνω φραγμένη. Έστω M ένα άνω φράγμα της (t_n). Θα δείξουμε ότι ο M είναι άνω φράγμα για τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Έστω $s_m = a_1 + \cdots + a_m$. Ο αριθμός m βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δυνάμεις του 2: υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $2^n \leq m < 2^{n+1}$. Τότε, χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η (a_k) είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\begin{aligned} s_m &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n - 1}) \\ &\quad + (a_{2^n} + \cdots + a_m) \\ &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n - 1}) \\ &\quad + (a_{2^n} + \cdots + a_m + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n} \\ &\leq M. \end{aligned}$$

Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ έχει μη αρνητικούς όρους και η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι άνω φραγμένη, το Θεώρημα 2.2.1 δείχνει ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δηλαδή ότι η (s_m) είναι άνω φραγμένη: υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $s_m \leq M$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τότε, για το τυχόν μερικό άθροισμα (t_n) της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ έχουμε

$$\begin{aligned} t_n &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} \\ &\leq 2a_1 + 2a_2 + 2(a_3 + a_4) + \cdots + 2(a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\ &= 2s_{2^n} \leq 2M. \end{aligned}$$

Αφού η (t_n) είναι άνω φραγμένη, το Θεώρημα 2.2.1 δείχνει ότι η $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.
$\square$

Παραδείγματα

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, όπου $p > 0$. Έχουμε $a_k = \frac{1}{k^p}$. Αφού $p > 0$, η (a_k) φθίνει προς το 0. Θεωρούμε την

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^k. \tag{2.2.4}$$

Η τελευταία σειρά είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $x_p = \frac{1}{2^{p-1}}$ Είδαμε ότι συγκλίνει αν $x_p = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$, δηλαδή αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $x_p = \frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$, δηλαδή αν $p \leq 1$.

Από το κριτήριο συμπύκνωσης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $0 < p \leq 1$.

(β) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$, όπου $p > 0$. Έχουμε $a_k = \frac{1}{k(\log k)^p}$. Αφού $p > 0$, η (a_k) φθίνει προς το 0. Θεωρούμε την

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\log(2^k))^p} = \frac{1}{(\log 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}. \tag{2.2.5}$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα, αυτή συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $p \leq 1$. Από το κριτήριο συμπύκνωσης, η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$ συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $0 < p \leq 1$.

2.2β′ Ο αριθμός e

Έχουμε ορίσει τον αριθμό e ως το όριο της γνησίως αύξουσας και άνω φραγμένης ακολουθίας $\alpha_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ καθώς το $n \to \infty$.

Πρόταση 2.2.3. *Ο αριθμός e ικανοποιεί την*

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \tag{2.2.6}$$

Απόδειξη. Θυμηθείτε ότι $0! = 1$. Γράφουμε s_n για το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς στο δεξιό μέλος:

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}. \tag{2.2.7}$$

Από το διωνυμικό ανάπτυγμα, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} \\
&\quad + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right] \\
&\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},
\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\alpha_n \leq s_n. \tag{2.2.8}$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ο προηγούμενος υπολογισμός δείχνει ότι αν $k > n$ τότε

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left[\left(1 - \frac{1}{k}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{k}\right)\right] \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{k!}\left[\left(1 - \frac{1}{k}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{k}\right)\right] \\
&\geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left[\left(1 - \frac{1}{k}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{k}\right)\right].
\end{aligned}$$

Κρατώντας το n σταθερό και αφήνοντας το $k \to \infty$, βλέπουμε ότι

$$e = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n. \tag{2.2.9}$$

Αφού η αύξουσα ακολουθία (s_n) είναι άνω φραγμένη από τον e, έπεται ότι η (s_n) συγκλίνει και $\lim_{n\to\infty} s_n \leq e$. Από την άλλη πλευρά, η (2.2.8) δείχνει ότι $e = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \leq \lim_{n\to\infty} s_n$. Άρα,

$$e = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}, \tag{2.2.10}$$

όπως ισχυρίζεται η Πρόταση. □

Χρησιμοποιώντας αυτήν την αναπαράσταση του e, θα δείξουμε ότι είναι άρρητος αριθμός.

Πρόταση 2.2.4. *Ο e είναι άρρητος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο e είναι ρητός. Τότε, υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$e = \frac{m}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \tag{2.2.11}$$

Δηλαδή,

$$\frac{m}{n} = \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(n+s)!} + \cdots\right). \tag{2.2.12}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (2.2.12) με $n!$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} 0 < A &= n!\left[\frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right] \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdots(n+s)} + \cdots . \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι, από τον τρόπο ορισμού του, ο

$$A = n!\left[\frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right] \tag{2.2.13}$$

είναι φυσικός αριθμός. Όμως, για κάθε $s \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdots(n+s)} &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^s} \\ &< \frac{2}{3} + \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdots(n+s)} + \cdots \leq \frac{11}{12}. \tag{2.2.14}$$

Έπεται ότι ο φυσικός αριθμός A ικανοποιεί την

$$0 < A \leq \frac{11}{12} \tag{2.2.15}$$

και έχουμε καταλήξει σε άτοπο. □

2.3 Γενικά κριτήρια

2.3α΄ Απόλυτη σύγκλιση σειράς

Ορισμός 2.3.1. *Λέμε ότι η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως αν η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *συγκλίνει. Λέμε ότι η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει υπό συνθήκη αν συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.*

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι η απόλυτη σύγκλιση είναι ισχυρότερη από την (απλή) σύγκλιση.

Πρόταση 2.3.2. *Αν η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως, τότε η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται το κριτήριο Cauchy (Θεώρημα 2.1.6). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $N \leq m < n$,

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon. \tag{2.3.1}$$

Τότε, για κάθε $N \leq m < n$ έχουμε

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon. \tag{2.3.2}$$

Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy. Από το Θεώρημα 2.1.6, συγκλίνει. □

Παραδείγματα

(α) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ συγκλίνει. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι συγκλίνει απολύτως: έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \tag{2.3.3}$$

και η τελευταία σειρά συγκλίνει (είναι της μορφής $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ με $p = 2 > 1$).

(β) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ δεν συγκλίνει απολύτως, αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{2.3.4}$$

(αρμονική σειρά). Μπορούμε όμως να δείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη. Θεωρούμε πρώτα το μερικό άθροισμα

$$\begin{aligned} s_{2m} &= \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} \\ &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)2m}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$s_{2m+2} = s_{2m} + \frac{1}{(2m+1)(2m+2)} > s_{2m}, \tag{2.3.5}$$

δηλαδή, η υπακολουθία (s_{2m}) είναι γνησίως αύξουσα. Παρατηρούμε επίσης ότι η (s_{2m}) είναι άνω φραγμένη, αφού

$$s_{2m} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)^2}, \tag{2.3.6}$$

και το δεξιό μέλος της (2.3.6) φράσσεται από το $(2m-1)$-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ η οποία συγκλίνει. Άρα η υπακολουθία (s_{2m}) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό s. Τότε,

$$s_{2m-1} = s_{2m} + \frac{1}{2m} \to s + 0 = s. \tag{2.3.7}$$

Αφού οι υπακολουθίες (s_{2m}) και (s_{2m-1}) των άρτιων και των περιττών όρων της (s_m) συγκλίνουν στον s, συμπεραίνουμε ότι $s_n \to s$.

2.3β΄ Κριτήρια σύγκρισης

Θεώρημα 2.3.3 (κριτήριο σύγκρισης). *Θεωρούμε τις σειρές $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, όπου $b_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|a_k| \leq M \cdot b_k \tag{2.3.8}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει. Τότε, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

Απόδειξη. Θέτουμε $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ και $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Από την (2.3.8) έπεται ότι

$$s_n \leq M \cdot t_n \tag{2.3.9}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, η ακολουθία (t_n) είναι άνω φραγμένη. Από την (2.3.9) συμπεραίνουμε ότι και η (s_n) είναι άνω φραγμένη. Άρα, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. □

Θεώρημα 2.3.4 (οριακό κριτήριο σύγκρισης). *Θεωρούμε τις σειρές* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *και* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$*, όπου* $b_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$*. Υποθέτουμε ότι*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \in \mathbb{R} \tag{2.3.10}$$

και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *συγκλίνει. Τότε, η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως.*

Απόδειξη. Η ακολουθία $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$ συγκλίνει, άρα είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\left|\frac{a_k}{b_k}\right| \leq M \tag{2.3.11}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε, ικανοποιείται η (2.3.8) και μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.3.3. □

Θεώρημα 2.3.5 (ισοδύναμη συμπεριφορά). *Θεωρούμε τις σειρές* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *και* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$*, όπου* $a_k, b_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$*. Υποθέτουμε ότι*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell > 0. \tag{2.3.10}$$

Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το Θεώρημα 2.3.4.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Αφού $\frac{a_k}{b_k} \to \ell > 0$, έχουμε $\frac{b_k}{a_k} \to \frac{1}{\ell}$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των (a_k) και (b_k), βλέπουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, χρησιμοποιώντας ξανά το Θεώρημα 2.3.4. □

Παραδείγματα

(α) Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{\sin(kx)}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}. \tag{2.3.12}$$

Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, συμπεραίνουμε (από το κριτήριο σύγκρισης) ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$. Παρατηρούμε ότι αν $a_k = \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ και $b_k = \frac{1}{k^3}$, τότε

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^4+k^3}{k^4+k^2+3} \to 1. \tag{2.3.13}$$

Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ συγκλίνει, συμπεραίνουμε (από το οριακό κριτήριο σύγκρισης) ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ συγκλίνει.

(γ) Τέλος, εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες $b_k = \frac{k+1}{k^2+2}$ και $a_k = \frac{1}{k}$, τότε

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^2+2}{k^2+k} \to 1 > 0. \tag{2.3.14}$$

Από το Θεώρημα 2.3.5 έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$ έχει την ίδια συμπεριφορά με την $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, δηλαδή αποκλίνει.

2.3γ′ Κριτήριο λόγου και κριτήριο ρίζας

Θεώρημα 2.3.6 (Κριτήριο λόγου - D' Alembert). *Έστω $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ μια σειρά με μη μηδενικούς όρους.*

(α) *Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, τότε η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.*

(β) *Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, τότε η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.*

Απόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \ell < 1$. Έστω $x > 0$ με $\ell < x < 1$. Τότε, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq x$ γιά κάθε $k \geq N$. Δηλαδή,

$$|a_{N+1}| \leq x|a_N|, \quad |a_{N+2}| \leq x|a_{N+1}| \leq x^2|a_N| \quad \text{κλπ.} \tag{2.3.15}$$

Επαγωγικά δείχνουμε ότι

$$|a_k| \leq x^{k-N}|a_N| = \frac{|a_N|}{x^N} \cdot x^k \tag{2.3.16}$$

γιά κάθε $k \geq N$.

Συγκρίνουμε τις σειρές $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |a_k|$ και $\sum\limits_{k=N}^{\infty} x^k$. Από την (2.3.16) βλέπουμε ότι

$$|a_k| \leq M \cdot x^k \tag{2.3.17}$$

για κάθε $k \geq N$, όπου $M = \frac{|a_N|}{x^N}$. Η σειρά $\sum\limits_{k=N}^{\infty} x^k$ συγκλίνει, διότι προέρχεται από την γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ (με απαλοιφή των πρώτων όρων της) και $0 < x < 1$. Άρα, η $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει κι αυτή.

(β) Αφού $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ για κάθε $k \geq N$. Δηλαδή,

$$|a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \cdots \geq |a_N| > 0 \tag{2.3.18}$$

για κάθε $k \geq N$. Τότε, $a_k \not\to 0$ και, από την Πρόταση 2.1.5(α), η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. □

Σημείωση. Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$, πρέπει να εξετάσουμε αλλιώς τη σύγκλιση ή απόκλιση της $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Παρατηρήστε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει και $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} \to 1$, ενώ η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει και $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \to 1$.

Παράδειγμα

Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Έχουμε

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \to 0 < 1. \tag{2.3.19}$$

Άρα, η σειρά συγκλίνει.

Παρατήρηση. Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.6, χωρίς ουσιαστική μετατροπή, δίνει το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα: Έστω $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ μια σειρά με μηδενικούς όρους.

(α) Αν $\limsup\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $x > 0$ με $\ell < x < 1$, τότε από τον χαρακτηρισμό του $\limsup$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq x$ για κάθε $k \geq N$. Συνεχίζουμε την απόδειξη όπως πριν.

(β) Αν $\liminf\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $x > 0$ με $\ell > x > 1$, τότε από τον χαρακτηρισμό του $\liminf$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq x > 1$ για κάθε $k \geq N$. Συνεχίζουμε την απόδειξη όπως πριν.

Θεώρημα 2.3.7 (κριτήριο ρίζας - Cauchy). *Έστω $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ μια σειρά πραγματικών αριθμών.*

(α) *Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως.*

(β) *Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, τότε η σειρά αποκλίνει.*

Απόδειξη (α) Επιλέγουμε $x > 0$ με την ιδιότητα $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < x < 1$. Τότε, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sqrt[k]{|a_k|} \leq x$ για κάθε $k \geq N$. Ισοδύναμα,

$$|a_k| \leq x^k \tag{2.3.21}$$

για κάθε $k \geq n$. Συγκρίνουμε τις σειρές $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |a_k|$ και $\sum\limits_{k=N}^{\infty} x^k$. Αφού $x < 1$, η δεύτερη σειρά συγκλίνει. Άρα η $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Αφού $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ για κάθε $k \geq N$. Δηλαδή, $|a_k| \geq 1$ τελικά. Άρα $a_k \not\to 0$ και η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. □

Σημείωση. Αν $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$, πρέπει να εξετάσουμε αλλιώς τη σύγκλιση ή απόκλιση της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Για τις $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ έχουμε $\sqrt[k]{|a_k|} \to 1$. Η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Παραδείγματα

(α) Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x|}{\sqrt[k]{k}} \to |x|$. Αν $|x| < 1$, τότε $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x| < 1$ και η σειρά συγκλίνει απολύτως. Αν $|x| > 1$, τοτε $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x| > 1$ και η σειρά αποκλίνει. Αν $|x| = 1$, το κριτήριο ρίζας δεν δίνει συμπέρασμα. Για $x = 1$ παίρνουμε την αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ η οποία αποκλίνει. Για $x = -1$ παίρνουμε την «εναλλάσσουσα σειρά» $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ η οποία συγκλίνει. Άρα, η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $-1 \leq x < 1$.

(β) Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{x^2}{\sqrt[k]{k}^2} \to x^2$. Άρα, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = x^2$. Αν $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει. Αν $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει απολύτως. Αν $|x| = 1$ το κριτήριο ρίζας δεν δίνει συμπέρασμα. Στην περίπτωση $x = \pm 1$ η σειρά παίρνει τη μορφή $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, δηλαδή συγκλίνει. Άρα, η σειρά συγκλίνει απολύτως όταν $|x| \leq 1$.

Παρατήρηση. Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.7, χωρίς ουσιαστική μετατροπή, δίνει το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα: Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ μια σειρά με μηδενικούς όρους.

(α) Αν $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $x > 0$ με $\ell < x < 1$, τότε από τον χαρακτηρισμό του $\limsup$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_k| \leq x^k$ για κάθε $k \geq N$. Συνεχίζουμε την απόδειξη όπως πριν.

(β) Αν $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $x > 0$ με $\ell > x > 1$, τότε από τον χαρακτηρισμό του $\limsup$, υπάρχουν άπειροι δείκτες $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $|a_{k_n}| \geq x^{k_n} > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $a_n \not\to 0$ και εφαρμόζεται το κριτήριο απόκλισης.

2.3δ′ Το κριτήριο του Dirichlet

Το κριτήριο του Dirichlet εξασφαλίζει (μερικές φορές) τη σύγκλιση μιας σειράς η οποία δεν συγκλίνει απολύτως (συγκλίνει υπό συνθήκη).

Λήμμα 2.3.8 (άθροιση κατά μέρη - Abel). *Έστω (a_k) και (b_k) δύο ακολουθίες. Ορίζουμε $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $s_0 = 0$. Για κάθε $1 \leq m < n$, ισχύει η ισότητα*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m. \tag{2.3.22}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k \\ &= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n} s_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m,\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.3.9 (κριτήριο Dirichlet). *Εστω (a_k) και (b_k) δύο ακολουθίες με τις εξής ιδιότητες:*

(α) *Η (b_k) έχει θετικούς όρους και φθίνει προς το 0.*

(β) *Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ της (a_k) είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|s_n| \leq M \tag{2.3.23}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση (α), βρίσκουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{\varepsilon}{2M} > b_N \geq b_{N+1} \geq b_{N+2} \geq \cdots > 0. \tag{2.3.24}$$

Άν $N \leq m < n$, τότε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m\right| \\ &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |s_k||b_k - b_{k+1}| + |s_n||b_n| + |s_{m-1}||b_m| \\ &\leq M \sum_{k=m}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + M b_n + M b_m \\ &= 2M b_m < 2M \frac{\varepsilon}{2M} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Από το κριτήριο του Cauchy, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα (κριτήριο Leibniz)

Σειρές με εναλλασσόμενα πρόσημα $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$, *όπου η* $\{b_k\}$ *φθίνει προς το 0.*

Τα μερικά αθροίσματα της $((-1)^{k-1})$ είναι φραγμένα, αφού $s_n = 0$ αν ο n είναι άρτιος και $s_n = 1$ αν ο n είναι περιττός. Άρα, κάθε τέτοια σειρά συγκλίνει. Παράδειγμα, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

2.3ε′ *Δεκαδική παράσταση πραγματικών αριθμών

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός έχει δεκαδική παράσταση: είναι δηλαδή άθροισμα σειράς της μορφής

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots , \tag{2.3.25}$$

όπου $a_0 \in \mathbb{Z}$ και $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ για κάθε $k \geq 1$.

Παρατηρήστε ότι κάθε σειρά αυτής της μορφής συγκλίνει και ορίζει έναν πραγματικό αριθμό $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$. Πράγματι, η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}$ συγκλίνει και επειδή $0 \leq \frac{a_k}{10^k} \leq \frac{9}{10^k}$ για κάθε $k \geq 1$, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης σειρών.

Λήμμα 2.3.10. *Αν* $N \geq 1$ *και* $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ *για κάθε* $k \geq N$, *τότε*

$$0 \leq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \leq \frac{1}{10^{N-1}}. \tag{2.3.26}$$

Η αριστερή ανισότητα ισχύει σαν ισότητα αν και μόνον αν $a_k = 0$ *για κάθε* $k \geq N$, *ενώ η δεξιά ανισότητα ισχύει σαν ισότητα αν και μόνον αν* $a_k = 9$ *για κάθε* $k \geq N$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \geq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{0}{10^k} = 0. \tag{2.3.27}$$

Αν $a_k = 0$ για κάθε $k \geq N$, τότε $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = 0$. Αντίστροφα, αν $a_m \geq 1$ για κάποιον $m \geq N$, τότε

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} &= \frac{a_m}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k \neq m}}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \\ &\geq \frac{1}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k \neq m}}^{\infty} \frac{0}{10^k} \\ &= \frac{1}{10^m} > 0. \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \leq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^N}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) = \frac{1}{10^{N-1}}. \tag{2.3.28}$$

Αν $a_k = 9$ για κάθε $k \geq N$, τότε

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^{N-1}}. \tag{2.3.29}$$

Αντίστροφα, αν $a_m \leq 8$ για κάποιον $m \geq N$, τότε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} &= \frac{a_m}{10^m} + \sum_{\substack{k=N\\k\neq m}}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \\
&\leq \frac{8}{10^m} + \sum_{\substack{k=N\\k\neq m}}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^m} - \frac{1}{10^m} + \sum_{\substack{k=N\\k\neq m}}^{\infty} \frac{9}{10^k} \\
&= -\frac{1}{10^m} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{9}{10^k} \\
&= -\frac{1}{10^m} + \frac{1}{10^{N-1}} \\
&< \frac{1}{10^{N-1}},
\end{aligned}$$

κι αυτό συμπληρώνει την απόδειξη του Λήμματος. □

Λήμμα 2.3.11. *Έστω n μη αρνητικός ακέραιος και έστω $N \geq 0$. Τότε υπάρχουν ακέραιοι $p_0, p_1, \ldots p_n$ ώστε: $p_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ για $0 \leq k \leq N-1$, $p_N \geq 0$ και*

$$n = 10^N p_N + 10^{N-1} p_{N-1} + \cdots + 10 p_1 + p_0. \tag{2.3.30}$$

Απόδειξη. Διαιρώντας διαδοχικά με 10 παίρνουμε

$$\begin{aligned}
n &= 10q_1 + p_0, \quad \text{όπου} \quad 0 \leq p_0 \leq 9 \quad \text{και} \quad q_1 \geq 0 \\
q_1 &= 10q_2 + p_1, \quad \text{όπου} \quad 0 \leq p_1 \leq 9 \quad \text{και} \quad q_2 \geq 0 \\
q_2 &= 10q_3 + p_2, \quad \text{όπου} \quad 0 \leq p_2 \leq 9 \quad \text{και} \quad q_3 \geq 0 \\
\vdots \; & \; \vdots \\
q_{N-1} &= 10p_N + p_{N-1}, \quad \text{όπου} \quad 0 \leq p_{N-1} \leq 9 \quad \text{και} \quad q_N \geq 0.
\end{aligned}$$

Επαγωγικά, έχουμε:

$$\begin{aligned}
n &= 10q_1 + p_0 = 10^2 q_2 + 10p_1 + p_0 = 10^3 q_3 + 10^2 p_2 + 10 p_1 + p_0 = \cdots \\
&= 10^N q_N + 10^{N-1} p_{N-1} + 10 p_1 + p_0.
\end{aligned}$$

Θέτοντας $p_N = q_N$ έχουμε το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 2.3.10 και 2.3.11 θα δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός έχει δεκαδική παράσταση.

Θεώρημα 2.3.12. (α) *Κάθε πραγματικός αριθμός $x \geq 0$ γράφεται σαν άθροισμα «δεκαδικής σειράς»:*

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots , \tag{2.3.31}$$

όπου $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ για κάθε $k \geq 1$. Τότε, λέμε ότι ο x έχει τη δεκαδική παράσταση $x = a_0.a_1a_2a_3 \cdots$.

(β) *Οι αριθμοί της μορφής $x = \frac{m}{10^N}$ όπου $m \in \mathbb{N}$ και $N \geq 0$ έχουν ακριβώς δύο δεκαδικές παραστάσεις:*

$$x = a_0.a_1a_2 \cdots a_N 9999 \cdots = a_0.a_1a_2 \cdots a_{N-1}(a_N + 1)000 \cdots \tag{2.3.32}$$

Όλοι οι άλλοι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί έχουν μοναδική δεκαδική παράσταση.

Απόδειξη. (α) Έστω $x \geq 0$. Υπάρχει μη αρνητικός ακέραιος a_0, το ακέραιο μέρος του x, ώστε:

$$a_0 \leq x < a_0 + 1. \tag{2.3.33}$$

Χωρίζουμε το διάστημα $[a_0, a_0 + 1)$ σε 10 ίσα υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{10}$. Ο x ανήκει σε ένα από αυτά. Άρα, υπάρχει $a_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ώστε

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}. \tag{2.3.34}$$

Χωρίζουμε το νέο αυτό διάστημα (που έχει μήκος $\frac{1}{10}$) σε 10 ίσα υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{10^2}$. Ο x ανήκει σε ένα από αυτά, άρα υπάρχει $a_2 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ώστε

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2}. \tag{2.3.35}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, για κάθε $k \geq 1$ βρίσκουμε $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ώστε

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_k + 1}{10^k}. \tag{2.3.36}$$

Από την κατασκευή, τα μερικά αθροίσματα s_n της σειράς $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ η οποία δημιουργείται, ικανοποιούν την $s_n \leq x < s_n + \frac{1}{10^n}$. Άρα,

$$0 \leq x - s_n < \frac{1}{10^n}. \tag{2.3.37}$$

Έπεται ότι $s_n \to x$, δηλαδή

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}. \tag{2.3.38}$$

(β) Ας υποθέσουμε ότι κάποιος $x \geq 0$ έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις. Δηλαδή,

$$x = a_0.a_1a_2 \cdots = b_0.b_1b_2 \cdots , \tag{2.3.39}$$

όπου $a_0, b_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_k, b_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ για κάθε $k \geq 1$, και υπάρχει $m \geq 0$ με την ιδιότητα $a_m \neq b_m$.

Έστω $N \geq 0$ ο ελάχιστος m για τον οποίο $a_m \neq b_m$. Δηλαδή,

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_{N-1} = b_{N-1},\ a_N \neq b_N. \tag{2.3.40}$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a_N < b_N$. Από την

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{b_k}{10^k} \tag{2.3.41}$$

και από το Λήμμα 2.3.10 έπεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{10^N} &\leq \frac{b_N - a_N}{10^N} \\ &= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} - \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k} \\ &\leq \frac{1}{10^N} - 0 \\ &= \frac{1}{10^N}. \end{aligned}$$

Άρα, όλες οι ανισότητες είναι ισότητες. Δηλαδή,

$$b_N - a_N = 1 \tag{2.3.42}$$

και

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \frac{1}{10^N}, \qquad \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k} = 0. \tag{2.3.43}$$

Από το Λήμμα 2.3.10,

$$\begin{aligned} b_N &= a_N + 1, \\ a_k &= 9,\ \text{αν}\ k \geq N+1, \\ b_k &= 0,\ \text{αν}\ k \geq N+1. \end{aligned}$$

Άρα, αν ο x έχει περισσότερες από μία δεκαδικές παραστάσεις, τότε έχει ακριβώς δύο παραστάσεις, τις ακόλουθες:

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_N999\cdots = a_0.a_1a_2\cdots a_{N-1}(a_N+1)\ 00\cdots \tag{2.3.44}$$

Τότε, ο x ισούται με

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{N-1}}{10^{N-1}} + \frac{a_N+1}{10^N} \\ &= \frac{10^N a_0 + 10^{N-1} a_1 + \cdots + 10 a_{N-1} + a_N + 1}{10^N} \\ &= \frac{m}{10^N} \end{aligned}$$

για κάποιους $m \in \mathbb{N}$ και $N \geq 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι $x = \frac{m}{10^N}$, όπου $m \in \mathbb{N}$ και $N \geq 0$. Από το Λήμμα 2.3.11 μπορούμε να γράψουμε

$$m = 10^N p_N + 10^{N-1} p_{N-1} + \cdots + 10p_1 + p_0, \tag{2.3.45}$$

όπου $p_N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $p_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ για $0 \leq k \leq N-1$. Αν p_m είναι ο πρώτος μη μηδενικός όρος της ακολουθίας $p_0, p_1, \ldots, p_{N-1}, p_N$, τότε

$$\begin{aligned} x &= \frac{10^N p_N + \cdots + 10^m p_m}{10^N} \\ &= p_N + \frac{p_{N-1}}{10} + \cdots + \frac{p_m}{10^{N-m}} \\ &= p_N . p_{N-1} \cdots p_m 000 \cdots = p_N . p_{N-1} \cdots (p_m - 1)\ 99 \cdots . \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του (β). □

2.4 Δυναμοσειρές

Ορισμός 2.4.1. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{2.4.1}$$

λέγεται *δυναμοσειρά* με συντελεστές a_k.

Ο x είναι μια παράμετρος από το $\mathbb{R}$. Το πρόβλημα που θα συζητήσουμε εδώ είναι: για δοθείσα ακολουθία συντελεστών (a_k) να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η αντίστοιχη δυναμοσειρά συγκλίνει. Για κάθε τέτοιο x λέμε ότι *η δυναμοσειρά συγκλίνει στο x*.

Πρόταση 2.4.2. *Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές a_k.*

(α) *Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στο $y \neq 0$ και αν $|x| < |y|$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο x.*

(β) *Αν η δυναμοσειρά αποκλίνει στο y και αν $|x| > |y|$, τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.*

Απόδειξη. (α) Αφού η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ συγκλίνει, έχουμε $a_k y^k \to 0$. Άρα, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|a_k y^k| \leq 1 \quad \text{για κάθε } k \geq N. \tag{2.4.2}$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < |y|$. Για κάθε $k \geq N$ έχουμε

$$|a_k x^k| = |a_k y^k| \cdot \left| \frac{x}{y} \right|^k \leq \left| \frac{x}{y} \right|^k . \tag{2.4.3}$$

Η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=N}^{\infty} \left| \frac{x}{y} \right|^k$ συγκλίνει, διότι $\left| \frac{x}{y} \right| < 1$. Από το κριτήριο σύγκρισης έπεται το συμπέρασμα.

(β) Αν η δυναμοσειρά συνέκλινε στο x, από το (α) θα συνέκλινε απολύτως στο y, άτοπο. □

Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές a_k. Με βάση την Πρόταση 2.4.2 μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο των σημείων στα οποία συγκλίνει η δυναμοσειρά είναι «ουσιαστικά» ένα διάστημα συμμετρικό ως προς το 0 (ή, ενδεχομένως, το $\{0\}$ ή το $\mathbb{R}$). Αυτό φαίνεται ως εξής: ορίζουμε

$$R := \sup\{|x| : \text{ η δυναμοσειρά συγκλίνει στο } x\}. \tag{2.4.4}$$

Το σύνολο στο δεξιό μέλος είναι μη κενό, αφού η δυναμοσειρά συγκλίνει στο 0. Η Πρόταση 2.4.2 δείχνει ότι αν $|x| < R$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο x. Πράγματι, από τον ορισμό του R υπάρχει y με $R \geq |y| > |x|$ ώστε η δυναμοσειρά να συγκλίνει στο y, οπότε εφαρμόζεται η Πρόταση 2.4.2(α) στο x. Από τον ορισμό του R είναι φανερό ότι αν $|x| > R$ τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x. Άρα, η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάθε $x \in (-R, R)$ και αποκλίνει σε κάθε x με $|x| > R$.

Το διάστημα $(-R, R)$ ονομάζεται *διάστημα σύγκλισης* της δυναμοσειράς. Η συζήτηση που κάναμε δείχνει ότι το *σύνολο σύγκλισης* της δυναμοσειράς, δηλαδή το σύνολο όλων των σημείων στα οποία συγκλίνει, προκύπτει από το $(-R, R)$ με την προσθήκη (ίσως) του R ή του $-R$ ή των $\pm R$. Στην περίπτωση που $R = +\infty$, η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάθε $x \in R$. Στην περίπτωση που $R = 0$, η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο σημείο $x = 0$.

Το πρόβλημα είναι λοιπόν τώρα το εξής: πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε την *ακτίνα σύγκλισης* μιας δυναμοσειράς συναρτήσει των συντελεστών της. Μια απάντηση μας δίνει το κριτήριο της ρίζας για τη σύγκλιση σειρών.

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές a_k. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = a$ και θέτουμε $R = \frac{1}{a}$ με τη σύμβαση ότι $\frac{1}{0} = +\infty$ και $\frac{1}{+\infty} = 0$.*
(α) Αν $x \in (-R, R)$ η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο x.
(β) Αν $x \notin [-R, R]$ η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας για τη σύγκλιση σειρών. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση $0 < a < +\infty$ (οι περιπτώσεις $a = 0$ και $a = +\infty$ αφήνονται σαν άσκηση).
(α) Αν $|x| < R$ τότε

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x|a = \frac{|x|}{R} < 1. \tag{2.4.5}$$

Από το κριτήριο της ρίζας, η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως.
(β) Αν $|x| > R$ τότε

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \frac{|x|}{R} > 1. \tag{2.4.6}$$

Από το κριτήριο της ρίζας, η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ αποκλίνει. □

Παρατήρηση 2.4.4. Το Θεώρημα 2.4.3 δεν μας επιτρέπει να συμπεράνουμε αμέσως τις συμβαίνει στα «άκρα $\pm R$ του διαστήματος σύγκλισης». Όπως δείχνουν τα επόμενα παραδείγματα, μπορεί η δυναμοσειρά να συγκλίνει σε ένα, σε κανένα ή και στα δύο άκρα.

1. Για την $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ελέγχουμε ότι $R = 1$. Για $x = \pm 1$ έχουμε τις σειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

οι οποίες αποκλίνουν.

2. Για την $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)^2}$ ελέγχουμε ότι $R = 1$. Για $x = \pm 1$ έχουμε τις σειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

οι οποίες συγκλίνουν.

3. Για την $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}$ ελέγχουμε ότι $R = 1$. Για $x = \pm 1$ έχουμε τις σειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Η πρώτη αποκλίνει, ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Αντίστοιχο αποτέλεσμα προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του λόγου στη θέση του κριτηρίου της ρίζας.

Θεώρημα 2.4.5. *Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές $a_k \neq 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = a$ και θέτουμε $R = \frac{1}{a}$.*
(α) Αν $x \in (-R, R)$ η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο x.
(β) Αν $x \notin [-R, R]$ η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.

Απόδειξη. Εφαρμόστε το κριτήριο του λόγου για τη σύγκλιση σειρών. □