Κεφάλαιο 5

Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι *παραγωγίσιμη στο* $[a,b]$ αν η παράγωγος $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x\in(a,b)$ και, επιπλέον, υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad \text{και}\quad f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Συμφωνούμε να γράφουμε $f'(a)=f'_+(a)$ και $f'(b)=f'_-(b)$.

5.1 Το θεώρημα μέσης του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Στο προηγούμενο Κεφάλαιο ορίσαμε τη *μέση τιμή*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{5.1.1}$$

της f στο $[a,b]$. Αν η f υποτεθεί συνεχής, τότε υπάρχει $\xi\in[a,b]$ με την ιδιότητα

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{5.1.2}$$

Ο ισχυρισμός αυτός είναι άμεση συνέπεια του εξής γενικότερου θεωρήματος.

Θεώρημα 5.1.1 (θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού). *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx. \tag{5.1.3}$$

Απόδειξη. Οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, άρα η $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Έστω

$$m = \min\{f(x) : a \leq x \leq b\} \quad \text{και} \quad M = \max\{f(x) : a \leq x \leq b\}. \tag{5.1.4}$$

Αφού η g παίρνει μη αρνητικές τιμές, έχουμε

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \tag{5.1.5}$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Συνεπώς,

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx. \tag{5.1.6}$$

Αφού $g \geq 0$ στο $[a,b]$, έχουμε $\int_a^b g(x)dx \geq 0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: αν $\int_a^b g(x)dx = 0$, τότε από την (5.1.6) βλέπουμε ότι $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Άρα, η (5.1.3) ισχύει *για κάθε* $\xi \in [a,b]$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\int_a^b g(x)dx > 0$. Τότε, από την (5.1.6) συμπεραίνουμε ότι

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M. \tag{5.1.7}$$

Αφού η f είναι συνεχής, το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής δείχνει ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}. \tag{5.1.8}$$

Έπεται το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 5.1.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \tag{5.1.9}$$

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.1.1, αν θεωρήσουμε την $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 1$ για κάθε $x \in [a,b]$. □

Στην επόμενη παράγραφο θα δείξουμε (ξανά) το Πόρισμα 5.1.2, αυτή τη φορά σαν άμεση συνέπεια του πρώτου θεμελιώδους θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού.

5.2 Τα θεμελιώδη θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

Ορισμός 5.2.1 (αόριστο ολοκλήρωμα). Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είδαμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,x]$ για κάθε $x \in [a,b]$. Το *αόριστο ολοκλήρωμα της f* είναι η συνάρτηση $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{5.2.1}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι φραγμένη, θα δείξουμε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης είναι πάντοτε συνεχής συνάρτηση.

Θεώρημα 5.2.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι εξ ορισμού φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Έστω $x < y$ στο $[a,b]$. Τότε,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \\ &\leq \int_x^y |f(t)|dt \leq M|x-y|. \end{aligned}$$

Άρα, η F είναι Lipschitz συνεχής (με σταθερά M). □

Μπορούμε να δείξουμε κάτι ισχυρότερο: στα σημεία συνέχειας της f, η F είναι παραγωγίσιμη.

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in [a,b]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και*

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{5.2.2}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $a < x_0 < b$ (οι δύο περιπτώσεις $x_0 = a$ ή $x_0 = b$ ελέγχονται όμοια, με τη σύμβαση που κάναμε στην αρχή του Κεφαλαίου). Θέτουμε $\delta_1 = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$. Αν $|h| < \delta_1$, τότε

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0+h) - F(x)}{h} - f(x_0) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right) - f(x_0) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt \right) \\ &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο x_0, άρα υπάρχει $0 < \delta < \delta_1$ ώστε αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Έστω $0 < |h| < \delta$.

(α) Αν $0 < h < \delta$, τότε

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0+h) - F(x)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \\ &\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt = \frac{1}{h} \cdot h\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

(β) Αν $-\delta < h < 0$, τότε

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x_0+h)-F(x)}{h} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}[f(t)-f(x_0)]dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}|f(t)-f(x_0)|dt \\ &\leq \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}\varepsilon dt = \frac{1}{|h|}\cdot(-h)\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

δηλαδή $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Άμεση συνέπεια είναι το *πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.*

Θεώρημα 5.2.4 (πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού). *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και*

(5.2.3) $$F'(x) = f(x)$$

για κάθε $x \in [a,b]$. □

Πόρισμα 5.2.5. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε*

(5.2.4) $$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για τη συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ στο $[a,b]$. □

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται **παράγουσα** της f (ή **αντιπαράγωγος** της f) αν $G'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.2.4, η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

είναι παράγουσα της f. Αν G είναι μια άλλη παράγουσα της f, τότε $G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, άρα η $G - F$ είναι σταθερή στο $[a,b]$ (απλή συνέπεια του θεωρήματος μέσης τιμής). Δηλαδή, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε

(5.2.5) $$G(x) - F(x) = c$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Αφού $F(a) = 0$, παίρνουμε $c = G(a)$. Δηλαδή,

(5.2.6) $$\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$$

ή αλλιώς

(5.2.7) $$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)dt$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Έχουμε λοιπόν δείξει το εξής:

Θεώρημα 5.2.6. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Αν $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μια παράγουσα της f, τότε*

$$G(x) = F(x) + G(a) = \int_a^x f(t)dt + G(a) \tag{5.2.8}$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Ειδικότερα,

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a). \qquad \square$$

Σημείωση: Δεν είναι σωστό ότι για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα

$$G(b) - G(a) = \int_a^b G'(x)dx. \tag{5.2.9}$$

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $G(0) = 0$ και $G(x) = x^2 \sin\frac{1}{x^2}$ αν $0 < x \leq 1$, τότε η G είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ αλλά η G' δεν είναι φραγμένη συνάρτηση (ελέγξτε το) οπότε δεν μπορούμε να μιλάμε για το ολοκλήρωμα $\int_a^b G'$.

Αν όμως η $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε η (5.2.9) ισχύει. Αυτό είναι το *δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.*

Θεώρημα 5.2.7 (δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού). *Έστω $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ τότε*

$$\int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a). \tag{5.2.10}$$

Απόδειξη. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, βρίσκουμε $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ με την ιδιότητα

$$G(x_{k+1}) - G(x_k) = G'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k). \tag{5.2.11}$$

Αν, για κάθε $0 \leq k \leq n-1$, ορίσουμε

$$m_k = \inf\{G'(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \quad \text{και} \quad M_k = \sup\{G'(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}, \tag{5.2.12}$$

τότε

$$m_k \leq G'(\xi_k) \leq M_k, \tag{5.2.13}$$

άρα

$$L(G', P) \leq \sum_{k=0}^{n-1} G'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \leq U(G', P). \tag{5.2.14}$$

Δηλαδή,

$$L(G', P) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (G(x_{k+1}) - G(x_k)) = G(b) - G(a) \leq U(G', P). \tag{5.2.15}$$

Αφού η P ήταν τυχούσα και η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, παίρνοντας supremum ως προς P στην αριστερή ανισότητα και infimum ως προς P στην δεξιά ανισότητα της (5.2.15), συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b G'(x)dx \leq G(b) - G(a) \leq \int_a^b G'(x)dx, \tag{5.2.16}$$

που είναι το ζητούμενο. □

5.3 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Τα θεωρήματα αυτής της παραγράφου «περιγράφουν» δύο χρήσιμες μεθόδους ολοκλήρωσης: την ολοκλήρωση κατά μέρη και την ολοκλήρωση με αντικατάσταση.

Συμβολισμός. Αν $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, τότε συμφωνούμε να γράφουμε

$$[F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a). \tag{5.3.1}$$

Θεώρημα 5.3.1 (ολοκλήρωση κατά μέρη). *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν οι f' και g' είναι ολοκληρώσιμες, τότε*

$$\int_a^x fg' = (fg)(x) - (fg)(a) - \int_a^x f'g. \tag{5.3.2}$$

Ειδικότερα,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \tag{5.3.3}$$

Απόδειξη. Η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη και

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \tag{5.3.4}$$

στο $[a, b]$. Από την υπόθεση, οι συναρτήσεις fg', $f'g$ είναι ολοκληρώσιμες, άρα και η $(f \cdot g)'$ είναι ολοκληρώσιμη. Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$\int_a^x fg' + \int_a^x f'g = \int_a^x (fg)' = (fg)(x) - (fg)(a). \tag{5.3.5}$$

Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει αν θέσουμε $x = b$. □

Μια εφαρμογή είναι το «δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού».

Πόρισμα 5.3.2. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και η g είναι μονότονη και συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$. Τότε, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \tag{5.3.6}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ της f στο $[a,b]$. Τότε, το ζητούμενο παίρνει την εξής μορφή: υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$\int_a^b F'(x)g(x)dx = g(a)F(\xi) + g(b)(F(b) - F(\xi)). \tag{5.3.7}$$

Η g είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά μέρη στο αριστερό μέλος. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b F'(x)g(x)dx &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)dx \\ &= F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x)dx,\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

αφού $F(a) = 0$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού: η g είναι μονότονη, άρα η g' διατηρεί πρόσημο στο $[a,b]$. Η F είναι συνεχής και η g' ολοκληρώσιμη, άρα υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx = F(\xi)\int_a^b g'(x)dx = F(\xi)(g(b) - g(a)). \tag{5.3.9}$$

Αντικαθιστώντας στην (5.3.8) παίρνουμε

$$\int_a^b F'(x)g(x) = F(b)g(b) - F(\xi)(g(b) - g(a)) = g(a)F(\xi) + g(b)(F(b) - F(\xi)), \tag{5.3.10}$$

δηλαδή την (5.3.7). □

Θεώρημα 5.3.3 (πρώτο θεώρημα αντικατάστασης). *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η ϕ' είναι ολοκληρώσιμη. Αν $I = \phi([a,b])$ και $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε*

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(s)\,ds. \tag{5.3.11}$$

Απόδειξη. Η ϕ είναι συνεχής, άρα το $I = \phi([a,b])$ είναι κλειστό διάστημα. Η f είναι συνεχής στο I, άρα είναι ολοκληρώσιμη στο I. Ορίζουμε $F : I \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_{\phi(a)}^x f(s)\,ds \tag{5.3.12}$$

(παρατηρήστε ότι το $\phi(a)$ δεν είναι απαραίτητα άκρο του I, δηλαδή η F δεν είναι απαραίτητα το αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I). Αφού η f είναι συνεχής στο I, το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού δείχνει ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο I και $F' = f$. Έπεται ότι

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_a^b F'(\phi(t))\phi'(t)\,dt. \tag{5.3.13}$$

Παρατηρούμε ότι

$$(F' \circ \phi) \cdot \phi' = (F \circ \phi)'. \tag{5.3.14}$$

Η $(F'\circ\phi)\cdot\phi'$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, άρα η $(F\circ\phi)'$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού παίρνουμε

$$\int_a^b (f\circ\phi)\cdot\phi' = \int_a^b (F'\circ\phi)\cdot\phi' = \int_a^b (F\circ\phi)' = (F\circ\phi)(b) - (F\circ\phi)(a). \tag{5.3.15}$$

Αφού

$$(F\circ\phi)(b) - (F\circ\phi)(a) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f - \int_{\phi(a)}^{\phi(a)} f = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f, \tag{5.3.16}$$

παίρνουμε την (5.3.11). □

Θεώρημα 5.3.4 (δεύτερο θεώρημα αντικατάστασης). *Έστω $\psi : [a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, με $\psi'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αν $I=\psi([a,b])$ και $f : I\to\mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε*

$$\int_a^b f(\psi(t))\,dt = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(s)(\psi^{-1})'(s)\,ds. \tag{5.3.17}$$

Απόδειξη. Η ψ' είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $[a,b]$, άρα είναι παντού θετική ή παντού αρνητική στο $[a,b]$. Συνεπώς, η ψ είναι γνησίως μονότονη στο $[a,b]$. Αν, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέσουμε ότι η ψ είναι γνησίως αύξουσα τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $\psi^{-1} : I\to\mathbb{R}$ της ψ στο $I=\psi([a,b])=[\psi(a),\psi(b)]$. Εφαρμόζουμε το πρώτο θεώρημα αντικατάστασης για την $f\cdot(\psi^{-1})'$ (παρατηρήστε ότι η $(\psi^{-1})'$ είναι συνεχής στο I). Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f\cdot(\psi^{-1})' &= \int_a^b [(f\cdot(\psi^{-1})')\circ\psi]\psi' \\
&= \int_a^b (f\circ\psi)\cdot[(\psi^{-1})'\circ\psi]\psi' \\
&= \int_a^b (f\circ\psi)\cdot(\psi^{-1}\circ\psi)' \\
&= \int_a^b f\circ\psi.
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (5.3.17). □

5.4 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Σε αυτήν την παράγραφο επεκτείνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος για συναρτήσεις που δεν είναι φραγμένες ή είναι ορισμένες σε διαστήματα που δεν είναι κλειστά και φραγμένα. Θα αρκεστούμε σε κάποιες βασικές και χρήσιμες περιπτώσεις.

1. Υποθέτουμε ότι $b\in\mathbb{R}$ ή $b=+\infty$ και $f : [a,b)\to\mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση που είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann σε κάθε διάστημα της μορφής $[a,x]$, όπου $a<x<b$. Αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt \tag{5.4.1}$$

και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b)$ και ορίζουμε

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt.$$

Αν το «όριο» στην (5.4.1) είναι $\pm\infty$ τότε λέμε ότι το $\int_a^b f(t)\,dt$ αποκλίνει στο $\pm\infty$. Εντελώς ανάλογα ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ (όπου $a\in\mathbb{R}$ ή $a=-\infty$) που είναι ολοκληρώσιμη στο $[x,b]$ για κάθε $a<x<b$, να είναι το

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt,$$

αν το τελευταίο όριο υπάρχει.

Παραδείγματα

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Για κάθε $x>1$ έχουμε

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\,\Big|_1^x = 1-\frac{1}{x}.$$

Συνεπώς,

$$\int_1^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1.$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$. Για κάθε $x>1$ έχουμε

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln t\,\Big|_1^x = \ln x-\ln 1 = \ln x.$$

Συνεπώς,

$$\int_1^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\ln x = +\infty.$$

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln x$. Παρατηρήστε ότι η f δεν είναι φραγμένη: $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$. Για κάθε $x\in(0,1)$ έχουμε

$$\int_x^1 \ln t\,dt = t\ln t - t\,\Big|_x^1 = -1-x\ln x+x.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 f(t)\,dt = \lim_{x\to 0^+}(-1-x\ln x+x) = -1.$$

(δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,1)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Παρατηρήστε ότι η f δεν είναι φραγμένη: $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=+\infty$. Για κάθε $x\in(0,1)$ έχουμε

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = -2\sqrt{1-t}\,\Big|_0^x = 2-2\sqrt{1-x}.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{x\to 1^-}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to 1^-}(2-2\sqrt{1-x}) = 2.$$

(ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$. Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$\int_0^x \sin t \, dt = -\cos t \,|_0^x = \cos x - 1.$$

Αφού το όριο $\lim_{x\to\infty} (\cos x - 1)$ δεν υπάρχει, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \sin t \, dt$ δεν παίρνει κάποια τιμή.

2. Υποθέτουμε ότι $b \in \mathbb{R}$ ή $b = +\infty$ και $a \in \mathbb{R}$ ή $a = -\infty$. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση που είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann σε κάθε κλειστό διάστημα $[x, y]$, όπου $a < x < y < b$. Θεωρούμε τυχόν $c \in (a, b)$ και εξετάζουμε αν υπάρχουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_a^c f(t) \, dt \;\; \text{και} \;\; \int_c^b f(t) \, dt.$$

Αν υπάρχουν και τα δύο, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t) \, dt$ υπάρχει και είναι ίσο με

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^c f(t) \, dt + \int_c^b f(t) \, dt.$$

Παρατηρήστε ότι, σε αυτήν την περίπτωση, η τιμή του αθροίσματος στο δεξιό μέλος δεν εξαρτάται από την επιλογή του c στο (a, b) (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, το γενικευμένο ολοκλήρωμα ορίζεται καλά με αυτόν τον τρόπο. Αν κάποιο από τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^c f(t) \, dt$ και $\int_c^b f(t) \, dt$ δεν έχει τιμή, τότε λέμε ότι το $\int_a^b f(t) \, dt$ δεν ορίζεται (δεν έχει τιμή). Στις περιπτώσεις που κάποιο από τα δύο ή και τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα αποκλίνουν στο $\pm\infty$ ισχύουν τα συνήθη για τις μορφές $a \pm \infty$.

Παραδείγματα

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Έχουμε

$$\int_0^\infty f(t) \, dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{t}{t^2+1} \, dt = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{2} = +\infty.$$

Όμοια,

$$\int_{-\infty}^0 f(t) \, dt = -\infty.$$

Συνεπώς, το $\int_{-\infty}^\infty f(t) \, dt$ δεν ορίζεται: έχουμε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) + (-\infty)$.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Έχουμε

$$\int_0^\infty f(t) \, dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{t^2+1} \, dt = \lim_{x\to\infty} \arctan x = \pi/2.$$

Όμοια,

$$\int_{-\infty}^0 f(t) \, dt = \pi/2.$$

Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t^2+1} \, dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^2+1} \, dt + \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1} \, dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

5.4α′ Το κριτήριο του ολοκληρώματος

Έστω $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}^+$ μη αρνητική συνάρτηση, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, x]$, όπου $x > a$. Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

είναι αύξουσα στο $(a, +\infty)$. Συνεπώς, το

$$\int_a^\infty f(t)\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

υπάρχει αν και μόνο αν η F είναι άνω φραγμένη. Διαφορετικά, $\int_a^\infty f(t)\, dt = +\infty$.

Αντίστοιχο αποτέλεσμα είχαμε δεί για την σύγκλιση σειρών $\sum_{k=1}^\infty a_k$ με μη-αρνητικούς όρους. Μια τέτοια σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της είναι άνω φραγμένη. Διαφορετικά, αποκλίνει στο $+\infty$.

Το επόμενο θεώρημα δίνει ένα κριτήριο σύγκλισης για σειρές που γράφονται στη μορφή $\sum_{k=1}^\infty f(k)$, όπου $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι μια φθίνουσα μη-αρνητική συνάρτηση.

Θεώρημα 5.4.1. *Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ φθίνουσα συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Θεωρούμε την ακολουθία (a_k) με $a_k = f(k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Τότε, η σειρά μη αρνητικών όρων $\sum_{k=1}^\infty a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty f(t)\, dt$ υπάρχει.*

Απόδειξη. Από το γεγονός ότι η f είναι φθίνουσα προκύπτει άμεσα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[k, k+1]$ και

$$a_{k+1} = f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(t)\, dt \le f(k) = a_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^\infty a_k$ συγκλίνει, τότε για κάθε $x > 1$ έχουμε

$$\int_1^x f(t)\, dt \le \int_1^{[x]+1} f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{[x]} \int_k^{k+1} f(t)\, dt \le \sum_{k=1}^{[x]} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Έπεται ότι το

$$\int_1^\infty f(t)\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)\, dt$$

υπάρχει. Αντίστροφα, αν το $\int_1^\infty f(t)\, dt$ υπάρχει, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} s_n &= f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \le f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\, dt \\ &= f(1) + \int_1^n f(t)\, dt \le f(1) + \int_1^\infty f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Αφού η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=1}^\infty a_k$ είναι άνω φραγμένη, η σειρά συγκλίνει. □.

Παραδείγματα

(α) Η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ αποκλίνει διότι

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{t \ln t}\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_2^{x} \frac{1}{t \ln t}\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dy}{y} = \lim_{x\to\infty} (\ln(\ln x) - \ln(\ln 2)) = +\infty.$$

(β) Η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k (\ln k)^2}$ συγκλίνει διότι

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2}\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_2^{x} \frac{1}{t(\ln t)^2}\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dy}{y^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$