Απειροστικός Λογισμός ΙΙ (2010–11)

Βασικά θεωρήματα

1. Κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μία μονότονη υπακολουθία.

2. [Bolzano-Weierstrass] Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μία υπακολουθία που συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

3. (α) Κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη.

(β) Αν μια ακολουθία Cauchy (a_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε η (a_n) συγκλίνει.

(γ) Μια ακολουθία (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.

4. Αν $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$, τότε $a_n \to 0$.

5. Έστω (a_k) ακολουθία με $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνον αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη. Αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.

6. Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

7. Έστω $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ δύο σειρές με $a_k, b_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell > 0,$$

τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

8. [Κριτήριο λόγου] Έστω $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ μια σειρά με μη μηδενικούς όρους. Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, τότε η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

9. Έστω $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές a_k. Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στο $y \neq 0$ και αν $|x| < |y|$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο x.

10. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι ακολουθιών (x_n), (y_n) στο A με $x_n - y_n \to 0$ ισχύει $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

11. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$.

12. [Κριτήριο του Riemann] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P_ε του $[a,b]$ ώστε

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

13. Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

14. Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

15. [θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

16. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ της f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$.

17. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in [a, b]$, τότε η $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

18. Έστω $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ τότε

$$\int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a).$$

19. [Θεώρημα Taylor] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση $n + 1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και έστω $x_0 \in [a, b]$. Τότε, για κάθε $x \in [a, b]$,

(i) (μορφή Cauchy του υπολοίπου) Υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x ώστε

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - x_0).$$

(ii) (μορφή Lagrange του υπολοίπου) Υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x ώστε

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

(iii) (ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου) Αν η $f^{(n+1)}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n\,dt.$$