ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Συνόλων

Ενότητα: Επιλογές

Γιάννης Μοσχοβάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Σημειώματα

Σημειώμα ιστορικού εκδόσεων έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1. Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη στο σύνδεσμο http://www.math.ucla.edu/ ynm/lectures/g.pdf

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα αδειοδότησης

Διατήρηση σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΕΠΙΛΟΓΕΣ

8.1. Το Αξίωμα Επιλογής (Axiom of Choice), **AC**. Για κάθε διμελή σχέση $P \subseteq (A \times B)$ σε σύνολα A, B,

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)P(x, y) \Longrightarrow (\exists f : A \to B)(\forall x \in A)P(x, f(x)). \qquad \text{(8-1)}$$

Αυτό είναι το τελευταίο και πλέον επίμαχο αξίωμα του Zermelo. Για να καταλάβουμε πού χρειάζεται, ανακαλούμε το κλασικό παράδειγμα του Russell, όπου το A είναι σύνολο από ζευγάρια παπούτσια, $B = \bigcup A$ και

$$P(x, y) \iff y \in x.$$

Η συνάρτηση

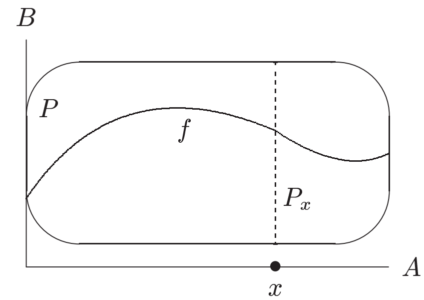
$$f(x) =_{\text{ορ}} \text{το αριστερό παπούτσι του } x, \quad (x \in A)$$

προφανώς επιλέγει ένα παπούτσι από κάθε ζευγάρι, συμβολικά $(\forall x \in A)P(x, f(x))$. Αν όμως το A είναι σύνολο από ζευγάρια *κάλτσες*, τότε δεν μπορούμε να *ορίσουμε* συνάρτηση $f : A \to \bigcup A$ που διαλέγει ακριβώς μία κάλτσα $f(x) \in x$ από κάθε ζευγάρι, επειδή (όπως δεχόμαστε για το παράδειγμα) ένα ζευγάρι κάλτσες αποτελείται από δύο τελείως όμοια αντικείμενα. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει συνάρτηση επιλογής f αν το A είναι πεπερασμένο, με επαγωγή στον αριθμό μελών του A (Πρόβλημα **x8.1**). Αλλά οι μαθηματικοί έχουν την ικανότητα να φαντάζονται και να μελετούν άπειρα ζευγάρια καλτσών, και γι' αυτά χρειαζόμαστε κάτι σαν το Αξίωμα Επιλογής για να εγγυηθούμε την ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης.

Λιγότερο διασκεδαστικό αλλά σημαντικότερο παράδειγμα είναι η απόδειξη του βασικού θεωρήματος **2.10**, όπου θεωρούμε μιαν ακολουθία απαριθμητών συνόλων A_0, A_1, $\ldots$ και αρχίζουμε με τη φράση:

> Αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα στην ειδική περίπτωση που κανένα A_n δεν είναι κενό, οπότε μπορούμε να βρούμε απαρίθμηση $\pi_n : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A_n$ για κάθε A_n.

Ίσως για κάθε n να «μπορούμε να βρούμε» (δηλαδή να «υπάρχει») κάποια απαρίθμηση π του A_n, αλλά η συνέχεια της απόδειξης χρειάζεται μια *συνάρτηση* $(n \mapsto \pi_n)$ που αντιστοιχίζει κάποια συγκεκριμένη απαρίθμηση π_n σε κάθε n: ποιο από τα αξιώματα (**I**) – (**VI**) εγγυάται την ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης;



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **8.1**. Επιλογέας του $P \subseteq A \times B$.

εδώ $A = \mathbb{N}$, $B = (\mathbb{N} \to \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n)$ και

$$P(n, \pi) \iff \pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A_n,$$

έτσι ώστε $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists \pi \in B)P(n, \pi)$ από την υπόθεση ότι κάθε A_n είναι μη κενό και απαριθμητό: και το Αξίωμα Επιλογής βεβαιώνει ακριβώς ότι υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to B$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η τιμή $f(n) = \pi_n$ ικανοποιεί την $P(n, \pi_n)$, δηλαδή απαριθμεί το A_n. Τέτοιες «σιωπηρές» επικλήσεις του Αξιώματος Επιλογής είναι πολύ κοινές στα μαθηματικά και ειδικότερα στην ανάλυση, όπου (π.χ.) η κλασική θεωρία ορίων και συνεχών συναρτήσεων δεν μπορεί να αναπτυχθεί ικανοποιητικά χωρίς επιλογές.

Αν εικονίσουμε τη σχέση $P \subseteq A \times B$ ως υποσύνολο του γινομένου, τότε η υπόθεση $(\forall x \in A)(\exists y \in B)P(x, y)$ σημαίνει ότι η *τομή*

$$P_x =_{\text{op}} \{y \in B \mid P(x, y)\} \tag{8-2}$$

πάνω από κάθε $x \in A$ δεν είναι κενή. Το Αξίωμα Επιλογής εγγυάται την ύπαρξη ενός *επιλογέα* (selector) για το P, μιας συνάρτησης $f : A \to B$ που αντιστοιχίζει σε κάθε $x \in A$ ακριβώς ένα σημείο στην τομή από πάνω του. Υπάρχουν ακόμη δύο απλές εκδοχές του αξιώματος που εκφράζουν με διαφορετικούς τρόπους την πράξη της «συνάθροισης σε ολότητα» οποιουδήποτε πλήθους ελεύθερων και μη συγκρουόμενων επιλογών.

8.2. Ορισμός. Το σύνολο S είναι **σύνολο επιλογής** (choice set) για μια οικογένεια συνόλων $\mathcal{E}$, αν (1) $S \subseteq \bigcup \mathcal{E}$, και (2) για κάθε $X \in \mathcal{E}$, η τομή $S \cap X$ είναι μονοσύνολο. Ένα σύνολο επιλογής S *επιλέγει* από κάθε $X \in \mathcal{E}$ το μοναδικό μέλος της τομής $S \cap X$.

8.3. Άσκηση. *Αν $\emptyset \in \mathcal{E}$, τότε η $\mathcal{E}$ δεν επιδέχεται σύνολο επιλογής. Επίσης αν $a \neq b$, τότε η οικογένεια $\mathcal{E} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b\}\}$ δεν επιδέχεται σύνολο επιλογής.*

8.4. Θεώρημα. *Το Αξίωμα Επιλογής είναι ισοδύναμο με το εξής: κάθε οικογένεια $\mathcal{E}$ μη κενών και ξένων ανά δύο συνόλων επιδέχεται σύνολο επιλογής.*

Αυτή είναι η μορφή του **AC** που διατύπωσε ο Zermelo.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αποδεχόμαστε πρώτα το Αξίωμα Επιλογής και θέτουμε $U = \bigcup \mathcal{E}$, όπου η $\mathcal{E}$ είναι οικογένεια ξένων ανά δύο, μη κενών συνόλων. Αυτό σημαίνει εν μέρει ότι

$$(\forall X \in \mathcal{E})(\exists x \in U)[x \in X],$$

άρα από το Αξίωμα Επιλογής υπάρχει συνάρτηση $f : \mathcal{E} \to U$ τέτοια ώστε

$$(\forall X \in \mathcal{E})[f(X) \in X].$$

Θέτουμε $S = f[\mathcal{E}] = \{f(X) \mid X \in \mathcal{E}\}$, και το γεγονός ότι τα μέλη της $\mathcal{E}$ είναι ξένα ανά δύο συνεπάγεται εύκολα ότι το S τέμνει κάθε μέλος της $\mathcal{E}$ σε μονοσύνολο.

Για το αντίστροφο, δεχόμαστε ότι

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)P(x, y),$$

και θέτουμε

$$\mathcal{E} = \{U_x \mid x \in A\},$$

όπου για κάθε $x \in A$,

$$U_x = \{(t, y) \in P \mid t = x\}.$$

Κάθε μέλος της $\mathcal{E}$ είναι μη κενό από την υπόθεση και καθορίζεται από το κοινό, πρώτο μέρος όλων των μελών του, και επομένως τα μέλη της $\mathcal{E}$ είναι ξένα ανά δύο. Αν το S είναι σύνολο επιλογής για την $\mathcal{E}$, τότε η συνάρτηση

$$f(x) = \text{το μοναδικό } y \text{ τέτοιο ώστε } (x, y) \in S$$

εύκολα ικανοποιεί το συμπέρασμα του Αξιώματος Επιλογής. ⊣

8.5. Ορισμός. Συνάρτηση επιλογής για ένα σύνολο A είναι μια μερική συνάρτηση

$$\varepsilon : \mathcal{P}(A) \rightharpoonup A,$$

τέτοια ώστε

$$\emptyset \neq X \subseteq A \Longrightarrow \varepsilon(X)\downarrow \ \& \, \varepsilon(X) \in X.$$

8.6. Λήμμα. *Το Αξίωμα Επιλογής είναι ισοδύναμο με το εξής: κάθε σύνολο επιδέχεται συνάρτηση επιλογής.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε A, προφανώς

$$(\forall X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\})(\exists y \in A)[y \in X],$$

και αμέσως από το Αξίωμα Επιλογής, υπάρχει συνάρτηση $\varepsilon : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ τέτοια ώστε

$$(\forall X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\})[\varepsilon(X) \in X].$$

Το αντίστροφο είναι εύκολο και το αφήνουμε για άσκηση. ⊣

8.7. Άσκηση. *Αν κάθε σύνολο επιδέχεται συνάρτηση επιλογής, τότε αληθεύει το Αξίωμα Επιλογής.*

8.8. Όμως αληθεύει; (1) Με την πλέον άμεση ερμηνεία του, το Αξίωμα Επιλογής αιτιάται ότι αν η καθεμία ενός συνόλου μη συγκρουόμενων επιλογών μπορεί να πραγματοποιηθεί, τότε όλες μπορούν να πραγματοποιηθούν ανεξάρτητα και τα αποτελέσματα να συναθροιστούν σε ολότητα, να γίνουν σύνολο. Αν το καταλάβουμε έτσι, το Αξίωμα Επιλογής είναι προφανές, μπορεί να δικαιολογηθεί από τη φυσική ερμηνεία του Αξιώματος Δυναμοσυνόλου: όταν δεχόμαστε ως σύνολο την κλάση $\{X \mid X \subseteq A\}$ όλων των υποσυνόλων του A, πραγματικά εννοούμε *όλων* των υποσυνόλων του A, ακόμη και αυτών για τα οποία το κριτήριο του τι τους ανήκει δεν καθορίζεται από κάποιο ρητό κανόνα αλλά με ελεύθερη επιλογή, «με την τύχη».

Το Αξίωμα Επιλογής είναι διαφορετικό από τα προηγούμενα «κατασκευαστικά» αξιώματα (**II**) – (**VI**), επειδή *απαιτεί κατευθείαν* την ύπαρξη συνόλων για τα οποία δεν παρέχει ορισμούς. Καθένα από τα (**II**) – (**VI**) απονέμει την ιδιότητα του συνόλου σε μια συγκεκριμένη, ρητά ορισμένη κλάση αντικειμένων, νομιμοποιεί μια ειδική περίπτωση της τόσο αληθοφανούς (αν και λανθασμένης) Γενικής Αρχής Συμπερίληψης **3.3**. *Το Αξίωμα Επιλογής είναι το μόνο αξίωμα του Zermelo εκτός απ' αυτό της Έκτασης που δεν είναι ειδική περίπτωση της Γενικής Αρχής Συμπερίληψης.* Αυτό παρεξηγείται μερικές φορές και προτείνεται το επιχείρημα ότι το Αξίωμα Επιλογής είναι το μόνο που *απαιτεί την ύπαρξη* αντικειμένων για τα οποία δεν παρέχει ορισμούς, αλλά τα Αξιώματα Έκτασης και Δυναμοσυνόλου κάνουν το ίδιο πράγμα, με έμμεσο αλλά θεμελιακά πιο βασικό τρόπο.

Ο Zermelo εισήγαγε το Αξίωμα Επιλογής το 1904, σε μια μικρή εργασία όπου το επικαλέστηκε για να αποδείξει ότι κάθε σύνολο είναι καλά διατάξιμο. Ήταν γνωστή εικασία, και ο Cantor είχε ήδη προτείνει περίγραμμα απόδειξής της σ' ένα (τότε ακόμη) αδημοσίευτο γράμμα στον Dedekind. Η απόδειξη του Cantor όμως (και η σχετική απόδειξη της Εικασίας Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων που πρότεινε μαζί της) στηριζόταν σε διαισθήσεις για τα σύνολα που δεν ήταν τελείως ξεκάθαρες. Ο Zermelo ξεκαθάρισε απαρχής ότι η δική του, αυστηρή απόδειξη στηριζόταν στο Αξίωμα Επιλογής, και μ' αυτό προκάλεσε αμέσως ισχυρή επίθεση εναντίον του από πολλούς διακεκριμένους μαθηματικούς της εποχής, που τον κατηγόρησαν ότι εισήγαγε μια νέα, αμφίβολη μέθοδο για να δικαιολογήσει ένα απίθανο αποτέλεσμα. Δεδομένου ότι αρχές επιλογής δεν ήταν με κανένα τρόπο ανήκουστες στα γενικά μαθηματικά και ότι διαπότιζαν την προηγούμενη δουλειά του Cantor, δικαιολογείται κανείς να πει ότι η αιτία της αντίδρασης ήταν λιγότερο το νόημα του Αξιώματος Επιλογής και περισσότερο η κατανόηση της δύναμής του.

Στο επόμενο θεώρημα απαριθμούμε τις πλέον περιώνυμες προτάσεις για τα σύνολα που είναι ισοδύναμες με το Αξίωμα Επιλογής. Έχουμε διατηρήσει τα παραδοσιακά ονόματα γι' αυτές τις προτάσεις—Λήμμα, Υπόθεση, Θεώρημα—που τους προσκολλήθηκαν από την ιστορική συγκυρία του πώς και πότε μπήκαν στη μαθηματική βιβλιογραφία.

8.9. Θεώρημα. *Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(1) **Το Αξίωμα Επιλογής**: *Κάθε σύνολο επιδέχεται συνάρτηση επιλογής.*

(2) **Η Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων**: *Τα σύνολα είναι συγκρίσιμα ανά δύο ως προς το πλήθος, δηλαδή για όλα τα A, B, είτε $A \leq_c B$ είτε $B \leq_c A$.*

(3) **Το Θεώρημα Καλής Διάταξης**: *Κάθε σύνολο είναι καλά διατάξιμο* (επιδέχεται καλή διάταξη).

Αποδειξη. Επαληθεύουμε κυκλικά, ότι καθεμιά απ' αυτές τις προτάσεις συνεπάγεται την επόμενη, και τελικά (3) $\Longrightarrow$ (1).

(1) $\Longrightarrow$ (2). Από την Άσκηση **6.17**, ο χώρος $(A \rightarrowtail B)$ των μερικών μονομορφισμών από το A στο B είναι επαγωγικός. Η ιδέα είναι ότι μπορούμε να ορίσουμε (χρησιμοποιώντας το **AC**) μια επεκτατική απεικόνιση στο $(A \rightarrowtail B)$, η οποία να επεκτείνει κατάλληλα κάθε μερικό μονομορφισμό $p : A \rightarrowtail B$ με πεδίο ορισμού που να μην εξαντλεί το A και πεδίο τιμών που να μην εξαντλεί το B. Οποιοδήποτε σταθερό σημείο αυτής της απεικόνισης είτε θα ορίζεται σε ολόκληρο το A, φαναιρώνοντας ότι $A \leq_c B$, είτε η εικόνα του θα είναι ολόκληρο το B, φαναιρώνοντας ότι $B \leq_c A$.

Αναλυτικότερα, έστω

$$\varepsilon_A : \mathcal{P}(A) \rightharpoonup A, \quad \varepsilon_B : \mathcal{P}(B) \rightharpoonup B$$

συναρτήσεις επιλογής στα A και B, από το Αξίωμα Επιλογής. Για κάθε μερικό μονομορφισμό $p : A \rightarrowtail B$, θέτουμε

$$\pi(p) = \begin{cases} p \cup \{(\varepsilon_A(A \setminus \mathrm{Domain}(p)), \varepsilon_B(B \setminus \mathrm{Image}(p)))\}, \\ \qquad\qquad \text{if } \mathrm{Domain}(p) \subsetneq A \,\&\, \mathrm{Image}(p) \subsetneq B, \\ p, \qquad \text{otherwise.} \end{cases}$$

Η π είναι προφανώς επεκτατική, και έτσι από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου **7.35** έχει σταθερό σημείο $p^* : A \rightharpoonup B$, για το οποίο ισχύει:

$$\text{είτε } \mathrm{Domain}(p^*) = A \text{ είτε } \mathrm{Image}(p^*) = B.$$

Περιπτωση 1. $\mathrm{Domain}(p^*) = A$. Τότε η $p^* : A \rightarrowtail B$ είναι μονομορφισμός από το A στο B, έτσι που $A \leq_c B$.

Περιπτωση 2, $\mathrm{Image}(p^*) = B$. Σε αυτήν την περίπτωση, η p^* είναι αντιστοιχία του $\mathrm{Domain}(p^*)$ με το B, και έτσι $B =_c \mathrm{Domain}(p^*) \subseteq A$ και άρα $B \leq_c A$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Από την Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων, είτε $A \leq_c h(A)$ είτε $h(A) \leq_c A$, όπου $h(A)$ είναι το σύνολο Hartogs για το A· όμως $h(A) \not\leq_c A$ από το Θεώρημα Hartogs **7.34**, και έτσι $A \leq_c h(A)$· επί πλέον, το $h(A)$ είναι καλά διατάξιμο, και άρα από την Άσκηση **7.3** καλά διατάξιμο είναι και το A.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Αν η $\leq$ είναι καλή διάταξη του A, τότε η μερική συνάρτηση

$$\varepsilon(X) = \text{το } \leq\text{-ελάχιστο μέλος του } X$$

είναι συνάρτηση επιλογής για το A. $\dashv$

8.10. Όμως αληθεύει; (2) Το νόημα αυτού του θεωρήματος είναι ότι αν δεχτούμε τα βασικά, κατασκευαστικά πρώτα έξι αξιώματα του Zermelo, τότε το Αξίωμα Επιλογής, η Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων και το Θεώρημα Καλής Διάταξης εκφράζουν με τρεις διαφορετικούς τρόπους την ίδια συνολοθεωρητική αρχή. Χωρίς αμφιβολία, το Αξίωμα Επιλογής είναι η πλέον άμεση και διάφανη εκδοχή αυτής της αρχής, αυτή που κάνει «προφανέστατη» την αλήθεια της. Η Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων είναι εύκολα κατανοητή και αληθοφανής, αλλά λίγοι θα τη δέχονταν ως αξίωμα, έχει την υφή τεχνικής εικασίας που χρήζει απόδειξης. Τέλος, το Θεώρημα Καλής Διάταξης είναι οπωσδήποτε πεντακάθαρο στο νόημά του, δίνει ένα μηχανισμό επιλογών που κατά κάποιο τρόπο «επεξηγεί» το Αξίωμα Επιλογής, αλλά οπωσδήποτε δεν είναι προφανές, τουναντίον γεννά δυσπιστία. Παραδείγματος χάριν, ποια είναι η καλή διάταξη που εγγυάται το θεώρημα στο δυναμοσύνολο των φυσικών αριθμών $\mathcal{P}(\mathbb{N})$; Χωρίς κάποια σκέψη δεν είναι καν προφανές ότι το $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ επιδέχεται γραμμικές διατάξεις, βλ. Πρόβλημα **x8.9**. Είναι κάπως δύσκολο να φανταστούμε τη δομή της απαιτούμενης καλής διάταξης του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, και αυτό, φυσικά, μας δημιουργεί κάποιες αμφιβολίες για το αξίωμα που συνεπάγεται την ύπαρξή της. Δεν είναι περίεργο ότι η αντιλογία για το Αξίωμα Επιλογής άρχισε με την απόδειξη από τον Zermelo της συνεπαγωγής (1) $\Longrightarrow$ (3), της οποίας το συμπέρασμα ακόμη και σήμερα πολλοί θεωρούν αντίθετο με τις διαισθήσεις μας.

Πέρα από την Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων και το Θεώρημα Καλής Διάταξης που είναι θεμελιώδη για την ανάπτυξη της συνολοθεωρίας, το Αξίωμα Επιλογής είναι ισοδύναμο με ένα σωρό προτάσεις που χρησιμεύουν πολύ σε άλλους κλάδους των μαθηματικών. Εδώ αναφέρουμε μονάχα δύο από αυτές, που βρίσκονται πιο κοντά στο αντικείμενό μας και τις οποίες εύκολα αποδεικνύουμε με γνωστές μας μεθόδους· όμως υπάρχουν ακόμα πολλές άλλες.[18]

8.11. Θεώρημα. *Το Αξίωμα Επιλογής είναι ισοδύναμο με τις ακόλουθες δύο προτάσεις:*

(1) **Αρχή Μεγιστικής Αλυσίδας**: *Κάθε μερικά διατεταγμένος χώρος P έχει μια μεγιστική αλυσίδα $S \subseteq P$, με την έννοια ότι για κάθε άλλη αλυσίδα S', $S \subseteq S' \Longrightarrow S = S'$.*

(2) **Λήμμα του Zorn**: *Αν σε ένα μερικά διατεταγμένο χώρο P κάθε αλυσίδα έχει άνω φράγμα, τότε ο P έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. **AC** $\Longrightarrow$ (1). Δεχόμενοι το **AC**, έστω $(\text{Chains}(P), \subseteq)$ ο μερικά διατεταγμένος χώρος όλων τον αλυσίδων του P, ο οποίος είναι επαγωγικός από την Πρόταση **6.14**, και υποθέτουμε προς άτοπο ότι δεν υπάρχει μεγιστική αλυσίδα, έτσι που από το **AC**,

$$(\forall S \in \text{Chains}(P))(\exists S' \in \text{Chains}(P))[S \subsetneq S'].$$

[18] Σε μία διάλεξή του, ο Kenneth Hoffman είπε ότι το Θεώρημα Tychonoff της γενικής τοπολογίας είναι «προφανώς» ισοδύναμο με το Αξίωμα Επιλογής, «μιας και όλες οι ύποπτες γενικές αρχές είναι ισοδύναμες με το **AC**».

τώρα το **AC** μας δίνει μια απεικόνιση $\pi : \mathrm{Chains}(P) \to \mathrm{Chains}(P)$ που είναι επεκτατική, χωρίς να έχει σταθερό σημείο, που αντιτίθεται το Θεώρημα Σταθερού Σημείου **7.35**.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Από την υπόθεση μπορούμε να θεωρήσουμε S είναι μια μεγιστική αλυσίδα του P και M ένα άνω φράγμα του S. Τότε το M είναι μεγιστικό στο P—επειδή αν $M <_P M'$, τότε το $S \cup \{M'\}$ θα ήταν αλυσίδα που επεκτείνει αυστηρά την S.

(2) $\Longrightarrow$ **AC**. Για δύο σύνολα A, B, θεωρούμε το χώρο $(A \rightarrowtail B)$ των μερικών μονομορφισμών. Αυτός είναι επαγωγικός, από την Άσκηση **6.17**, και έτσι κάθε αλυσίδα είναι άνω φραγμένη σε αυτόν· από το Λήμμα του Zorn, ο $(A \rightarrowtail B)$ έχει μεγιστικό στοιχείο f, το οποίο (όπως και στην απόδειξη του (1) $\Longrightarrow$ (2) στο Θεώρημα **8.9**) φαναιρώνει ότι είτε $A \leq_c B$ είτε $B \leq_c A$, το οποίο με τη σειρά του συνεπάγεται το **AC**. $\dashv$

Θεωρούμε τώρα δύο εύκολα πορίσματα του Αξιώματος Επιλογής που εκφράζουν απλούστερες αρχές επιλογής.

8.12. Αρχή Απαριθμητής Επιλογής (Countable Principle of Choice), $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$. Για κάθε σύνολο B και κάθε διμελή σχέση $P \subseteq \mathbb{N} \times B$ ανάμεσα σε φυσικούς αριθμούς και μέλη του B,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists y \in B)P(n, y) \Longrightarrow (\exists f : \mathbb{N} \to B)(\forall n \in \mathbb{N})P(n, f(n)).$$

8.13. (**VII**) **Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών** (Axiom of Dependent Choices), **DC**. Για κάθε σύνολο A και κάθε σχέση $P \subseteq A \times A$,

$$\begin{aligned} &a \in A \,\&\, (\forall x \in A)(\exists y \in A)P(x, y) \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow (\exists f : \mathbb{N} \to A)[f(0) = a \,\&\, (\forall n \in \mathbb{N})P(f(n), f(n+1))]. \end{aligned}$$

Σε αντιπαράθεση με το πλήρες Αξίωμα Επιλογής που απαιτεί την ύπαρξη συναρτήσεων επιλογής $f : A \to B$ για όλα τα A, B, η Αρχή Απαριθμητής Επιλογής $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ δικαιολογεί μόνο ακολουθία ελεύθερων (ανεξάρτητων) επιλογών από το B, που ικανοποιούν διαδοχικά τις συνθήκες

$$P(0, f(0)),\ P(1, f(1)),\ P(2, f(2)), \cdots$$

Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών επίσης δικαιολογεί μόνο ακολουθία επιλογών, όπου όμως η καθεμιά απ' αυτές τις επιλογές μπορεί να εξαρτάται από την προηγούμενη, αφού όλες τώρα πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες

$$P(f(0), f(1)),\ P(f(1), f(2)),\ P(f(2), f(3)), \cdots$$

Είναι εύκολα ισοδύναμο με την εξής, φαινομενικά ισχυρότερη αρχή που επιτρέπει σε κάθε επιλογή να εξαρτάται απ' όλες τις προηγούμενές της.

8.14. Πρόταση. *Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών είναι ισοδύναμο με την εξής πρόταση: για κάθε σύνολο A και κάθε σχέση $P \subseteq A^* \times A$ μεταξύ λέξεων και στοιχείων του A,*

$$(\forall u \in A^*)(\exists x \in A)P(u, x) \Longrightarrow (\exists f : \mathbb{N} \to A)(\forall n)P(\overline{f}(n), f(n)).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη απ' αυτή την εκδοχή του **DC** της «επίσημης» είναι εύκολη και την αφήνουμε για άσκηση. Για το αντίστροφο, δεχόμαστε το **DC** και την υπόθεση της φαινομενικά ισχυρότερης εκδοχής του, και ορίζουμε στο A^* τη σχέση

$$Q(u,v) \iff_{\text{ορ}} (\exists x \in A)[v = u \star \langle x \rangle \,\&\, P(u,x)];$$

προφανώς έχουμε $(\forall u \in A^*)(\exists v \in A^*)Q(u,v)$, το **DC** μας δίνει μια συνάρτηση $g : \mathbb{N} \to A^*$ τέτοια ώστε $g(0) = \emptyset$ και $(\forall n)Q(g(n), g(n+1))$, και η συνάρτηση που χρειαζόμαστε είναι η $f = \bigcup g$, για την οποία ισχύει $f(n) = g(n+1)(n)$ και $\overline{f}(n) = g(n)$. ⊣

8.15. Άσκηση. *Δείξε την άλλη κατεύθυνση της Πρότασης* **8.14**.

8.16. Θεώρημα. (1) *Το Αξίωμα Επιλογής συνεπάγεται το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών.*

(2) *Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών συνεπάγεται την Αρχή Απαριθμητής Επιλογής.*

Απόδειξη. (1) Έστω $\varepsilon : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ συνάρτηση επιλογής για το A. Αν ισχύει η υπόθεση του **DC**, τότε η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$ που χρειαζόμαστε για το συμπέρασμά του ορίζεται με την αναδρομή:

$$\begin{aligned} f(0) &= a, \\ f(n+1) &= \varepsilon(\{y \in A \mid P(f(n), y)\}). \end{aligned}$$

(2) Δεχόμαστε την υπόθεση της Αρχής Απαριθμητής Επιλογής και θέτουμε $A = \mathbb{N} \times B$ και $a = (0, b)$, όπου $b \in B$ είναι σημείο τέτοιο ώστε $P(0, b)$. Στο A ορίζουμε τη σχέση

$$Q((n,x),(m,y)) \iff_{\text{ορ}} m = n+1 \,\&\, P(m,y).$$

Η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times B$ που εγγυάται το **DC** γι' αυτά τα a και Q αποδίδει ζεύγη ως τιμές, οπότε $f(n) = (g(n), h(n))$ με $g(0) = 0$ και $h(0) = b$ για κατάλληλες συναρτήσεις g, h, και για κάθε n, $g(n+1) = g(n)+1$, $P(g(n+1), h(n+1))$. Συνάγεται ότι για κάθε n, $g(n) = n$ και $P(n, h(n))$, όπως πρέπει για το συμπέρασμα της Αρχής Απαριθμητής Επιλογής. ⊣

Χρειαζόμαστε έναν ακόμη ορισμό για τη διατύπωση της πιο χρήσιμης εκδοχής του Αξιώματος Εξαρτημένων Επιλογών.

8.17. Ορισμός. Ένα γράφημα $(G, \to_G)$ είναι **εδραιωμένο** (grounded) ή **καλά θεμελιωμένο** (well founded) αν κάθε μη κενό υποσύνολο του G έχει *ελαχιστικό σημείο*, δηλαδή

$$\text{αν } \emptyset \neq X \subseteq G, \text{ τότε } (\exists m \in X)(\forall x \in X)[m \not\to_G x]. \tag{8-3}$$

Ένας μερικά διατεταγμένος χώρος $(P, \leq)$ είναι **εδραιωμένος** αν το σχετικό «αντίστροφο αυστηρό γράφημα» $(P, >)$ είναι εδραιωμένο, αν δηλαδή για κάθε X,

$$\text{αν } \emptyset \neq X \subseteq P, \text{ τότε } (\exists m \in X)(\forall x \in X)[x \leq m \Longrightarrow x = m]. \tag{8-4}$$

8.18. Άσκηση. *Δείξε ότι μια γραμμική διάταξη $(P, \leq)$ είναι εδραιωμένη αν και μόνον αν είναι καλή διάταξη.*

8.19. Πρόταση. *Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών είναι ισοδύναμο με την εξής πρόταση: ένα γράφημα G είναι εδραιωμένο αν και μόνον αν δεν επιδέχεται* **άπειρες, φθίνουσες αλυσίδες**, *δηλαδή αν δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to G$ τέτοια ώστε για κάθε n, $f(n) \to_G f(n+1)$,*

$$f(0) \to_G f(1) \to_G f(2) \to_G \cdots .$$

Απόδειξη. Πρώτα δεχόμαστε το $\mathbf{DC}$. Αν η $f : \mathbb{N} \to G$ είναι άπειρη, φθίνουσα αλυσίδα, τότε το σύνολο $\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ δεν έχει ελαχιστικό σημείο, άρα το G δεν είναι εδραιωμένο. Αντιστρόφως, αν το G έχει μη κενό υποσύνολο X χωρίς ελαχιστικό σημείο, τότε $(\forall x \in X)(\exists y \in X)[x \to_G y]$ και το $\mathbf{DC}$ μας δίνει μια άπειρη, φθίνουσα αλυσίδα ξεκινώντας με κάποιο $a \in X$.

Δεχόμαστε τώρα ότι κάθε γράφημα χωρίς άπειρες, φθίνουσες αλυσίδες είναι εδραιωμένο και τις υποθέσεις $a \in A$ και

$$(\forall x \in A)(\exists y \in A)P(x, y)$$

του αξιώματος $\mathbf{DC}$, και θεωρούμε το γράφημα $(A, \to_A)$ όπου

$$x \to_A y \iff_{\text{ορ}} P(x, y) \quad (x, y \in A).$$

Το συμπέρασμα του $\mathbf{DC}$ εγγυάται ακριβώς ότι το $(A, \to_A)$ έχει μιαν άπειρη, φθίνουσα αλυσίδα που ξεκινά με το a, έτσι ώστε αν δεν ισχύει, υπάρχει κάποιο ελαχιστικό στοιχείο $m \in A$· αυτό σημαίνει ακριβώς ότι $(\forall y \in A)\neg P(m, y)$, που είναι ενάντιο στην υπόθεση του $\mathbf{DC}$. ⊣

Τα εδραιωμένα γραφήματα έχουν πολλές από τις ιδιότητες των καλά διατεταγμένων χώρων, και ιδιαίτερα μπορούμε να αποδείξουμε προτάσεις με επαγωγή και να ορίσουμε συναρτήσεις με αναδρομή σ' αυτά, βλ. τα Προβλήματα **x8.10**, **x8.11** και το Θεώρημα **11.5**. Η εύκολη κατεύθυνση αυτού του θεωρήματος κάνει το $\mathbf{DC}$ ιδιαίτερα χρήσιμο στη μελέτη τους, επειδή είναι συνήθως πολύ ευκολότερο να επαληθεύσουμε ότι δεν υπάρχουν άπειρες, φθίνουσες αλυσίδες σε κάποιο γράφημα G παρά να αποδείξουμε κατευθείαν ότι το G είναι εδραιωμένο.

8.20. Όμως αληθεύει; (3) Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι πριν διατυπωθεί αυστηρά από τον Zermelo, το Αξίωμα Επιλογής είχε πολλές φορές χρησιμοποιηθεί «σιωπηρά» στα κλασικά μαθηματικά, και ιδιαίτερα στην ανάλυση. Όμως *αυτές οι κλασικές εφαρμογές μπορούν όλες να στηριχτούν στο Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών*, και μάλιστα οι περισσότερες απαιτούν μόνο την ασθενέστερη Αρχή Απαριθμητής Επιλογής. Αυτό θα γίνει προφανές στο Κεφάλαιο **10** και στο Παράρτημα **A**. Ο Zermelo δέχτηκε το πλήρες Αξίωμα Επιλογής επειδή είναι φυσική υπόθεση στο πλαίσιο της συνολοθεωρίας του Cantor· επειδή χρειάζεται για την απόδειξη του Θεωρήματος Καλής Διάταξης και της Εικασίας Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων· και επειδή είναι απαραίτητο για την ανάπτυξη της πληθικής αριθμητικής. Αυτή η διαφορά ανάμεσα στις αρχές επιλογής που χρειάζονται για τα κλασικά μαθηματικά και αυτές που είναι απαραίτητες για την καινούργια θεωρία συνόλων του Cantor εξηγεί κατά μεγάλο μέρος την άγρια αντίδραση στα αξιώματα του Zermelo από τους διακεκριμένους αναλύστες της εποχής του (εν οις και ο πολύς Borel), που είχαν στηρίξει πολλά από τα θεωρήματά τους σε αρχές επιλογής—και εξακολούθησαν να χρησιμοποιούν τέτοιες αρχές ενώ συγχρόνως αποδοκίμαζαν τη γενική συνολοθεωρία ως μια ψευδαίσθηση: για τη θεμελίωση της κλασικής ανάλυσης του 19ου αιώνα, αρκεί το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών, ενώ το γενικότερο Αξίωμα Επιλογής δε χρειάζεται, και επιπλέον έχει μερικά αντιδιαισθητικά πορίσματα, όπως το Θεώρημα Καλής Διάταξης.

Εδώ όμως πρέπει να παρατηρήσουμε ότι και στη γενική συνολοθεωρία, όπου γενικά δεχόμαστε το πλήρες Αξίωμα Επιλογής ως προφανές, πολλά από τα βασικά θεωρήματα δεν το χρειάζονται και ειδικότερα *όλα τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου* **2** *μπορούν να στηριχτούν αξιωματικά στο Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών.* Πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε ότι αποδείξαμε όλα τα βασικά αποτελέσματα σχετικά με τους καλά διατεταγμένους χώρους στο προηγούμενο κεφάλαιο, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε καμία αρχή επιλογής. Γι' αυτό το λόγο θα αποκλίνουμε τεχνικά από τον Zermelo και θα δεχτούμε ως βασικό αξίωμα το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών αντί του ισχυρότερου, πλήρους Αξιώματος Επιλογής. Λέμε «τεχνικά», επειδή δεν έχουμε αμφιβολίες για την αλήθεια του Αξιώματος Επιλογής, και ποτέ δεν θα διστάσουμε να το επικαλεστούμε όταν χρειάζεται, μόνο που σε τέτοιες περιπτώσεις θα το συμπεριλαμβάνουμε (διακριτικά) ανάμεσα στις υποθέσεις.

8.21. Η αξιωματική θεωρία ZDC. Το αξιωματικό σύστημα **ZDC** αποτελείται από τα κατασκευαστικά αξιώματα (**I**) – (**VI**) του Κεφαλαίου **3** και το Αξίωμα (**VII**) Εξαρτημένων Επιλογών **8.13**. Συμβολικά:

$$\mathbf{ZDC} = (\mathbf{I}) - (\mathbf{VI}) + \mathbf{DC} = (\mathbf{I}) - (\mathbf{VII}).$$

Από τώρα και μέχρι το Κεφάλαιο **11**, θα χρησιμοποιούμε στις αποδείξεις χωρίς ρητή επίκληση τα αξιώματα της **ZDC**. Όταν χρειαζόμαστε το πλήρες Αξίωμα Επιλογής, θα σημειώνουμε τις σχετικές προτάσεις με το σημάδι (**AC**). Στο Κεφάλαιο **11** θα συμπληρώσουμε την αξιωματοποίησή μας προσθέτοντας στην **ZDC** το *Αξίωμα Αντικατάστασης*.

8.22. Αποτελέσματα συνέπειας και ανεξαρτησίας (consistency, independence). Μήπως είναι εφικτό να καταστείλουμε την αντιγνωμία για το Αξίωμα Επιλογής απλώς *αποδεικνύοντας ή διαψεύδοντάς* το με τα κατασκευαστικά αξιώματα (**I**) – (**VI**); Κανένα από τα δύο ενδεχόμενα δεν μοιάζει πιθανό. Αφενός το **AC** κατά πάσα πιθανότητα αληθεύει, όπως αληθεύουν και τα (**I**) – (**VI**), και βεβαίως δεν μπορούμε να διαψεύσουμε αληθή πρόταση με χρήση αληθών αξιωμάτων. Αφετέρου, το **AC** έχει τη μορφή γνήσια νέας αρχής της συνολοθεωρίας και δεν μοιάζει πιθανό ότι θα μπορέσουμε να το αποδείξουμε από τις άλλες μόνο με τη λογική. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν αυστηρές αποδείξεις ότι το Αξίωμα Επιλογής ούτε αποδείχνεται ούτε και διαψεύδεται από τα αξιώματα (**I**) – (**VI**).

Ο πιο άμεσος τρόπος να δείξουμε ότι μια πρόταση ϕ δεν μπορεί να αποδειχτεί σε κάποιο αξιωματικό σύστημα **T**, είναι να κατασκευάσουμε ένα **πρότυπο** (μοντέλο, model) του $\mathbf{T}$, όπου η ϕ δεν ισχύει. Θεωρούμε για παράδειγμα το κλασικό πρόβλημα για την επίπεδη Ευκλείδεια γεωμετρία, αν το *Αξίωμα Παραλλήλων*[19] μπορεί να αποδειχτεί από τα άλλα αξιώματα. Για να δείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατο, δηλώνουμε ότι στο μέλλον με «επίπεδο» θα εννοούμε τον (ανοικτό, πεπερασμένο) δίσκο ακτίνας 1, το χώρο όλων των σημείων (του «αληθινού» επιπέδου) σε απόσταση μικρότερη μιας μονάδας από το αρχικό σημείο O· και με «ευθεία» θα εννοούμε την τομή μιας «αληθινής» ευθείας μ' αυτό τον δίσκο. Δεν είναι δύσκολο να ορίσουμε σ' αυτή τη δομή τις υπόλοιπες βασικές έννοιες του Ευκλείδη και να επαληθεύσουμε ότι όλα τα αξιώματά του πλην αυτού των παραλλήλων αληθεύουν με αυτούς τους ορισμούς. Έτσι έχουμε ένα πρότυπο της Επίπεδης Γεωμετρίας στην οποία το Αξίωμα Παραλλήλων δεν ισχύει, αφού προφανώς για κάθε δοσμένη «ευθεία» L και σημείο P έξω από την L υπάρχουν πολλές «ευθείες» που περιέχουν το P και δεν τέμνουν την L. Έπεται ότι το Αξίωμα Παραλλήλων δεν μπορεί να αποδειχτεί από τα άλλα «μόνο με τη λογική»: γιατί αν αυτό ήταν εφικτό, τότε θα αλήθευε σε κάθε δομή που αληθεύουν τα άλλα, και εμείς βρήκαμε μια τέτοια δομή όπου δεν αληθεύει.

Για να ορίσουμε πρότυπο αξιωματικής θεωρίας, γενικά, πρέπει να καθορίσουμε ένα πεδίο αντικειμένων και να ερμηνεύσουμε σ' αυτό τις βασικές έννοιες της θεωρίας, έτσι ώστε τα αξιώματά της να αληθεύουν. Για μια συνολοθεωρία, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ορίσουμε τις έννοιες του *«να είναι σύνολο»* και *«να ανήκει»* σε κάποιο πεδίο αντικειμένων, και επίσης να καθορίσουμε ποιες συνθήκες σ' αυτό το πεδίο θα καλέσουμε **οριστικές**. Πρότυπα της **ZDC** δεν κατασκευάζονται εύκολα, μιας και η θεωρία αυτή είναι πολύ ισχυρή· στο Παράρτημα **B** θα μελετήσουμε μερικά πολύ ειδικά πρότυπα (τους «κόσμους»), αλλά οι πιο ενδιαφέρουσες κατασκευές χρειάζονται μεθόδους της *μαθηματικής λογικής* που δεν χρησιμοποιούμε σ' αυτές τις Σημειώσεις: θα περιοριστούμε στην προσεκτική διατύπωση μερικών από τα πολλά, διάσημα αποτελέσματα συνέπειας και ανεξαρτησίας του κλάδου όπως καλύπτουμε τα σχετιζόμενα μέρη του.

Ευθύς εξαρχής δεχτήκαμε στο **3.6** ότι η θεωρία μας έχει ένα πρότυπο, τον κόσμο αντικειμένων $\mathcal{W}$, όπου (τουλάχιστον) τα αξιώματα (**I**) – (**VI**) αληθεύουν. Η υπόθεση αυτή είναι φυσική και μάλιστα απαραίτητη αν η απασχόλησή μας με τη συνολοθεωρία έχει κάποιο νόημα, αλλά δεν συμπεριλαμβάνεται στα αξιώματα της **ZDC** ή των άλλων θεωριών που θα μελετήσουμε.[20] Δεν τη χρειαζόμαστε σχεδόν ποτέ, παρά μόνο όταν θέλουμε να αποδείξουμε την ύπαρξη προτύπων για

[19] Το πέμπτο «Αίτημα» του Ευκλείδη για τις παράλληλες είναι ισοδύναμο με την αρχή ότι για κάθε ευθεία L και κάθε σημείο P έξω της L, υπάρχει ακριβώς μία ευθεία L' που περιέχει το P και δεν τέμνει την L.

[20] Και να το θέλαμε, δεν είναι εφικτό να δεχτούμε ένα τέτοιο αξίωμα: η πρόσθεση της ύπαρξης προτύπου της **ZDC** στα αξιώματα της **ZDC** δημιουργεί μια καινούρια, πλουσιότερη θεωρία **ZDC**$'$ και το νέο πρόβλημα, αν αυτή η **ZDC**$'$ έχει πρότυπο. Στο κορυφαίο αποτέλεσμα της Μαθηματικής Λογικής, ο Gödel έδειξε (αυστηρά) ότι είναι αδύνατο να παρακάμψουμε αυτό το λογικό αίνιγμα: *δεν υπάρχει αξιωματική θεωρία* (συνεπής και άξια μελέτης) *που συμπεριλαμβάνει στα αξιώματα ή θεωρήματά της το αίτημα ότι επιδέχεται πρότυπο.*

επεκτάσεις της **ZDC**: για να κατασκευάσουμε τέτοια πρότυπα πρέπει να ξεκινήσουμε από κάπου, και αυτό είναι πάντα το σταθερό, απαρχής δεκτό πρότυπο της θεωρίας μας.

8.23. Προϋπόθεση για ισχυρισμούς ύπαρξης προτύπων. Από δω και μπρος και χωρίς περαιτέρω ειδοποίηση, όλοι οι ισχυρισμοί σ' αυτές τις Σημειώσεις ύπαρξης προτύπων, συνέπειας θεωριών και ανεξαρτησίας προτάσεων βασίζονται στην ύπαρξη προτύπου των αξιωμάτων (**I**) – (**VI**) και (**VIII**), του *Αξιώματος Αντικατάστασης* που θα εισαγάγουμε στο Κεφάλαιο **11**.

8.24. Η συνέπεια του Αξιώματος Επιλογής (Gödel, 1939). *Η θεωρία του Zermelo* **ZDC**+**AC** *με το πλήρες Αξίωμα Επιλογής έχει πρότυπο* και επομένως τα αξιώματα (**I**) – (**VI**) δεν διαψεύδουν το **AC**, δηλαδή το **AC** είναι *συνεπές με τα* (**I**) – (**VI**). Το διάσημο πρότυπο L των *κατασκευάσιμων συνόλων* (constructible sets) του Gödel έχει πολλές ιδιότητες κανονικότητας και η κατασκευή του αποδεικνύει τη συνέπεια του **AC** με θεωρίες πολύ ισχυρότερες της (**I**) – (**VI**). Θα αναφερθούμε σ' αυτό πολλές φορές στη συνέχεια.

8.25. Η ανεξαρτησία του Αξιώματος Επιλογής (Fraenkel-Mostowski, 1939, Cohen, 1963). *Καθεμιά από τις θεωρίες*

$$(\mathbf{I}) - (\mathbf{VI}) + \neg\mathbf{AC}_{\mathbb{N}},\ (\mathbf{I}) - (\mathbf{VI}) + \mathbf{AC}_{\mathbb{N}} + \neg\mathbf{DC},\ \mathbf{ZDC} + \neg\mathbf{AC}$$

έχει πρότυπο. Συνεπώς δεν μπορούμε να αποδείξουμε το $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ από τα κατασκευαστικά αξιώματα (**I**) – (**VI**), δεν μπορούμε να αποδείξουμε το **DC** από τα κατασκευαστικά αξιώματα και το $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$, και δεν μπορούμε να αποδείξουμε το **AC** στην **ZDC**, η καθεμιά απ' αυτές τις αρχές επιλογής είναι ισχυρότερη από τις προηγούμενες. Οι πρώιμες κατασκευές προτύπων των Fraenkel και Mostowski είτε περιείχαν άτομα ή είχαν κάποια άλλη, τεχνική αδυναμία που περιόριζε τη δυνατότητα γενίκευσής τους. Ο Cohen κατασκεύασε τα πρότυπά του με τη διάσημη μέθοδο του *αναγκασμού ή επιβολής* (forcing) που εφηύρε, με την οποία ο ίδιος (και άλλοι) απέδειξαν κατόπιν πολλά άλλα αποτελέσματα ανεξαρτησίας. Θα αναφερθούμε στη μέθοδο αναγκασμού πολλές φορές στη συνέχεια.

Προβλήματα για το Κεφάλαιο 8

Καλούμε δύο προτάσεις ϕ και ψ **κατασκευαστικά ισοδύναμες** αν η ισοδυναμία τους $\phi \iff \psi$ μπορεί να αποδειχτεί με βάση μόνο τα κατασκευαστικά αξιώματα (**I**) – (**VI**), δηλαδή χωρίς χρήση οποιασδήποτε αρχής επιλογής.

x8.1. Δείξε το Αξίωμα Επιλογής (8-1) για πεπερασμένα A.

x8.2. Το Αξίωμα Επιλογής είναι κατασκευαστικά ισοδύναμο με το εξής: για κάθε $A \neq \emptyset$ και κάθε $f : A \to B$, υπάρχει συνάρτηση $g : B \to A$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in A$, $f(g(f(x))) = f(x)$.

x8.3. Το Αξίωμα Επιλογής είναι κατασκευαστικά ισοδύναμο με το εξής: για κάθε I και κάθε οικογένεια συνόλων $(i \mapsto A_i)$ με δείκτες στο I,

$$(\forall i \in I)[A_i \neq \emptyset] \Longrightarrow \prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset.$$

Η Αρχή Απαριθμητής Επιλογής είναι κατασκευαστικά ισοδύναμη με το εξής: για κάθε ακολουθία συνόλων $(n \mapsto A_n)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$(\forall n \in \mathbb{N})[A_n \neq \emptyset] \Longrightarrow \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset.$$

Μαζί με το Πρόβλημα **x5.28**, το επόμενο πρόβλημα δίνει μια διατύπωση της Αρχής Απαριθμητής Επιλογής $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ κατευθείαν από τη βασική έννοια του «ανήκειν», χωρίς αναφορά στο $\mathbb{N}$ ή την έννοια της «συνάρτησης».

x8.4. Η Αρχή Απαριθμητής Επιλογής $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ είναι κατασκευαστικά ισοδύναμη με το εξής: κάθε άπειρη, απαριθμητή οικογένεια $\mathcal{E}$ μη κενών και ξένων ανά δύο συνόλων επιδέχεται σύνολο επιλογής.

Στα επόμενα τέσσερα προβλήματα θεωρούμε αρχές επιλογής που μοιάζουν ασθενέστερες του $\mathbf{DC}$ αλλά είναι κατασκευαστικά ισοδύναμές του.

* **x8.5.** Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών είναι κατασκευαστικά ισοδύναμο με το εξής: για κάθε μη κενό σύνολο A και κάθε σχέση $P \subseteq A \times A$,

$$\begin{aligned}\text{αν}\ \ &(\forall x \in A)(\exists y \in A)P(x,y),\\ &\qquad\qquad \text{τότε}\ \ (\exists B \subseteq A)[B \neq \emptyset \,\&\, (\exists f : B \to B)(\forall x \in B)P(x, f(x))].\end{aligned}$$

* **x8.6.** Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών είναι κατασκευαστικά ισοδύναμο με το εξής: για κάθε σχέση $P \subseteq A \times A$ και κάθε $a \in A$,

$$\begin{aligned}\text{αν}\ \ &(\forall x \in A)(\exists y \in A)P(x,y),\\ &\qquad\qquad \text{τότε}\ \ (\exists B \subseteq A)[a \in B \,\&\, (\exists f : B \to B)(\forall x \in B)P(x, f(x))].\end{aligned}$$

* **x8.7.** Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών είναι κατασκευαστικά ισοδύναμο με το εξής: ένας μερικά διατεταγμένος χώρος P είναι εδραιωμένος αν και μόνον αν δεν έχει **άπειρες**, **φθίνουσες αλυσίδες**, δηλαδή για κάθε $f : \mathbb{N} \to P$,

$$(\forall n \in \mathbb{N})[f(n+1) \leq f(n)] \Longrightarrow (\exists n)[f(n+1) = f(n)].$$

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών κατευθείαν από τη σχέση του «ανήκειν», αλλά κάπως περιπλεγμένα:

* **x8.8.** Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών είναι κατασκευαστικά ισοδύναμο με το εξής: για κάθε σύνολο A και κάθε διμελή οριστική συνθήκη P,

$$\begin{aligned}\text{αν}\ \ &\Big[\emptyset \in A \,\&\, (\forall u, v \in A)[P(u,v) \Longrightarrow (\exists! x)[v = u \cup \{x\}]]\\ &\qquad\qquad\qquad \&\, (\forall u \in A)(\exists v \in A)P(u,v)\Big],\\ &\qquad\qquad\qquad \text{τότε}\ \ (\exists B \subseteq A)[\emptyset \in B \,\&\, (\forall u \in B)(\exists! v \in B)P(u,v)].\end{aligned}$$

* **x8.9.** Δείξε ότι η εξής «λεξικογραφική» διάταξη του $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ είναι όντως γραμμική διάταξη, αλλά όχι καλή:

$$f \leq g \iff_{\text{ορ}} f = g \vee (\exists n \in \mathbb{N})[(\forall i < n)[f(i) = g(i)] \,\&\, f(n) < g(n)].$$

Συμπέρανε ότι το $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ επιδέχεται γραμμική διάταξη.

x8.10. Εδραιωμένη Επαγωγή. Για κάθε εδραιωμένο γράφημα G και κάθε μονομελή οριστική συνθήκη P,

$$\text{αν } \ (\forall x \in G)[(\forall y)(x \to_G y \Longrightarrow P(y)) \Longrightarrow P(x)], \ \text{ τότε } \ (\forall x \in G)P(x).$$

* **x8.11.** Για κάθε εδραιωμένο γράφημα G και κάθε συνάρτηση

$$h : (G \rightharpoonup E) \times G \to E,$$

υπάρχει μοναδική (ολική) συνάρτηση $f : G \to E$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$f(x) = h(f \restriction \{y \in G \mid x \to_G y\}, x) \quad (x \in G).$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Τροποποίησε την απόδειξη του θεωρήματος **7.24**, χρησιμοποιώντας συναρτήσεις

$$\sigma_t : \{x \in G \mid t \Rightarrow_G x\} \to E$$

με πεδίο ορισμού «αρχικά τμήματα» της κληρονομικής κλειστότητας $\Rightarrow_G$ της $\to_G$.