ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Συνόλων

Ενότητα: Τα πάντα σύνολα ;

Γιάννης Μοσχοβάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Σημειώματα

Σημείωμα ιστορικού εκδόσεων έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1. Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη στο σύνδεσμο http://www.math.ucla.edu/ ynm/lectures/g.pdf

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα αδειοδότησης

Διατήρηση σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΑ ΠΑΝΤΑ ΣΥΝΟΛΑ;

Ο επόμενος στόχος μας είναι να διερευνήσουμε αν τα βασικά αποτελέσματα της διαισθητικής συνολοθεωρίας του Κεφαλαίου **2** μπορούν πράγματι να αποδειχτούν με βάση τα αξιώματα του Zermelo. Ευθύς εξ αρχής βρίσκουμε μια δυσκολία: ο βασικός ορισμός της *ισοπληθικότητας* χρησιμοποιεί την έννοια της συνάρτησης, για να ορίσουμε την έννοια του *απαριθμητού* χρειαζόμαστε το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, το θεμελιακό θεώρημα **2.21** του Cantor αναφέρεται στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών κ.λπ. Δηλαδή τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου **2** δεν αναφέρονται μόνο σε σύνολα, αλλά επίσης σε σημεία, αριθμούς, συναρτήσεις, Καρτεσιανά γινόμενα και πολλά άλλα μαθηματικά αντικείμενα που απλά δεν είναι σύνολα. Πού θα βρούμε αυτά τα αντικείμενα μέσα στα αξιώματα του Zermelo που μόνο για σύνολα μιλάνε;

Μια προφανής λύση είναι να υποθέσουμε ότι αυτά τα μη σύνολα που μας ενδιαφέρουν είναι ανάμεσα στα *άτομα* που επιτρέπει η θεωρία του Zermelo και να προσθέσουμε αξιώματα που εκφράζουν τις βασικές μας διαισθήσεις για τα σημεία, τους αριθμούς, τις συναρτήσεις κ.λπ. Αυτό μπορεί να γίνει, αλλά είναι άβολο και υπάρχει μια πολύ καλύτερη λύση.

Τυπικό παράδειγμα της μεθόδου που θα ακολουθήσουμε είναι η «ταύτιση» της (προσανατολισμένης) γεωμετρικής ευθείας Π με το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, μέσω της αντιστοιχίας που «ταυτίζει» κάθε σημείο $P \in \Pi$ με την τετμημένη του $x(P)$ ως προς ένα πάγιο, αρχικό σημείο O με τετμημένη $x(O) = 0$. Τι ακριβώς σημαίνει αυτή η «ταύτιση»; *Όχι βέβαια ότι τα σημεία είναι πραγματικοί αριθμοί.* Οι άνθρωποι έχουν άμεσες γεωμετρικές διαισθήσεις για τα σημεία που είναι άσχετες με τις συντεταγμένες τους και τις είχαν πριν ο Descartes ανακαλύψει την αναλυτική γεωμετρία. Κάθε Αθηναίος της κλασικής εποχής καταλάβαινε την έννοια της πρότασης

> Το Φάληρο είναι ανάμεσα στον Πειραιά και το Σούνιο κατά μήκος της ακτής,

αν και αγνοούσε την αναλυτική γεωμετρία. Πιο ενδεικτικά: πολλοί μορφωμένοι αρχαίοι Αθηναίοι είχαν τέλεια κατανόηση του Πυθαγόρειου θεωρήματος, χωρίς να ξέρουν τίποτα για συντεταγμένες. Αυτό που εννοούμε με την «ταύτιση» του Π με το $\mathbb{R}$ είναι ότι η αντιστοιχία $P \mapsto x(P)$ μας δίνει μια **πιστή απεικόνιση** του Π στο $\mathbb{R}$ που μας επιτρέπει να δώσουμε αριθμητικούς ορισμούς για όλες τις χρήσιμες γεωμετρικές έννοιες και να μελετήσουμε τις μαθηματικές ιδιότητες του

Π **ως εάν τα σημεία να ήταν αριθμοί**. Για παράδειγμα: η πρόταση πιο πάνω εκφράζεται πιστά με τις αριθμητικές ανισότητες

$$x(\text{Πειραιάς}) < x(\text{Φάληρο}) < x(\text{Σούνιο}),$$

αν οι τετμημένες αυξάνουν από τα δυτικά προς τα ανατολικά. Με τον ίδιο τρόπο, θα βρούμε *πιστές απεικονίσεις* στα σύνολα όλων των μαθηματικών αντικειμένων που χρειαζόμαστε και θα μελετήσουμε τη θεωρία συνόλων με βάση μόνο το λιτό σύστημα των αξιωμάτων του Zermelo, **ως εάν όλα τα μαθηματικά αντικείμενα να ήταν σύνολα**. Το λεπτό και όχι πάντα τετριμμένο πρόβλημα είναι να διατυπώσουμε σε κάθε περίπτωση τον σωστό ορισμό της «πιστής απεικόνισης» και να αποδείξουμε ότι μια τέτοια πιστή απεικόνιση υπάρχει.

4.1. Διατεταγμένο ζεύγος (Ordered pair). Θεωρούμε πρώτα τη βασική έννοια του (**διατεταγμένου**) **ζεύγους**. Διαισθητικά, το ζεύγος (x, y) είναι το «πράγμα» που έχει «πρώτο μέλος» το x και «δεύτερο μέλος» το y, και διαφέρει από το μη διατεταγμένο ζεύγος αφού (π.χ.) $\{0, 1\} = \{1, 0\}$ ενώ $(0, 1) \neq (1, 0)$. Επομένως η πρώτη χαρακτηριστική ιδιότητα του ζεύγους είναι η εξής:

$$\text{(OP1)} \qquad (x, y) = (x', y') \iff x = x' \,\&\, y = y'.$$

Υπάρχει και μια δεύτερη, ίσως λιγότερο προφανής χαρακτηριστική ιδιότητα του ζεύγους, που μας επιτρέπει να ορίσουμε Καρτεσιανά γινόμενα: για όλα τα σύνολα A, B,

$$\text{(OP2)} \qquad \text{η κλάση } A \times B =_{\text{op}} \{(x, y) \mid x \in A \,\&\, y \in B\} \text{ είναι σύνολο.}$$

Το πρόβλημα λοιπόν της πιστής απεικόνισης του «ζεύγους» στη συνολοθεωρία διαμορφώνεται ως εξής: πρέπει να βρούμε έναν οριστικό τελεστή (x, y), τέτοιον ώστε οι (OP1) και (OP2) να συνάγονται από τα αξιώματα του Zermelo.

4.2. Λήμμα. *Ο* **τελεστής ζεύγους** *του* **Kuratowski**

$$(x, y) =_{\text{op}} \{\{x\}, \{x, y\}\} \tag{4-1}$$

ικανοποιεί τις (OP1), (OP2).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (OP1). Η κατεύθυνση $\Longleftarrow$ είναι προφανής. Για τη μη τετριμμένη κατεύθυνση $\Longrightarrow$ ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις:

Αν $x = y$, τότε $\{x, y\} = \{x, x\} = \{x\}$, το $(x, y) = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}$ είναι μονοσύνολο, επομένως και το ίσο του (x', y') είναι μονοσύνολο, ώστε $x' = y'$. Επομένως $(x', y') = \{\{x'\}\}$ και αφού αυτό είναι ίσο με το $\{\{x\}\}$, έχουμε $x = x'$ και αμέσως, επίσης, $y = x = x' = y'$.

Αν $x \neq y$, τότε στο (x, y) ανήκουν το μονοσύνολο $\{x\}$ και το δισύνολο $\{x, y\}$, και αυτά πρέπει να αντιστοιχούν στα μέλη $\{x'\}$ και $\{x', y'\}$ του ίσου συνόλου (x', y'), δηλαδή $\{x\} = \{x'\}$, $\{x, y\} = \{x', y'\}$, ώστε αμέσως $x = x'$ και $y = y'$.

(OP2). Αρκεί να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε δύο σύνολα A, B, υπάρχει σύνολο C τέτοιο ώστε

$$x \in A \,\&\, y \in B \Longrightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} \in C\cdot \tag{4-2}$$

διότι αν ισχύει αυτό, τότε

$$A \times B = \{z \in C \mid (\exists x \in A)(\exists y \in B)[z = (x, y)]\},$$

και το $A \times B$ είναι σύνολο από το Αξίωμα Διαχωρισμού (**III**). Για να δείξουμε την (4-2), υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} x \in A,\ y \in B &\Longrightarrow \{x\},\ \{x, y\} \subseteq (A \cup B) \\ &\Longrightarrow \{x\},\ \{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \\ &\Longrightarrow \{\{x\},\ \{x, y\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \\ &\Longrightarrow (x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)), \end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε $C = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. $\dashv$

Καθορίζουμε τώρα ένα συγκεκριμένο τελεστή ζεύγους (x, y) που ικανοποιεί τις (OP1), (OP2), ίσως το ζεύγος του Kuratowski που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του **4.2**, ίσως κάποιο άλλο: από δω και πέρα μπορούμε να ξεχάσουμε τον συγκεκριμένο τελεστή που διαλέξαμε, το μόνο που έχει σημασία είναι ότι ο τελεστής του ζεύγους ικανοποιεί τις (OP1), (OP2).

4.3. Άσκηση. *Έστω*

$$\mathrm{Pair}(z) \iff_{\mathrm{op}} (\exists x)(\exists y)[z = (x, y)],$$

$$\mathrm{First}(z) =_{\mathrm{op}} \begin{cases} \text{το μοναδικό } x \text{ ώστε } (\exists y)[z = (x, y)], & \text{αν } \mathrm{Pair}(z), \\ z, & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

$$\mathrm{Second}(z) =_{\mathrm{op}} \begin{cases} \text{το μοναδικό } y \text{ ώστε } (\exists x)[z = (x, y)], & \text{αν } \mathrm{Pair}(z), \\ z, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

Έπεται ότι

$$\mathrm{Pair}(z) \iff z = (\mathrm{First}(z), \mathrm{Second}(z)).$$

Χρησιμοποιώντας το ζεύγος μπορούμε εύκολα να ορίσουμε τριάδες, τετράδες κ.λπ. όπως και τα αντίστοιχα γινόμενα, π.χ.

$$(x, y, z) =_{\mathrm{op}} (x, (y, z)), \tag{4-3}$$

$$(x, y, z, w) =_{\mathrm{op}} (x, (y, z, w)) = (x, (y, (z, w))), \tag{4-4}$$

$$A \times B \times C =_{\mathrm{op}} A \times (B \times C), \tag{4-5}$$

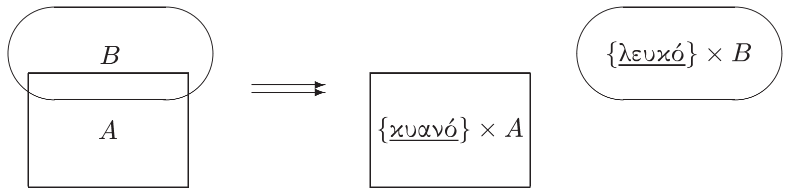
κ.λπ. Με αυτό τον ορισμό, $(n+1)$-άδα είναι ένα ζεύγος με δεύτερο μέλος n-άδα.

4.4. Άσκηση. *Για όλα τα* x, y, z, x', y', z',

$$(x, y, z) = (x', y', z') \iff x = x' \,\&\, y = y' \,\&\, z = z'.$$

4.5. Ξένη ένωση (Disjoint union). Για κάθε σύνολο A και κάθε αντικείμενο $\underline{\text{κυανό}}$, μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο ζευγών $\{\underline{\text{κυανό}}\} \times A$ σαν ένα «μπλε αντίγραφο» του A, εικονίζοντας την αντικατάσταση του κάθε $a \in A$ με το ζεύγος $(\underline{\text{κυανό}}, a)$ ως το συνολοθεωρητικό ανάλογο της βαφής του a με χρώμα $\underline{\text{κυανό}}$. Καθορίζουμε δύο τέτοια διαφορετικά «χρώματα»

$$\underline{\text{κυανό}} =_{\mathrm{op}} \emptyset, \quad \underline{\text{λευκό}} =_{\mathrm{op}} \{\emptyset\}, \tag{4-6}$$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **4.1**. Κατασκευή της ξένης ένωσης.

και ορίζουμε την **ξένη ένωση** δύο συνόλων με τον τύπο

$$A \uplus B =_{\text{ορ}} (\{\underline{\text{κυανό}}\} \times A) \cup (\{\underline{\text{λευκό}}\} \times B).$$

Η κατασκευή απεικονίζεται σχηματικά στο Διάγραμμα **4.1**, και η έννοια είναι χρήσιμη, όπως θα δούμε. Είναι αυτονόητο ότι η συγκεκριμένη ταυτότητα των κυανό και λευκό είναι άσχετη και πρέπει να ξεχαστεί αμέσως: το μόνο σημαντικό είναι ότι $\underline{\text{κυανό}} \neq \underline{\text{λευκό}}$.

4.6. Άσκηση. *Δείξε ότι για όλα τα σύνολα A, B, $A \uplus \emptyset \subseteq A \uplus B$. Δείξε επίσης με κάποιο παράδειγμα ότι αν χρησιμοποιήσουμε το ζεύγος Kuratowski στον ορισμό της ξένης ένωσης, τότε η αληθοφανής $A \subseteq A \uplus B$ δεν ισχύει.*

Θεωρούμε τώρα την έννοια της **σχέσης** (relation), που διαποτίζει τα μαθηματικά. Διαισθητικά, *διμελής σχέση* R ανάμεσα σε αντικείμενα $x \in A$ και $y \in B$ είναι μια συνθήκη που ικανοποιείται από μερικά $x \in A$, $y \in B$ και δεν ικανοποιείται από άλλα. Π.χ. η σχέση

$$xRy \iff \text{ο } x \text{ είναι γιος της } y$$

είναι ορισμένη στα $A = \{\text{άντρες}\}$, $B = \{\text{γυναίκες}\}$ και ικανοποιείται από τα x, y ακριβώς αν η y έχει γεννήσει τον x. Ο προφανής τρόπος να απεικονίσουμε μια διμελή σχέση στη συνολοθεωρία είναι να την ταυτίσουμε με την **έκτασή** της, το σύνολο των ζευγών που την ικανοποιούν.

4.7. Σχέσεις. Διμελής σχέση στα σύνολα A, B είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο R του γινομένου $A \times B$. Χρησιμοποιούμε ισοδύναμα τους συμβολισμούς

$$R(x, y) \iff xRy \iff (x, y) \in R.$$

Προφανή παραδείγματα σχέσεων είναι η **ισότητα** και οι σχέσεις του «**ανήκειν**» και του **υποσυνόλου**, περιορισμένες σε κάποιο σύνολο A,

$$\begin{aligned} x =_A y &\iff_{\text{ορ}} x \in A \,\&\, y \in A \,\&\, x = y, \\ x \in_A Y &\iff_{\text{ορ}} x \in A \,\&\, Y \subseteq A \,\&\, x \in Y, \\ X \subseteq_A Y &\iff_{\text{ορ}} X \subseteq Y \subseteq A\cdot \end{aligned}$$

σύμφωνα με τον ορισμό αυτές ταυτίζονται με τα σύνολα

$$\begin{aligned}
=_A &=_{\text{ορ}} \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\},\\
\in_A &=_{\text{ορ}} \{(x,Y) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid x \in Y\},\\
\subseteq_A &=_{\text{ορ}} \{(X,Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq Y\}.
\end{aligned}$$

4.8. Σχέσεις και οριστικές συνθήκες. Οι οριστικές συνθήκες $=$, $\in$ και $\subseteq$ στο πεδίο ορισμού $\mathcal{W}$ όλων των αντικειμένων δεν είναι σχέσεις σύμφωνα με τον ορισμό **4.7**, και μάλιστα δεν είναι καν «ισομελείς» με σχέσεις, επειδή ικανοποιούνται από πάρα πολλά ζεύγη. Η διαφορά ανάμεσα στις σχέσεις και τις οριστικές συνθήκες είναι σημαντική: συνοπτικά, *κάθε σχέση καθορίζει μια οριστική συνθήκη αλλά* (γενικά) *το αντίθετο δεν ισχύει.* Στην επόμενη Άσκηση διατυπώνουμε αυστηρά αυτή τη διαφορά. Παρ' όλα αυτά, θα αναφερθούμε πολλές φορές π.χ. *στη σχέση* $=$ *στο σύνολο* A, εννοώντας (χωρίς σοβαρό κίνδυνο σύγχυσης) τον περιορισμό $=_A$ όπως τον ορίσαμε πιο πάνω.

4.9. Άσκηση. (1) *Για κάθε διμελή σχέση* $R \subseteq (A \times B)$, *η συνθήκη*

$$R^*(x,y) \iff_{\text{ορ}} (x,y) \in R$$

είναι οριστική. (Τίποτα δεν χρειάζεται γι' αυτό, εκτός κι αν θέλεις να εξασκηθείς στην εφαρμογή του **3.18***.)*

(2) *Για κάθε οριστική διμελή συνθήκη* P *και οποιαδήποτε σύνολα* A, B, *ο* **περιορισμός**

$$P_{A,B} =_{\text{ορ}} \{(x,y) \in A \times B \mid P(x,y)\}$$

της P *στο* $A \times B$ *είναι διμελής σχέση.*

4.10. Ιδιότητες σχέσεων σε ένα σύνολο A. Ιδιαίτερα σημαντικές είναι οι σχέσεις δύο μεταβλητών στο ίδιο σύνολο, που ταξινομούνται και μελετώνται ανάλογα με τις δομικές ιδιότητες που ικανοποιούν. Οι επόμενες τρεις ιδιότητες εμφανίζονται συχνά, μόνες τους ή σε διάφορους συνδυασμούς, με $P \subseteq A \times A$:

$$\begin{aligned}
\text{η } P \text{ είναι } \textbf{αυτοπαθής} &\iff_{\text{ορ}} (\forall x \in A)[x P x],\\
\text{η } P \text{ είναι } \textbf{συμμετρική} &\iff_{\text{ορ}} (\forall x, y \in A)[x P y \Longrightarrow y P x],\\
\text{η } P \text{ είναι } \textbf{μεταβατική} &\iff_{\text{ορ}} (\forall x, y, z \in A)[[x P y \,\&\, y P z] \Longrightarrow x P z].
\end{aligned}$$

(Οι αντίστοιχοι αγγλικοί όροι είναι reflexive, symmetric και transitive.) Η P είναι **σχέση ισοδυναμίας** (equivalence relation) στο A αν έχει και τις τρεις αυτές ιδιότητες.

Για σχέσεις ισοδυναμίας χρησιμοποιούμε συνήθως σύμβολα σαν τα $\sim$, $\approx$, $\simeq$, και οι τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες παίρνουν τη μορφή

$$\begin{gathered}
x \sim x,\\
x \sim y \Longrightarrow y \sim x,\\
[x \sim y \,\&\, y \sim z] \Longrightarrow x \sim z.
\end{gathered}$$

4.11. Άσκηση. *Για κάθε σύνολο A, η σχέση ισότητας $\{(x,y) \mid x = y \in A\}$, η σταθερά αληθής σχέση $\{(x,y) \mid x, y \in A\}$ και για κάθε $B \subseteq A$, η σχέση*

$$x \sim_{A/B} y \iff_{\text{ορ}} x = y \in A \vee [x \in B \,\&\, y \in B]$$

είναι σχέσεις ισοδυναμίας.

4.12. Πρόταση. *Έστω η $\sim$ σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A. Τότε για κάθε $x \in A$ ορίζουμε με*

$$[x/{\sim}] = \{y \in A \mid x \sim y\} \tag{4-7}$$

την **κλάση ισοδυναμίας**[7] *του x και συμβολίζουμε με*

$$[\![A/{\sim}]\!] = \{[x/{\sim}] \in \mathcal{P}(A) \mid x \in A\}. \tag{4-8}$$

το σύνολο αυτών των κλάσεων ισοδυναμίας. Άρα $[x/{\sim}] \neq \emptyset$ για κάθε $x \in A$, και για κάθε $x, y \in A$,

$$x \sim y \iff [x/{\sim}] = [y/{\sim}], \tag{4-9}$$

$$x \not\sim y \iff [x/{\sim}] \cap [y/{\sim}] = \emptyset, \tag{4-10}$$

έτσι ώστε το $[\![A/{\sim}]\!]$ είναι μια οικογένεια μη κενών και ξένων ανα δύο υποσυνόλων του A τέτοια που $\bigcup [\![A/{\sim}]\!] = A$.

Αντιστρόφως, για κάθε οικογένεια $\mathcal{E}$ μη κενών και ξένων ανά δύο υποσυνόλων του A τέτοια που $A = \bigcup \mathcal{E}$, η σχέση

$$x \sim y \iff_{\text{ορ}} (\exists X \in \mathcal{E})[x \in X \,\&\, y \in X]$$

είναι σχέση ισοδυναμίας στο A και $[\![A/{\sim}]\!] = \mathcal{E}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κάθε $[x/{\sim}] \neq \emptyset$, επειδή $x \in [x/{\sim}]$. Από τη μεταβατικότητα και συμμετρικότητα της $\sim$,

$$t \sim x \,\&\, x \sim y \Longrightarrow t \sim y, \quad t \sim y \,\&\, x \sim y \Longrightarrow t \sim x$$

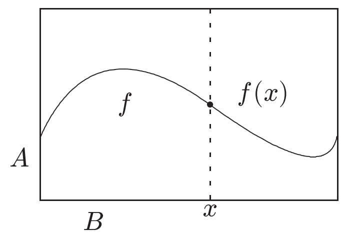
άρα

$$\begin{aligned} x \sim y &\Longrightarrow (\forall t \in A)[t \sim x \iff t \sim y] \\ &\Longrightarrow [x/{\sim}] = [y/{\sim}]. \end{aligned}$$

Αυτό συνεπάγεται αμέσως τις (4-9) και (4-10). Όσο για το αντίστροφο, η αυτοπάθεια και η συμμετρία της $\sim$ είναι τετριμμένες. Αν $x \sim y$ και $y \sim z$, τότε υπάρχουν σύνολα X, Y στην $\mathcal{E}$ τέτοια που $x, y \in X$, $y, z \in Y$, ειδικότερα $y \in X \cap Y$, και αφού τα σύνολα στην $\mathcal{E}$ είναι ξένα ανά δύο, συμπεραίνουμε ότι $X = Y$, άρα $x \sim z$. ⊣

4.13. Άσκηση. *Υπολόγισε τις κλάσεις ισοδυναμίας για τις σχέσεις ισοδυναμίας της Άσκησης* **4.11**.

[7] Κάθε $[x/{\sim}]$ είναι προφανώς σύνολο, υποσύνολο του A, και θα ήταν πιο ταιριαστό να το λέγαμε το «σύνολο ισοδυναμίας» του x, αλλά η κλασική ορολογία είναι πανάρχαιη και καθιερωμένη.



Διαγραμμα **4.2**. Μία συνάρτηση σαν σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη.

Ακολουθώντας την ίδια τακτική, ταυτίζουμε κάθε **τριμελή σχέση** R στα σύνολα A, B, C με το σύνολο των τριάδων που την ικανοποιούν, δηλαδή τριμελής σχέση στα A, B, C είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του $A \times B \times C$. Χρησιμοποιούμε ισοδύναμα τους συμβολισμούς

$$R(x, y, z) \iff_{\text{ορ}} (x, y, z) \in R.$$

Με τον ίδιο τρόπο απεικονίζουμε στη συνολοθεωρία και τις συναρτήσεις, ταυτίζοντάς τες με τη «γραφική τους παράσταση».

4.14. Συναρτήσεις. Συνάρτηση (**απεικόνιση**, **μετασχηματισμός**) $f : A \to B$ με πεδίο ορισμού το σύνολο A και πεδίο τιμών το σύνολο B είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο $f \subseteq (A \times B)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B)[(x, y) \in f],$$

αναλυτικότερα,

$$\begin{gathered}(\forall x \in A)(\exists y \in B)[(x, y) \in f],\\ \text{και } (x, y) \in f \,\&\, (x, y') \in f \Longrightarrow y = y'.\end{gathered}$$

Αν απεικονίσουμε το γινόμενο $A \times B$ στο επίπεδο όπως στο Διάγραμμα **4.2**, το παραπάνω σημαίνει πως κάθε «κατακόρυφη ευθεία» τέμνει το σύνολο f σε ακριβώς ένα σημείο: Για $x \in A$ και $f : A \to B$ γράφουμε, ως συνήθως,

$$\begin{aligned} f(x) &=_{\text{ορ}} \text{ το μοναδικό } y \in B \text{ τέτοιο ώστε } (x, y) \in f \\ &= \text{ η τιμή της } f \text{ στο στοιχείο } x \end{aligned} \qquad (x \in A).$$

Ο χώρος συναρτήσεων

$$\begin{aligned}(A \to B) &=_{\text{ορ}} \{f \subseteq A \times B \mid f : A \to B\}\\ &= \{f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid (\forall x \in A)(\exists! y \in B)(x, y) \in f\}\end{aligned}$$

είναι σύνολο από το Αξίωμα Εξειδίκευσης (**III**).

Θα υιοθετήσουμε όλους τους συνηθισμένους συμβολισμούς και συντομεύσεις σχετικές με συναρτήσεις, γράφοντας π.χ. μερικές φορές τη μεταβλητή χωρίς τις παρενθέσεις ή σαν δείκτη,

$$f(x) = fx = f_x.$$

Εξαιρετικά χρήσιμος είναι και ο συμβολισμός $\mapsto$, π.χ. **οικογένεια συνόλων με δείκτες** στο σύνολο I είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση

$$A = (i \mapsto A_i)_{i \in I} : I \to E$$

για κάποιο $I \neq \emptyset$ και κάποιο E, όπου κάθε τιμή A_i είναι σύνολο. Ονομάζουμε το I **σύνολο δεικτών** και ορίζουμε την ένωση και την τομή μιας οικογένειας με δείκτες στο I όπως συνήθως,

$$\begin{aligned} \bigcup\nolimits_{i \in I} A_i &=_{\text{ορ}} \{x \in \bigcup E \mid (\exists i \in I)[x \in A_i]\}, \\ \bigcap\nolimits_{i \in I} A_i &=_{\text{ορ}} \{x \in \bigcup E \mid (\forall i \in I)[x \in A_i]\}. \end{aligned} \tag{4-11}$$

Επίσης ορίζουμε **γινόμενο** μιας οικογένειας με δείκτες στο I, το σύνολο όλων των συναρτήσεων που επιλέγουν για κάθε δείκτη $i \in I$ ένα στοιχείο από την τιμή A_i,

$$\prod\nolimits_{i \in I} A_i =_{\text{ορ}} \{f : I \to \bigcup\nolimits_{i \in I} A_i \mid (\forall i \in I)[f(i) \in A_i]\}. \tag{4-12}$$

Μονομορφισμοί, επιμορφισμοί, αντιστοιχίες, εικόνες και αντίστροφες εικόνες συναρτήσεων ορίζονται ακριβώς όπως στην Εισαγωγή. Θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$\begin{aligned} (A \rightarrowtail B) &=_{\text{ορ}} \{f \in (A \to B) \mid \text{η } f \text{ είναι μονομορφισμός, 1-1}\}, \\ (A \twoheadrightarrow B) &=_{\text{ορ}} \{f \in (A \to B) \mid \text{η } f \text{ είναι επιμορφισμός, επί του } B\}, \\ (A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B) &=_{\text{ορ}} (A \rightarrowtail B) \cap (A \twoheadrightarrow B) \text{ (αντιστοιχία)}. \end{aligned}$$

Για κάθε $X \subseteq A$, ο **περιορισμός** (restriction) $f \restriction X$ μιας συνάρτησης $f : A \to B$ είναι η συνάρτηση που υπολείπεται αν αφαιρέσουμε από την f τα ζεύγη με πρώτο μέλος έξω από το X,

$$f \restriction X =_{\text{ορ}} \{(x, y) \in f \mid x \in X\}. \tag{4-13}$$

Επίσης είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι η βασική συνθήκη του «είναι συνάρτηση»

$$\text{Function}(f) \iff_{\text{ορ}} (\exists A)(\exists B)[f \in (A \to B)] \tag{4-14}$$

είναι προφανώς οριστική. Όταν αναφερόμαστε σε κάποια *συνάρτηση* f χωρίς μνεία συγκεκριμένων συνόλων A, B ώστε $f : A \to B$, θα εννοούμε οποιοδήποτε αντικείμενο f που ικανοποιεί τη συνθήκη $\text{Function}(f)$.

4.15. Άσκηση. *Δείξε από τα αξιώματα, πως για κάθε συνάρτηση f, το* **πεδίο ορισμού** *της*

$$\text{Domain}(f) =_{\text{ορ}} \{x \mid (\exists y)[(x, y) \in f]\}$$

και η **εικόνα** *της*

$$\text{Image}(f) =_{\text{ορ}} \{y \mid (\exists x)[(x, y) \in f]\}$$

είναι σύνολα, και πως για κάθε σύνολο B,

$$\textit{αν } \text{Image}(f) \subseteq B, \textit{ τότε } f : \text{Domain}(f) \to B.$$

Σαν επακόλουθο,

$$\textit{αν}\ \ \mathrm{Function}(f),\ \ \textit{τότε}\ \ f : \mathrm{Domain}(f) \to \mathrm{Image}(f).$$

4.16. Σχετικά με τις συναρτήσεις σαν σύνολα ζευγών. Αυτή η «ταύτιση» στη συνολοθεωρία μιας συνάρτησης $f : A \to B$ με το σύνολο των ζευγών $\{(x, y) \in A \times B \mid f(x) = y\}$ έχει θεωρηθεί προβληματική, επειδή έχουμε έμφυτες «λειτουργικές» διαισθήσεις για την έννοια της συνάρτησης και πολλές φορές με τη λέξη «συνάρτηση» εννοούμε έναν «κανόνα υπολογισμού». Παραδείγματος χάριν, οι δύο συναρτήσεις στους πραγματικούς αριθμούς

$$\begin{aligned} f(x, y) &=_{\text{ορ}} (x + y)^2, \\ g(x, y) &=_{\text{ορ}} x^2 + 2xy + y^2 \end{aligned}$$

ταυτίζονται στη συνολοθεωρία, ενώ σαν κανόνες υπολογισμού είναι προφανώς διαφορετικοί. Αυτό δε δημιουργεί πρόβλημα αν ξεκαθαρίσουμε στο νου μας ότι ο «ορισμός» **4.14** δεν αντικαθιστά τη διαισθητική έννοια της συνάρτησης αλλά μόνο την απεικονίζει στη *συνολοθεωρία*, πιστά όσον αφορά τις χρήσεις αυτής της έννοιας *στη συνολοθεωρία*:[8] μπορούμε τώρα να ορίσουμε την ισοπληθικότητα και τη συνθήκη σύγκρισης πλήθους χωρίς αναφορά σε αντικείμενα έξω από την αξιωματική μας θεωρία,

$$\begin{aligned} A =_c B &\iff_{\text{ορ}} (\exists f)[f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B] &\iff (A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B) \neq \emptyset, \\ A \leq_c B &\iff_{\text{ορ}} (\exists f)[f : A \rightarrowtail B] &\iff (A \rightarrowtail B) \neq \emptyset. \\ A <_c B &\iff_{\text{ορ}} A \leq_c B \,\&\, A \neq_c B. \end{aligned}$$

4.17. Άσκηση. *Δείξε από τα αξιώματα ότι* $A =_c B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$, *αναφέροντας τα αξιώματα που χρησιμοποιείς.*

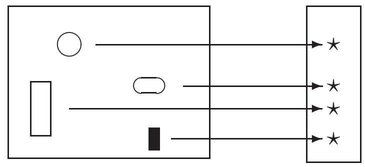
4.18. Άσκηση. *Δείξε από τα αξιώματα ότι αν* $A =_c A'$ *και* $B =_c B'$, *τότε*

$$A \uplus B =_c A' \uplus B', \quad A \times B =_c A' \times B', \quad (A \to B) =_c (A' \to B').$$

4.19. Πληθάριθμοι κατά τον Cantor. Είναι κάπως ειρωνικό το γεγονός ότι μια από τις πλέον δύσκολες διαισθητικές έννοιες να απεικονίσουμε πιστά στη συνολοθεωρία είναι αυτή του *πληθαρίθμου*, οπωσδήποτε από τις βασικότερες του θέματός μας. Ο Cantor την εισήγαγε το 1895 στο ίδιο δημοσίευμα από το οποίο αποσπάσαμε τον «ορισμό» του συνόλου στην Εισαγωγή, ως εξής:

> Κάθε σύνολο A έχει μια καθορισμένη 'ισχύ', που καλούμε τον 'πληθάριθμο' του A.
>
> Με το όνομα 'ισχύ' ή 'πληθάριθμο' του A ονομάζουμε τη γενική έννοια που απορρέει από το σύνολο A, όταν με το στοχασμό μας αποσύρουμε από τα στοιχεία x την ιδιαίτερη φύση τους και τη σειρά με την οποία έχουν δοθεί.

[8] Το αν η διαισθητική έννοια της συνάρτησης σαν υπολογιστικός κανόνας μπορεί επίσης να απεικονιστεί πιστά στη συνολοθεωρία είναι ενδιαφέρον πρόβλημα στο οποίο δεν έχει δοθεί ακόμη γενικά αποδεκτή λύση.



Διαγραμμα **4.3**. Κατασκευή του $|A|$ κατά τον Cantor.

> Το αποτέλεσμα αυτής της διπλής πράξης αφαίρεσης, τον πληθάριθμο του A συμβολίζουμε $\overline{\overline{A}}$. Εφόσον κάθε στοιχείο x, αφού αφαιρέσουμε την ιδιαίτερή του φύση, γίνεται μια ‘μονάδα’, ο πληθάριθμος $\overline{\overline{A}}$ είναι ένα συγκεκριμένο σύνολο αποτελούμενο από μονάδες, και αυτός ο αριθμός υπάρχει στο νου μας ως διανοητική εικόνα ή προβολή του συνόλου A.

Έπειτα από κάμποση συζήτηση, ο Cantor συμπεραίνει από αυτόν τον «ορισμό» ότι οι πληθάριθμοι ικανοποιούν τις επόμενες δύο βασικές συνθήκες:

$$A =_c \overline{\overline{A}},$$
$$\text{αν } \ A =_c B, \ \text{τότε } \ \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}.$$

Η πρώτη από αυτές προκύπτει φυσικά από την έννοια του Cantor: η διαδικασία αφαίρεσης του στοχασμού μας που αντιστοιχίζει σε κάθε $x \in A$ κάποια «μονάδα» u_x καταφανώς ορίζει μια αντιστοιχία $x \mapsto u_x$ ανάμεσα στο A και το $\overline{\overline{A}}$. Ο Cantor δικαιολογεί τη δεύτερη συνθήκη με έναν περιληπτικό συλλογισμό, στον οποίο η φράση-κλειδί είναι η εξής:

> ο $\overline{\overline{A}}$ αναπτύσσεται (ας το πούμε έτσι) από το A, με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε στοιχείο του A δημιουργεί μιαν ειδική μονάδα.

Για να φτάσουμε στη δεύτερη συνθήκη με τέτοια επιχειρήματα πρέπει να δεχτούμε ότι αυτές οι «ειδικές μονάδες» εξαρτώνται μόνο από το «πόσα μέλη» έχει το A και όχι την ειδική τους φύση, που κάπως μοιάζει να στηρίζεται σε μια έννοια πληθικότητας και να οδηγεί σε φαύλο κύκλο, αλλά οπωσδήποτε αυτά είπε ο Cantor.

Υπάρχει και μια τρίτη, πιο τεχνική ιδιότητα των πληθαρίθμων που ο Cantor χρησιμοποιεί χωρίς σχόλιο στον ορισμό και τη μελέτη τελεστών που δρουν σε άπειρες οικογένειες συνόλων: *για κάθε οικογένεια συνόλων $\mathcal{E}$, η κλάση των πληθαρίθμων $\{\overline{\overline{X}} \mid X \in \mathcal{E}\}$ είναι σύνολο.* Όπως και να ερμηνεύσουμε την κατασκευή του Cantor, είναι πεντακάθαρο απ’ αυτά τι πρέπει να κάνουμε για να την απεικονίσουμε πιστά στη συνολοθεωρία. Χρησιμοποιούμε μοντέρνο συμβολισμό αντί για το άχαρο $\overline{\overline{A}}$ του Cantor.

4.20. Πρόβλημα Ανάθεσης Πληθαρίθμων: *να ορίσουμε στην κλάση όλων των συνόλων έναν τελεστή $|A|$ με τις ιδιότητες*

(C1) $$A =_c |A|,$$

(C2) $$\textit{αν}\ \ A =_c B,\ \ \textit{τότε}\ \ |A| = |B|,$$

(C3) *για κάθε οικογένεια συνόλων $\mathcal{E}$, το $\{|X| \mid X \in \mathcal{E}\}$ είναι σύνολο.*

Είναι δύσκολο πρόβλημα και δεν λύθηκε μέχρι την περίοδο 1920–30, όταν το έλυσε ο von Neumann με μια κομψή κατασκευή που όμως στηρίζεται και στα δύο αξιώματα που μας λείπουν ακόμη, της Επιλογής και της Αντικατάστασης. Θα εκθέσουμε τη λύση του von Neumann στο Κεφάλαιο **12**, μετά από αρκετή προκαταρκτική εργασία. Μέχρι τότε, παρατηρούμε ότι υπάρχουν πολλοί τελεστές που ικανοποιούν τις (C1) και (C3), μεταξύ των οποίων και ο τετριμμένος $|A| = A$! Αυτό που είναι λιγότερο εμφανές είναι ότι αυτές οι δύο απλές ιδιότητες του τελεστή $|A|$ αρκούν για την ανάπτυξη μιας ικανοποιητικής θεωρίας πληθικότητας.

4.21. Πληθάριθμοι. Καλούμε (ασθενή) **τελεστή πληθικότητας** οποιονδήποτε οριστικό τελεστή στα σύνολα $A \mapsto |A|$ που ικανοποιεί την (C1) και την (C3), και **ισχυρό τελεστή πληθικότητας** αν επιπλέον ικανοποιεί την (C2). Οι **πληθάριθμοι ή πληθικοί αριθμοί** (cardinal numbers) (με βάση κάποιον δοσμένο τελεστή πληθικότητας) είναι οι τιμές του,

(C4) $$\mathrm{Card}(\kappa) \iff \kappa \in \mathrm{Card} \iff_{\mathsf{o}\rho} (\exists A)[\kappa = |A|].$$

4.22. Άσκηση. *Δείξε πως για κάθε τελεστή πληθικότητας και οποιαδήποτε σύνολα A, B,*

$$|A| = |B| \Longrightarrow A =_c B,$$

έτσι που το αντίστροφο του (C2) αληθεύει για όλους τους τελεστές πληθικότητας, ακόμα και για τους ασθενείς.

Καθορίζουμε τώρα έναν (πιθανόν ασθενή) τελεστή πληθικότητας και ορίζουμε τις αριθμητικές πράξεις στους πληθαρίθμους ως εξής:

$$\begin{aligned} \kappa + \lambda &=_{\mathsf{o}\rho} |\kappa \uplus \lambda| &&=_c \kappa \uplus \lambda, \\ \kappa \cdot \lambda &=_{\mathsf{o}\rho} |\kappa \times \lambda| &&=_c \kappa \times \lambda, \\ \kappa^\lambda &=_{\mathsf{o}\rho} |(\lambda \to \kappa)| &&=_c (\lambda \to \kappa). \end{aligned}$$

Οι πράξεις σε άπειρα σύνολα ορίζονται ανάλογα,[9]

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i \in I} \kappa_i =_{\mathsf{o}\rho} |\{(i, x) \in I \times \bigcup_{i \in I} \kappa_i \mid x \in \kappa_i\}|, \\ &\textstyle\prod_{i \in I} \kappa_i =_{\mathsf{o}\rho} |\prod_{i \in I} \kappa_i|. \end{aligned}$$

Η ιδέα είναι προφανής, π.χ. το άθροισμα $\kappa + \lambda$ είναι «ο αριθμός των στοιχείων» στο σύνολο όλων των αντικειμένων που προέρχονται από ξένα μεταξύ τους αντίγραφα των κ και λ.

[9]Παραδοσιακά συμβολίζεται το Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων και η πράξη πολλαπλασιασμού απείρων πληθαρίθμων με το ίδιο κεφαλαίο Π, χωρίς να δημιουργείται σύγχυση.

Παρατηρούμε πως μόνο μία επιλογή υπάρχει για τον $|\emptyset|$,

$$0 =_{ορ} |\emptyset| = \emptyset, \tag{4-15}$$

επειδή μόνο ο ορισμός $|\emptyset| = \emptyset$ ικανοποιεί την $\emptyset =_c |\emptyset|$. Είναι επίσης βολικό να εισαγάγουμε τους συμβολισμούς

$$1 =_{ορ} |\{0\}|, \quad 2 =_{ορ} |\{0, 1\}| \tag{4-16}$$

ώστε να μπορούμε εύκολα να αναφερθούμε στους πληθαρίθμους κάποιου μονοσυνόλου και κάποιου δισυνόλου.

4.23. Άσκηση. *Για όλα τα σύνολα A, B, $|A \cup B| \leq_c |A| + |B|$, και*

$$αν \;\; A \cap B = \emptyset, \;\; τότε \;\; |A \cup B| =_c |A| + |B|.$$

4.24. Άσκηση. *Για όλους τους πληθαρίθμους, αν $\kappa_1 =_c \kappa_2$ και $\lambda_1 =_c \lambda_2$, τότε*

$$\kappa_1 + \lambda_1 =_c \kappa_2 + \lambda_2, \quad \kappa_1 \cdot \lambda_1 =_c \kappa_2 \cdot \lambda_2, \quad \kappa_1^{\lambda_1} =_c \kappa_2^{\lambda_2}.$$

4.25. Πληθική αριθμητική. Ίσως φαίνεται κάπως ανόητη η δημιουργία θεωρίας κάποιου ασθενούς τελεστή πληθικότητας που μπορεί να είναι και ο τετριμμένος $|X| = X$, αλλά ο συμβολισμός των πληθαρίθμων και των αριθμητικών πράξεων πάνω τους μας επιτρέπει να εκφράσουμε απλά πολύπλοκες «σχέσεις ισοπληθικότητας». Θεωρούμε, για παράδειγμα, την εξίσωση

$$\kappa^{(\lambda+\mu)} =_c \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu. \tag{4-17}$$

Μοιάζει προφανής, αληθεύει κατά την Άσκηση **4.28**, και εκφράζει ακριβώς το ίδιο γεγονός με την

$$((\lambda \uplus \mu) \to \kappa) =_c (\lambda \to \kappa) \times (\mu \to \kappa), \tag{4-18}$$

πολλοί θα έλεγαν απλούστερα. Επιπλέον:

(1) η συστηματική ανάπτυξη κανόνων σαν τον (4-17) οδηγεί σε μια *πληθική αριθμητική* που εν καιρώ μας υποδεικνύει καινούρια (και χρήσιμα) γεγονότα ισοδυναμίας κατ' αναλογίαν με τη συνηθισμένη αριθμητική· και

(2) όταν επιτέλους κατασκευάσουμε τον ισχυρό τελεστή πληθικότητας του von Neumann, θα έχουμε ήδη αποδείξει όλες τις ενδιαφέρουσες ιδιότητες των πληθαρίθμων με το $=_c$ στη θέση του $=$: το μόνο που θα παραμένει θα είναι να αφαιρέσουμε (στο μυαλό μας) το δείκτη $_c$ από αποτελέσματα που ήδη έχουμε καταλάβει, χάρη στο ακόλουθο συμπέρασμα.

4.26. Άσκηση. *Αν ορίσουμε τους πληθάριθμους χρησιμοποιώντας ισχυρό τελεστή πληθικότητας, τότε για όλους τους πληθικούς αριθμούς κ, λ,*

$$|\kappa| = \kappa \text{ και } \kappa =_c \lambda \iff \kappa = \lambda. \tag{4-19}$$

Για να αποδείξουμε ταυτότητες της πληθικής αριθμητικής, χρησιμοποιούμε συστηματικά την (C1) και τις ιδιότητες αντικατάστασης της Άσκησης **4.18**. Για παράδειγμα, η προσεταιριστική ιδιότητα της πληθικής πρόσθεσης δείχνεται με τον υπολογισμό:

$$\begin{aligned}
\kappa + (\lambda + \mu) &=_c \kappa \uplus (\lambda + \mu) && \text{ορισμός,}\\
&=_c \kappa \uplus (\lambda \uplus \mu) && \text{ορισμός, (C1) και } \mathbf{4.18},\\
&=_c (\kappa \uplus \lambda) \uplus \mu && \text{θέλει απόδειξη}\\
&=_c (\kappa + \lambda) + \mu && \text{αναστρέφοντας τα βήματα.}
\end{aligned}$$

Η μαθηματική ουσία αυτού του υπολογισμού είναι στο βήμα με την ένδειξη «θέλει απόδειξη», που σ' αυτήν την περίπτωση είναι πολύ εύκολο:

4.27. Άσκηση. *Δείξε ότι για οποιαδήποτε τρία σύνολα K, L, M,*

$$K \uplus (L \uplus M) =_c (K \uplus L) \uplus M.$$

4.28. Άσκηση. *Δείξε την* (4-17)*, αποδεικνύοντας πρώτα ότι για οποιαδήποτε τρία σύνολα K, L, M,*

$$\text{αν } L \cap M = \emptyset, \text{ τότε } ((L \cup M) \to K) =_c (L \to K) \times (M \to K).$$

Όσον αφορά την πιο τεχνική ιδιότητα (C3), ας θεωρήσουμε την ταυτότητα

$$|\bigcup_{i \in I} A_i| =_c \sum_{i \in I} |A_i|, \tag{4-20}$$

που οπωσδήποτε πρέπει να αληθεύει αν τα σύνολα στην οικογένεια $(i \mapsto A_i)_{i \in I}$ είναι ξένα ανά δύο. Πριν την αποδείξουμε όμως, πρέπει να της δώσουμε σαφές νόημα, και γι' αυτό πρέπει να βεβαιωθούμε ότι πράγματι *υπάρχει συνάρτηση* $(i \mapsto |A_i|)$, και για να αποδείξουμε αυτό χρειαζόμαστε την (C3):

4.29. Λήμμα. *Για κάθε οικογένεια συνόλων $A = (i \mapsto A_i)_{i \in I}$ υπάρχει συνάρτηση $f : I \to f[I]$ ώστε*

$$f(i) = |A_i| \quad (i \in I).$$

Απόδειξη. Από την (C3) με

$$\mathcal{E} = \{A_i \mid i \in I\} = A[I],$$

υπάρχει σύνολο W που περιέχει κάθε $|A_i|$ για $i \in I$, και θέτουμε

$$f =_{\mathsf{op}} \{(i, w) \in I \times W \mid w = |A_i|\}. \qquad \dashv$$

Πάντως ταυτότητες σαν την (4-20) χρειάζονται το Αξίωμα Επιλογής για να αποδειχτούν, και επομένως δεν θα έχουμε πολλές ευκαιρίες να χρησιμοποιήσουμε την (C3) πριν από το Κεφάλαιο **8**.

4.30. Δομημένα σύνολα (structured sets). *Τοπολογικός χώρος* είναι ένα σύνολο *σημείων* X, στο οποίο έχει οριστεί κάποια *τοπολογική δομή* που προσδιορίζεται από μια οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X με τις εξής ιδιότητες:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. $A, B \in \mathcal{T} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$.
3. Για κάθε οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$ συνόλων στην $\mathcal{T}$, η ένωση $\bigcup \mathcal{E}$ επίσης ανήκει στην $\mathcal{T}$.

Κάθε οικογένεια συνόλων $\mathcal{T}$ με αυτές τις ιδιότητες καλείται **τοπολογία**, με **ανοικτά σύνολα** τα μέλη της και **κλειστά σύνολα** τα συμπληρώματά τους σχετικά με τον X, δηλαδή τα σύνολα της μορφής $X \setminus G$ με το G ανοικτό.

Τέτοιες έννοιες συνόλων «προικισμένων» με δομή βρίσκουμε παντού στα μαθηματικά: υπάρχουν γραφήματα, ομάδες, διανυσματικοί χώροι, πολλαπλότητες, μερικά διατεταγμένοι χώροι κ.λπ. κ.λπ. Σε καθεμιά απ' αυτές τις περιπτώσεις υπάρχει ένα σύνολο X, τυπικά καλούμενο «ο χώρος», και ένα σύμπλεγμα σχετιζόμενων αντικειμένων που επιβάλλουν κάποια δομή στο χώρο—συναρτήσεις, οικογένειες, άλλοι χώροι με τη δική τους δομή κ.λπ. Ο τελεστής ζεύγους προσφέρει έναν απλό τρόπο να απεικονίσουμε πιστά τέτοιες έννοιες στη συνολοθεωρία.

Δομημένο σύνολο (ή χώρος) καλείται ένα ζεύγος

$$U = (A, \mathcal{S}), \tag{4-21}$$

όπου το $A = \mathrm{Field}(U)$ είναι σύνολο, το *πεδίο* του U, και $\mathcal{S}$ είναι τυχόν αντικείμενο, ο *σκελετός* (frame)[10] του U.

Παραδείγματος χάριν, **τοπολογικός χώρος** είναι ένα δομημένο σύνολο $(X, \mathcal{T})$, όπου ο σκελετός $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στο X, όπως το ορίσαμε αυτό πιο πάνω. *Ομάδα* είναι ένα δομημένο σύνολο

$$U = (G, (e, \cdot)) \tag{4-22}$$

όπου $e \in G$, $\cdot : G \times G \to G$ είναι διμελής συνάρτηση και ισχύουν τα *αξιώματα ομάδας* τα οποία εδώ δεν μας ενδιαφέρουν. Προσέξτε ότι με τον ορισμό της τριάδας (4-3), ο ορισμός (4-22) είναι ισοδύναμος του

$$U = (G, e, \cdot). \tag{4-23}$$

Συχνά ο σκελετός δομημένου συνόλου είναι n-άδα αντικειμένων, και τότε το δομημένο σύνολο είναι $(n+1)$-άδα που έχει για πρώτο στοιχείο το πεδίο. Θα συναντήσουμε πολλά παραδείγματα τέτοιων δομημένων συνόλων στη συνέχεια.

Όπως συνηθίζεται στα μαθηματικά, θα ταυτίζουμε συστηματικά ένα δομημένο σύνολο με το πεδίο του όταν ο σκελετός είναι προφανής ή άνευ σημασίας. Για παράδειγμα, θα αναφερόμαστε στον «τοπολογικό χώρο X» αντί για το εξεζητημένο «$(X, \mathcal{T})$», με «σημεία» τα μέλη του X, «υποσύνολα» τα υποσύνολα του X κ.λπ. Στη γενική περίπτωση, τα μέλη ενός δομημένου συνόλου U είναι τα μέλη του πεδίου του $\mathrm{Field}(U)$,

$$x \in U \iff_{\text{ορ}} x \in \mathrm{Field}(U), \tag{4-24}$$

τα υποσύνολα του U είναι τα υποσύνολα του $\mathrm{Field}(U)$ κ.λπ. Παρατηρήστε ότι ο συμβατικός συμβολισμός (4-24) δεν μπορεί να προκαλέσει σύγχυση: έχουμε

[10]Πιο ταιριαστό θα ήταν να ονομάζαμε το $\mathcal{S}$ τη *δομή* του χώρου $(A, \mathcal{S})$, αλλά η λέξη αυτή έχει χρησιμοποιηθεί τόσο πολύ στη Λογική και τη Συνολοθεωρία που είναι καλύτερο να αποφύγουμε την αυστηρή σύνδεσή της με μία ακόμη έννοια. Μερικοί καλούν «δομές» τα αντικείμενα που εδώ καλούμε «δομημένα σύνολα», τουλάχιστον όταν αυτά είναι ιδιαίτερα απλά.

(σκόπιμα) αποφύγει να προσδιορίσουμε συγκεκριμένο τελεστή ζεύγους—και μάλιστα δεν έχουμε αποκλείσει την πιθανότητα το ζεύγος $(A, \mathcal{S})$ να είναι άτομο (!)—ώστε η πρόταση

$$x \in (A, \mathcal{S})$$

δεν έχει νόημα μέχρις ότου την ορίσουμε, και μόλις τώρα την ορίσαμε με την (4-24).

Προβλήματα για το Κεφάλαιο 4

Ο ορισμός του ζεύγους στην απόδειξη του **4.2** ανακαλύφθηκε από τον Πολωνό συνολοθεωρητικό και τοπολόγο Kuratowski. Μερικά χρόνια νωρίτερα, ο Αμερικανός αναλύστας Wiener είχε βρει μιαν άλλη, κάπως πιο πολύπλοκη λύση στο πρόβλημα του ορισμού του ζεύγους στη συνολοθεωρία.

x4.1. (Wiener) Οι ιδιότητες (OP1) και (OP2) στο **4.1** ισχύουν με τον εξής ορισμό του ζεύγους:

$$(x, y) =_{\mathsf{op}} \{\{\emptyset, \{x\}\}, \{\{y\}\}\}.$$

x4.2. Οι ιδιότητες (OP1) και (OP2) στο **4.1** ισχύουν με τον ακόλουθο ορισμό του ζεύγους:

$$(x, y) =_{\mathsf{op}} \{\{0, x\}, \{1, y\}\},$$

όπου τα $0, 1$ είναι δύο διακεκριμένα αντικείμενα, σαν αυτά που ορίζονται από την (4-16). Υποδειξη. Υπολόγισε τα $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$ και $(1, 0)$ (με αυτό το ζεύγος) για να δεις τι συμβαίνει, και τότε διάκρινε περιπτώσεις, ανάλογα με το αν $x = y$ ή $x \neq y$.

x4.3. Δείξε από τα αξιώματα ότι για όλα τα σύνολα A, B, C,

$$((A \times B) \to C) =_c (A \to (B \to C)).$$

x4.4. Δείξε από τα αξιώματα το θεώρημα του Cantor **2.21**, ότι για κάθε σύνολο A, $A <_c \mathcal{P}(A)$. Ποια αξιώματα χρειάζονται;

x4.5. Η διμελής σχέση $\sim \subseteq (A \times A)$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο A τότε και μόνον αν υπάρχει σύνολο Q και επιμορφισμός

$$\pi : A \twoheadrightarrow Q \tag{4-25}$$

έτσι ώστε

$$x \sim y \iff \pi(x) = \pi(y). \tag{4-26}$$

Αν ισχύουν οι (4-25) και (4-26), καλούμε το Q **πηλίκο** του A από την $\sim$ και τον π **προσδιοριστικό ομομορφισμό** ή απλούστερα **προσδιορισμό** της $\sim$. Στην απόδειξη του **4.12** κατασκευάσαμε το πηλίκο $[\![A/{\sim}]\!]$ και τον προσδιορισμό $(x \mapsto [x/{\sim}])$, αλλά σε πολλές περιπτώσεις υπάρχουν άλλα πηλίκα που βοηθούν περισσότερο την κατανόηση της δομής της συγκεκριμένης σχέσης ισοδυναμίας.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & A \arrow[d, "\pi"] \\ Q \arrow[r, "f^*"] & Q \end{tikzcd}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **4.4**.

x4.6. Υποθέτουμε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο A και η $\pi : A \to A$ είναι συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$x \sim y \Longrightarrow \pi(x) = \pi(y) \in [x/{\sim}].$$

Δείξε ότι η π είναι προσδιορισμός που φανερώνει ότι η εικόνα της $\pi[A] \subseteq A$ είναι πηλίκο του A από την $\sim$.

x4.7. Έστω $x_0 \in A$ στοιχείο κάποιου συνόλου και όρισε στο συναρτησιακό χώρο $(A \to B)$ τη σχέση

$$f \sim g \iff_{\text{ορ}} f(x_0) = g(x_0).$$

Δείξε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο χώρο $(A \to B)$, και βρες έναν προσδιορισμό $\pi : (A \to B) \twoheadrightarrow B$ που φανερώνει ότι το B είναι πηλίκο του $(A \to B)$ από την $\sim$.

x4.8. Έστω $x_0 \neq x_1$ δύο διαφορετικά μέλη ενός συνόλου A. Να ορίσεις προσδιορισμό που φανερώνει ότι το $(B \times B)$ είναι πηλίκο του $(A \to B)$ από τη σχέση ισοδυναμίας

$$f \sim g \iff_{\text{ορ}} f(x_0) = g(x_0) \,\&\, f(x_1) = g(x_1).$$

x4.9. Έστω σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο σύνολο A και $f : A \to A$ συνάρτηση που **σέβεται** την $\sim$, δηλαδή

$$x \sim y \Longrightarrow f(x) \sim f(y).$$

Έστω Q οποιοδήποτε πηλίκο του A από την $\sim$. Δείξε ότι υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f^* : Q \to Q$ τέτοια ώστε το Διάγραμμα **4.4** να είναι *αντιμεταθετικό*, δηλαδή $\pi f = f^* \pi$,

$$f^*(\pi x) = \pi(f(x)), \quad (x \in A),$$

όπου η $\pi : A \to Q$ είναι ο προσδιορισμός.

x4.10. Για όλους τους πληθαρίθμους κ, λ, μ,

$$\kappa + 0 =_c \kappa, \quad \kappa \cdot 0 =_c 0, \quad \kappa \cdot 1 =_c \kappa.$$

x4.11. Για όλους τους πληθαρίθμους κ, λ, μ,

$$\kappa + (\lambda + \mu) =_c (\kappa + \lambda) + \mu,$$
$$\kappa + \lambda =_c \lambda + \kappa.$$

x4.12. Για όλους τους πληθαρίθμους κ, λ, μ,

$$\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) =_c (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu,$$
$$\kappa \cdot \lambda =_c \lambda \cdot \kappa,$$
$$\kappa \cdot (\lambda + \mu) =_c \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu.$$

x4.13. Για όλους τους πληθαρίθμους κ, $|\mathcal{P}(\kappa)| =_c 2^\kappa$.

x4.14. Για όλους τους πληθαρίθμους κ, λ, μ,

$$\kappa^0 =_c 1, \quad \kappa^1 =_c \kappa, \quad \kappa^2 =_c \kappa \cdot \kappa.$$

x4.15. Για όλους τους πληθαρίθμους κ, λ, μ,

$$(\kappa \cdot \lambda)^\mu =_c \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu,$$
$$\kappa^{(\lambda+\mu)} =_c \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu,$$
$$(\kappa^\lambda)^\mu =_c \kappa^{\lambda \cdot \mu}.$$

x4.16. Για όλους τους πληθαρίθμους κ, λ, μ

$$\kappa \leq_c \mu \implies \kappa + \lambda \leq_c \mu + \lambda,$$
$$\kappa \leq_c \mu \implies \kappa \cdot \lambda \leq_c \mu \cdot \lambda,$$
$$\lambda \leq_c \mu \implies \kappa^\lambda \leq_c \kappa^\mu \qquad (\kappa \neq 0),$$
$$\kappa \leq_c \lambda \implies \kappa^\mu \leq_c \lambda^\mu.$$

Για ποιές τιμές των λ, μ δεν ισχύει η τρίτη συνεπαγωγή όταν $\kappa = 0$;

Προσοχή! Όπως θα δούμε αργότερα, οι αλγεβρικές πράξεις δε σέβονται πάντα τις αυστηρές ανισότητες ανάμεσα σε άπειρους πληθικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, μπορούμε να έχουμε

$$\kappa <_c \mu, \text{ αλλά } \kappa + \lambda =_c \mu + \lambda.$$

x4.17. Για όλα τα σύνολα A, B και όλους τους πληθαρίθμους κ, λ,

$$\prod_{i \in A} B = (A \to B), \quad \prod_{i \in \lambda} \kappa = \kappa^\lambda.$$

x4.18. Αν $a \neq b$ είναι διαφορετικά αντικείμενα και κ_a, κ_b είναι πληθάριθμοι, δείξε ότι

$$\kappa_a + \kappa_b =_c \sum_{i \in \{a,b\}} \kappa_i,$$
$$\kappa_a \cdot \kappa_b =_c \prod_{i \in \{a,b\}} \kappa_i.$$

x4.19. Για κάθε οικογένεια πληθαρίθμων με δείκτες

$$\kappa \cdot \sum_{i \in I} \lambda_i =_c \sum_{i \in I} \kappa \cdot \lambda_i.$$

x4.20. Δείξε ότι $\kappa \cdot \lambda = 0 \iff \kappa = 0 \vee \lambda = 0$. Επίσης δείξε μια από τις κατευθύνσεις της ισοδυναμίας

$$\prod_{i \in I} \kappa_i = 0 \iff (\exists i \in I)[\kappa_i = 0]. \tag{4-27}$$

(Αν έδειξες και τις δύο κατευθύνσεις της (4-27), ψάξε να βρεις το λάθος σου, επειδή η μία από τις δύο κατευθύνσεις χρειάζεται το Αξίωμα Επιλογής.)

x4.21. Ο ορισμός της ισοδυναμίας κατά τον Zermelo **3.28** συμπίπτει με την ισοπληθικότητα όπως την ορίσαμε, δηλαδή:

$$A =_c B \iff A \sim_Z B.$$

Ο ορισμός **2.6** των απείρων και πεπερασμένων συνόλων χρησιμοποιεί το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών και δεν μπορούμε να μελετήσουμε αυτές τις έννοιες αξιωματικά πριν δώσουμε έναν αξιωματικό ορισμό του $\mathbb{N}$. Υπάρχει όμως και ένας άλλος απλούστερος ορισμός αυτών των εννοιών που μπορούμε να τον δώσουμε τώρα, και τον οποίο θα αποδείξουμε αργότερα ισοδύναμο του **2.6**.

4.31. Ορισμός. Το σύνολο A είναι **άπειρο κατά τον Dedekind** αν υπάρχει μονομορφισμός

$$f : A \rightarrowtail B \subsetneq A$$

από το A σε κάποιο γνήσιο υποσύνολο του εαυτού του. Αν το A δεν είναι Dedekind-άπειρο, τότε είναι **Dedekind-πεπερασμένο**.

x4.22. Αν το A είναι άπειρο κατά τον Dedekind και $A =_c B$, τότε και το B είναι άπειρο κατά τον Dedekind.

x4.23. Αν το A είναι πεπερασμένο κατά τον Dedekind, τότε και κάθε υποσύνολο του A είναι πεπερασμένο κατά τον Dedekind.

x4.24. Κάθε σύνολο I που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\emptyset \in I, \ (\forall x)[x \in I \Longrightarrow \{x\} \in I]$$

είναι άπειρο κατά τον Dedekind.

Οι περισσότερες ιδιότητες των Dedekind-πεπερασμένων συνόλων χρειάζονται το Αξίωμα Επιλογής για την απόδειξή τους. Η επόμενη μπορεί να αποδειχθεί τώρα, αλλά χρειάζεται αρκετή σκέψη.

* **x4.25.** Αν το A είναι Dedekind-πεπερασμένο και $t \notin A$, τότε το $A \cup \{t\}$ είναι επίσης Dedekind-πεπερασμένο. Υπόδειξη. Υπέθεσε ότι η $\pi : A \cup \{t\} \rightarrowtail A \cup \{t\}$ αφήνει κάποιο σημείο του $A \cup \{t\}$, και θεώρησε περιπτώσεις ανάλογα με το αν αυτό είναι το t· ή $\pi(t) = t$· ή «αλλιώς», κι εδώ είναι που χρειάζεται σκέψη.

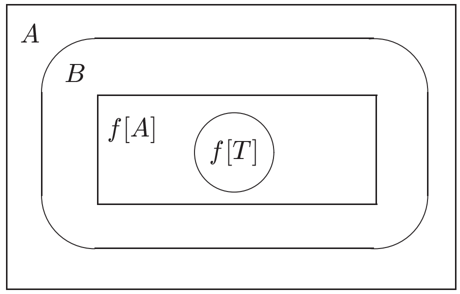
Η κλασική απόδειξη του θεωρήματος Schröder-Bernstein **2.26** χρησιμοποιεί επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς και δεν μπορούμε να τη δικαιολογήσουμε αξιωματικά τώρα. Στις επόμενες δύο ασκήσεις σκιαγραφούμε μια τελείως διαφορετική απόδειξη (του Zermelo) γι' αυτό το βασικό θεώρημα, κάπως δυσνόητη, αλλά επίσης κομψή, σύντομη και χωρίς μνεία των φυσικών.

* **x4.26.** Αν $A' \subseteq B \subseteq A$ και $A =_c A'$, τότε επίσης $A =_c B$. Υπόδειξη. Έστω $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A'$ αντιστοιχία που φανερώνει ότι $A =_c A'$ και

$$Q = B \setminus f[A]$$

η «έλλειψη» του B από την εικόνα $f[A]$. Ορίζουμε την οικογένεια υποσυνόλων του A

$$\mathcal{T} = \{X \mid Q \cup f[X] \subseteq X\}$$



Διαγραμμα **4.5**. Θεώρημα Schröder-Bernstein κατά τον Zermelo.

και επαληθεύουμε πρώτα ότι η τομή

$$T =_{\text{ορ}} \bigcap \mathcal{T} \in \mathcal{T},$$

ώστε $Q \cup f[T] \subseteq T$. Κάπως πιο δύσκολη είναι η απόδειξη ότι πράγματι $T = Q \cup f[T]$· αυτή η ισότητα όμως συνεπάγεται ότι

$$B = T \cup (f[A] \setminus f[T]),$$

που τελειώνει την απόδειξη, αφού τα T και $(f[A] \setminus f[T])$ είναι ξένα σύνολα και η ένωσή τους είναι (εύκολα πια) ισοπληθική με το A.

* **x4.27.** Δείξε το θεώρημα Schröder-Bernstein από τα αξιώματα, χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα **x4.26**. Υποδειξη. Αν $f : A \rightarrowtail C$ και $g : C \rightarrowtail A$, τότε

$$A =_c gf[A] \subseteq g[C] \subseteq A, \quad g[C] =_c C.$$