ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Συνόλων

Ενότητα: Ισοπληθικότητα

Γιάννης Μοσχοβάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Σημειώματα

Σημειώμα ιστορικού εκδόσεων έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1. Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη στο σύνδεσμο http://www.math.ucla.edu/ ynm/lectures/g.pdf

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα αδειοδότησης

Διατήρηση σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΙΣΟΠΛΗΘΙΚΟΤΗΤΑ

Μετά από αυτά τα προκαταρκτικά μπορούμε να διατυπώσουμε τους βασικούς ορισμούς του Cantor για το πληθικό μέγεθος των συνόλων.

2.1. Ορισμός. Δύο σύνολα A, B είναι **ισοπληθικά** (equinumerous) ή **ίσα σε πλήθος** αν υπάρχει (αμοιβαία, ένα-προς-ένα) αντιστοιχία των στοιχείων τους, συμβολικά:

$$A =_c B \iff_{\text{ορ}} (\exists f)[f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B].$$

Αυτός ο ορισμός της ισοπληθικότητας προφανώς βασίζεται στις διαισθήσεις μας για τα πεπερασμένα σύνολα. Μπορούμε να είμαστε σίγουροι π.χ. ότι ένα μαγαζί παπουτσιών προσφέρει τον ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παπουτσιών, χωρίς να ξέρουμε ακριβώς ποιος είναι αυτός ο αριθμός: η συνάρτηση που συσχετίζει κάθε αριστερό παπούτσι με το δεξί παπούτσι στο ίδιο ζευγάρι είναι αντιστοιχία που φανερώνει την ισοπληθικότητα αυτών των δύο συνόλων. Το ριζοσπαστικό στοιχείο του ορισμού του Cantor είναι η πρόταση να δεχτούμε την ύπαρξη αμοιβαίας αντιστοιχίας ως χαρακτηριστική ιδιότητα της ισοπληθικότητας για όλα τα σύνολα, παρά το γεγονός ότι η εφαρμογή της στα άπειρα σύνολα μπορεί να θεωρηθεί προβληματική. Έτσι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ είναι ισοπληθικό με το γνήσιο υποσύνολό του $\mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\{0, 1, 2, \dots\} =_c \{1, 2, 3, \dots\},$$

βάσει της αντιστοιχίας $(x \mapsto x + 1)$. Επίσης, στους πραγματικούς αριθμούς,

$$(0, 1) =_c (0, 2)$$

βάσει της αντιστοιχίας $(x \mapsto 2x)$ όπου, ως συνήθως, για δύο πραγματικούς αριθμούς $\alpha < \beta$,

$$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}.$$

Θα χρησιμοποιούμε τον ανάλογο συμβολισμό και για τα κλειστά ή ημίκλειστα διαστήματα $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$ κ.λπ.

2.2. Πρόταση. *Για όλα τα σύνολα A, B, C,*

$$A =_c A,$$
$$\textit{αν} \;\; A =_c B, \;\; \textit{τότε} \;\; B =_c A,$$
$$\textit{αν} \;\; (A =_c B \,\&\, B =_c C), \;\; \textit{τότε} \;\; A =_c C.$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \pi: & 3 & 1 & 0 & \cancel{1} & 5 & \cancel{3} & 9 & 7 & & \cdots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \\ & f(0) & f(1) & f(2) & & f(3) & & f(4) & f(5) & & \cdots \end{array}$$

Διαγραμμα **2.1**. Διαγραφή επαναλήψεων μιας απαρίθμησης.

Αποδειξη. Για την τρίτη συνεπαγωγή παραδείγματος χάριν, αν οι αντιστοιχίες $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ και $g : B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$ φανερώνουν τις ισοπληθικότητες της υπόθεσης, τότε η σύνθεση $gf : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$ φανερώνει ότι $A =_c C$. ⊣

2.3. Ορισμός. Το σύνολο A είναι **μικρότερο-ίσο** του B **ως προς το πλήθος** αν είναι ισοπληθικό με κάποιο υποσύνολο του B, συμβολικά:

$$A \leq_c B \iff (\exists C)[C \subseteq B \;\&\; A =_c C].$$

2.4. Πρόταση. $A \leq_c B \iff (\exists f)[f : A \rightarrowtail B]$.

Αποδειξη. Αν $A =_c C \subseteq B$ και η $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$ φανερώνει αυτή την ισοδυναμία, τότε η f είναι μονομορφισμός από το A στο B. Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, αν υπάρχει κάποιος μονομορφισμός $f : A \rightarrowtail B$, τότε αυτός ο f φανερώνει ότι $A =_c f[A] \subseteq B$, έτσι που $A \leq_c B$ από τον ορισμό. ⊣

2.5. Άσκηση. *Για όλα τα σύνολα A, B, C,*

$$A \leq_c A,$$
$$\text{αν } (A \leq_c B \,\&\, B \leq_c C), \text{ τότε } A \leq_c C.$$

2.6. Ορισμός. Το σύνολο A είναι **πεπερασμένο** (finite) αν υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός n ώστε

$$A =_c \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\},$$

αλλιώς το A είναι **άπειρο** (infinite). Κατά συνέπεια το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι πεπερασμένο, αφού $\emptyset = \{i \in \mathbb{N} \mid i < 0\}$.

Το σύνολο A είναι **απαριθμητό** ή **αριθμήσιμο** (countable ή denumerable) αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, αλλιώς είναι **αναπαρίθμητο** ή **μη αριθμήσιμο** (uncountable).

2.7. Πρόταση. *Για κάθε σύνολο A, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(1) *το A είναι απαριθμητό,*

(2) $A \leq_c \mathbb{N}$.

(3) *Είτε $A = \emptyset$, είτε το A επιδέχεται* **απαρίθμηση**, *δηλαδή υπάρχει επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$, έτσι ώστε*

$$A = \pi[\mathbb{N}] = \{\pi(0), \pi(1), \pi(2), \dots\}.$$

Αποδειξη. Θα αποδείξουμε τις συνεπαγωγές κυκλικά.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Αν το A είναι απαριθμητό, τότε είτε $A =_c \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$ για κάποιο n, είτε $A =_c \mathbb{N}$, οπότε και στις δύο περιπτώσεις, $A =_c C$ για κάποιο $C \subseteq \mathbb{N}$, άρα $A \leq_c \mathbb{N}$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Έστω $A \neq \emptyset$. Επιλέγουμε κάποιο $x_0 \in A$, και από το (2) παίρνουμε $f : A \rightarrowtail \mathbb{N}$. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$\pi(i) = \begin{cases} x_0, & \text{αν } i \notin f[A], \\ f^{-1}(i), & \text{διαφορετικά, δηλ., αν } i \in f[A]. \end{cases}$$

Η $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ είναι καλά ορισμένη (διότι η f είναι μονομορφισμός, έτσι που η $f^{-1}(i)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένη), και είναι επιμορφισμός, αφού $x_0 \in A$ και για κάθε $x \in A$, $x = \pi(f(x))$.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Αν A πεπερασμένο, τότε το (1) αληθεύει. Έστω A όχι πεπερασμένο και $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ απαρίθμηση του A. Πρέπει να κατασκευάσουμε μιαν άλλη απαρίθμηση $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ *χωρίς επαναλήψεις*, έτσι ώστε να είναι η f αντιστοιχία του $\mathbb{N}$ με το A που φανερώνει ότι το A είναι αριθμήσιμα άπειρο. Η απόδειξη εξηγείται πλήρως από το Διάγραμμα **2.1**: απλώς διαγράφουμε τις επαναλήψεις από την απαρίθμηση π του A. Για να δώσουμε αυστηρό, αναδρομικό ορισμό της f, παρατηρούμε πρώτα ότι επειδή το A δεν είναι πεπερασμένο, για κάθε ακολουθία $a_0, \ldots, a_n$ μελών του υπάρχει κάποιο m έτσι που $\pi(m) \notin \{a_0, \ldots, a_n\}$, και θέτουμε:

$$\begin{aligned} f(0) &= \pi(0), \\ m_n &= \text{το ελάχιστο } m > n \text{ ώστε } \pi(m) \notin \{f(0), \ldots, f(n)\}, \\ f(n+1) &= \pi(m_n). \end{aligned}$$

Προφανώς η f είναι μονομορφισμός και αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $x \in A$ είναι τιμή της. Εξ ορισμού $x = \pi(0) = f(0)$. Έστω $x = \pi(n+1)$· αν $x \in \{f(0), \ldots, f(n)\}$, τότε $x = f(i)$ για κάποιο $i \leq n$, και αν $x \notin \{f(0), \ldots, f(n)\}$, τότε εξ ορισμού $m_n = n + 1$ και $f(n+1) = \pi(m_n) = x$. $\dashv$

2.8. Άσκηση. *Αν το A είναι αριθμήσιμο και υπάρχει μονομορφισμός $f : B \rightarrowtail A$, τότε και το B είναι αριθμήσιμο. Ειδικότερα, κάθε υποσύνολο αριθμήσιμου συνόλου είναι αριθμήσιμο.*

2.9. Άσκηση. *Αν το A είναι αριθμήσιμο και υπάρχει επιμορφισμός $f : A \twoheadrightarrow B$, τότε και το B είναι αριθμήσιμο.*

Το επόμενο απλό θεώρημα είναι από τα πιο βασικά της συνολοθεωρίας.

2.10. Θεώρημα (Cantor)**.** *Για κάθε ακολουθία $A_0, A_1, \ldots$ απαριθμητών συνόλων, η ένωση*

$$A = \bigcup\nolimits_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \cup A_1 \cup \cdots$$

είναι επίσης απαριθμητό σύνολο.

Ειδικότερα, η ένωση $A \cup B$ δύο απαριθμητών συνόλων είναι απαριθμητό σύνολο.

$$\begin{array}{lcccc}
A_0 : & a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots \\
A_1 : & a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots \\
A_2 : & a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots \\
\vdots & & \cdots & &
\end{array}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **2.2**. Η πρώτη διαγώνιος μέθοδος του Cantor.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για τον δεύτερο ισχυρισμό αρκεί να εφαρμόσουμε τον πρώτο στην ακολουθία

$$A, B, B, \ldots$$

Για τον πρώτο, αρκεί (γιατί;) να αποδείξουμε το θεώρημα στην ειδική περίπτωση που κανένα A_n δεν είναι κενό, οπότε μπορούμε να βρούμε μιαν απαρίθμηση $\pi^n : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A_n$ για κάθε A_n. Αν θέσουμε

$$a_i^n = \pi^n(i)$$

για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό, τότε για κάθε n

$$A_n = \{a_0^n, a_1^n, \ldots\},$$

και μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν πίνακα στοιχείων από αυτές τις απαριθμήσεις που περιέχει όλα τα στοιχεία της ένωσης A. Τα βέλη στο Διάγραμμα **2.2** δείχνουν πώς μπορούμε να απαριθμήσουμε την ένωση:

$$A = \{a_0^0, a_0^1, a_1^0, a_0^2, a_1^1, \ldots\}. \qquad \dashv$$

2.11. Πόρισμα. *Το σύνολο των (θετικών και αρνητικών) ακέραιων αριθμών*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

είναι αριθμήσιμο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, \ldots\}$ και το σύνολο των αρνητικών ακέραιων αριθμών είναι αριθμήσιμο μέσω της αντιστοιχίας $(x \mapsto -(x+1))$. $\dashv$

2.12. Πόρισμα. *Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το σύνολο $\mathbb{Q}^+$ των ≥ 0 ρητών είναι αριθμήσιμο, επειδή

$$\mathbb{Q}^+ = \bigcup\nolimits_{n=1}^{\infty} \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}\}$$

και κάθε $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}\}$ απαριθμείται από την $(m \mapsto \frac{m}{n})$. Με τον ίδιο τρόπο, το σύνολο $\mathbb{Q}^-$ των αρνητικών ρητών αριθμών είναι επίσης αριθμήσιμο, καθώς και η ένωση $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$. $\dashv$

$$
\begin{array}{ccccc}
\alpha_0 : & a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots \\
\alpha_1 : & a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots \\
\alpha_2 : & a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots \\
\vdots & & \cdots & &
\end{array}
$$

Διαγραμμα **2.3**. Η δεύτερη διαγώνιος μέθοδος του Cantor.

Αυτό το πόρισμα ήταν το πρώτο σημαντικό βήμα προόδου που έκανε ο Cantor στο πρόβλημα της ταξινόμησης των τάξεων απείρου και θεωρήθηκε κάπως παράδοξο στην εποχή του, επειδή το $\mathbb{Q}$ φαίνεται τόσο μεγαλύτερο από το $\mathbb{N}$. Αμέσως μετά ο Cantor απέδειξε ότι υπάρχουν και αναπαρίθμητα σύνολα.

2.13. Θεώρημα (Cantor). *Το σύνολο*

$$\Delta = \{(a_0, a_1, \dots) \mid (\forall i)[a_i = 0 \vee a_i = 1]\}$$

των απείρων, δυαδικών ακολουθιών είναι αναπαρίθμητο.

Αποδειξη. Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε[3] ότι το Δ είναι απαριθμητό, δηλαδή

$$\Delta = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \},$$

όπου για κάθε n,

$$\alpha_n = (a_0^n, a_1^n, \dots)$$

είναι μια ακολουθία από 0 και 1. Φτιάχνουμε έναν πίνακα με αυτές τις ακολουθίες όπως πριν, και μετά ορίζουμε την ακολουθία β εναλλάσσοντας τα 0 με τα 1 στη «διαγώνιο» ακολουθία $a_0^0, a_1^1, \dots$:

$$\beta(n) = 1 - a_n^n.$$

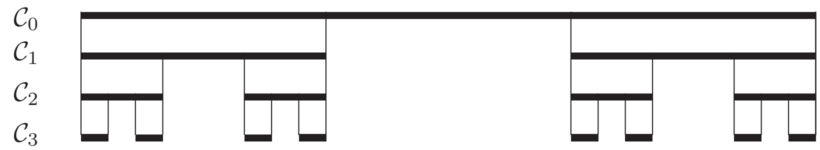
Είναι προφανές ότι $\beta \neq \alpha_n$, για κάθε n, επειδή

$$\beta(n) = 1 - \alpha_n(n) \neq \alpha_n(n)\cdot$$

συνεπώς η ακολουθία $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ δεν απαριθμεί ολόκληρο το Δ, αντίθετα με την αρχική μας υπόθεση. $\dashv$

2.14. Πόρισμα (Cantor). *Το σύνολο* $\mathbb{R}$ *των πραγματικών αριθμών είναι αναπαρίθμητο.*

[3] Για να αποδείξουμε μια πρόταση θ με *απαγωγή σε άτοπο*, δεχόμαστε την άρνησή της $\neg\theta$ και απ' αυτήν συμπεραίνουμε κάτι που αντιτίθεται σε πράγματα γνωστά, μιαν αντίφαση, κάποιο *άτοπο*: συνάγεται ότι η άρνηση της θ δεν μπορεί να αληθεύει, και επομένως αληθεύει η θ. Τέτοιες αποδείξεις τυπικά αρχίζουν με τη φράση-κλειδί *προς απαγωγή σε άτοπο*, που προειδοποιεί τον αναγνώστη ότι η υπόθεση που ακολουθεί είναι η άρνηση της πρότασης την οποία θέλουμε να αποδείξουμε.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **2.4**. Τα πρώτα τέσσερα στάδια στην κατασκευή του $\mathcal{C}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε πρώτα μιαν ακολουθία συνόλων $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots$ πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

1. $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$.
2. Κάθε $\mathcal{C}_n$ είναι ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων και
$$\mathcal{C}_0 \supseteq \mathcal{C}_1 \supseteq \cdots \mathcal{C}_n \supseteq \mathcal{C}_{n+1} \supseteq \cdots .$$
3. Το $\mathcal{C}_{n+1}$ κατασκευάζεται αφαιρώντας το (ανοικτό) μέσο τρίτο κάθε διαστήματος του $\mathcal{C}_n$, δηλαδή με την αντικατάσταση κάθε κλειστού διαστήματος $[a, b]$ στο $\mathcal{C}_n$ από τα δύο κλειστά διαστήματα
$$L[a,b] = [a, a + \frac{1}{3}(b-a)],$$
$$R[a,b] = [a + \frac{2}{3}(b-a), b].$$

Σε κάθε δυαδική ακολουθία $\delta \in \Delta$ αντιστοιχίζουμε τώρα μιαν ακολουθία κλειστών διαστημάτων
$$F_0^\delta, F_1^\delta, \ldots ,$$
με την εξής αναδρομή:
$$F_0^\delta = \mathcal{C}_0 = [0, 1],$$
$$F_{n+1}^\delta = \begin{cases} LF_n^\delta, & \text{αν } \delta(n) = 0, \\ RF_n^\delta, & \text{αν } \delta(n) = 1. \end{cases}$$
Επαγωγικά, για κάθε n, το F_n^δ είναι ένα από τα κλειστά διαστήματα του $\mathcal{C}_n$ μήκους 3^{-n}, και προφανώς
$$F_0^\delta \supseteq F_1^\delta \supseteq \cdots .$$
Η θεμελιακή ιδιότητα **πληρότητας των πραγματικών αριθμών** συνεπάγεται τώρα ότι η τομή αυτής της ακολουθίας δεν είναι κενή, μάλιστα περιέχει ακριβώς έναν πραγματικό αριθμό, ας τον ονομάσουμε
$$f(\delta) = \text{το μόνο στοιχείο της τομής } \bigcap_{n=0}^\infty F_n^\delta.$$
Η συνάρτηση f απεικονίζει το αναπαρίθμητο σύνολο Δ μέσα στο σύνολο
$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^\infty \mathcal{C}_n,$$
το λεγόμενο **σύνολο του Cantor**, και για να τελειώσουμε την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι ένα-προς-ένα. Αλλά αν το n είναι ο ελάχιστος αριθμός

όπου $\delta(n) \neq \varepsilon(n)$ και (π.χ.) $\delta(n) = 0$, έχουμε $F^\delta_n = F^\varepsilon_n$ από την επιλογή του n,

$$f(\delta) \in F^\delta_{n+1} = LF^\delta_n,\ f(\varepsilon) \in F^\varepsilon_{n+1} = RF^\delta_n,\ \text{και } LF^\delta_n \cap RF^\delta_n = \emptyset,$$

που σημαίνει ότι πράγματι η f είναι μονομορφισμός. $\dashv$

Η επίκληση της πληρότητας των πραγματικών αριθμών είναι το μη τετριμμένο στοιχείο αυτής της απόδειξης, και είναι απαραίτητη, αφού όλη η κατασκευή εκτός από την τελευταία γραμμή μπορεί να επαναληφθεί για το $\mathbb{Q}$ που είναι απαριθμητό — χωρίς βέβαια να είναι πλήρες. Την πληρότητα των πραγματικών αριθμών θα μελετήσουμε αργότερα προσεκτικά, στο Παράρτημα **A**.

Η θεμελιακή σημασία αυτού του θεωρήματος ήταν προφανής απαρχής, ιδιαίτερα επειδή ο Cantor το εφάρμοσε αμέσως σε μια σημαντική πρόταση της θεωρίας των αλγεβρικών αριθμών. Πριν εκθέσουμε αυτή την εφαρμογή χρειαζόμαστε μερικούς ορισμούς και λήμματα.

2.15. Ορισμός. Για κάθε σύνολο A και κάθε σύνολο B, το σύνολο των (**διατεταγμένων**) **ζευγών** των A, B συμβολίζεται με το

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \,\&\, y \in B\}.$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, για κάθε $n \geq 2$,

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\},$$
$$A^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in A\}.$$

Το $A_1 \times \cdots \times A_n$ λέγεται το **Καρτεσιανό γινόμενο** των $A_1, \ldots, A_n$.

2.16. Λήμμα. (1) *Αν τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι απαριθμητά, τότε και το Καρτεσιανό τους γινόμενο $A_1 \times \cdots \times A_n$ είναι επίσης απαριθμητό.*

(2) *Για κάθε απαριθμητό σύνολο A, τα A^n ($n \geq 2$) και η ένωσή τους*

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} A^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid n \geq 2, x_1, \ldots, x_n \in A\}$$

είναι επίσης απαριθμητά σύνολα.

Απόδειξη. (1) Αν κάποιο A_i είναι κενό, τότε και το γινόμενο είναι κενό, εξ ορισμού. Διαφορετικά, για δύο σύνολα A, B, έχουμε μιαν απαρίθμηση

$$B = \{b_0, b_1, \ldots\}$$

του B, προφανώς

$$A \times B = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \times \{b_n\}),$$

και κάθε $A \times \{b_n\}$ είναι ισοπληθικό με το A (και επομένως απαριθμητό) με την αντιστοιχία $(x \mapsto (x, b_n))$. Έτσι έχουμε το ζητούμενο για $n = 2$. Για να αποδείξουμε την πρόταση για όλα τα $n \geq 2$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$A_1 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1} =_c (A_1 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}$$

με την αντιστοιχία

$$f(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1}).$$

Έτσι, αν κάθε γινόμενο από $n \geq 2$ απαριθμητούς παράγοντες είναι απαριθμητό, τότε απαριθμητό θα είναι και κάθε γινόμενο από $n+1$ παράγοντες, και έτσι, με επαγωγή έχουμε το (1).

(2) Κάθε A_n είναι απαριθμητό από το (1), και με μία ακόμα επίκληση στο Θεώρημα **2.10** συνάγουμε ότι το $\bigcup_{n=2}^{\infty} A^n$ είναι επίσης απαριθμητό. $\dashv$

2.17. Ορισμός. Ένας πραγματικός αριθμός α είναι **αλγεβρικός** αν είναι ρίζα κάποιου πολυώνυμου

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

με ακέραιους συντελεστές $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $(n \geq 1, a_n \neq 0)$, δηλαδή αν

$$P(\alpha) = 0.$$

Τυπικά παραδείγματα αλγεβρικών αριθμών είναι οι $\sqrt{2}$, $(1+\sqrt{2})^2$ (γιατί;) αλλά και η πραγματική ρίζα της εξίσωσης $x^5 + x + 1 = 0$ που υπάρχει (γιατί;) αλλά που δεν μπορεί να εκφραστεί με ριζικά σύμφωνα με ένα κλασικό θεώρημα του Abel. Το βασικό αποτέλεσμα (από την Άλγεβρα) για τους αλγεβρικούς αριθμούς που θα χρειαστούμε, είναι ότι *ένα πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$ έχει το πολύ n πραγματικές ρίζες.*

2.18. Πόρισμα. *Το σύνολο K των πραγματικών αλγεβρικών αριθμών είναι απαριθμητό* (Cantor)*, και επομένως υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι αλγεβρικοί* (Liouville).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το σύνολο Π όλων των πολυώνυμων με ακέραιους συντελεστές είναι απαριθμητό, αφού κάθε τέτοιο πολυώνυμο καθορίζεται από την ακολουθία των συντελεστών του, και επομένως υπάρχει αντιστοιχία του Π με το απαριθμητό $\bigcup_{n=2}^{\infty} \mathbb{Z}^n$. Για κάθε πολυώνυμο $P(x)$, το σύνολο των ριζών του

$$\Lambda(P(x)) = \{\alpha \mid P(\alpha) = 0\}$$

είναι πεπερασμένο και επομένως απαριθμητό. Έπεται ότι το σύνολο των αλγεβρικών K είναι ένωση μιας ακολουθίας πεπερασμένων συνόλων και επομένως επίσης απαριθμητό. $\dashv$

Αυτή η πρώτη εφαρμογή της καινούριας (τότε) θεωρίας συνόλων έπαιξε σημαντικό ρόλο στη γρήγορη και ευνοϊκή παραδοχή της από τους μαθηματικούς της εποχής εκείνης, επειδή η προηγούμενη απόδειξη του Liouville (ότι υπάρχουν μη αλγεβρικοί αριθμοί) ήταν δύσκολη. Ο Cantor απέδειξε κάτι πιο ισχυρό, ότι «σχεδόν όλοι» οι πραγματικοί αριθμοί δεν είναι αλγεβρικοί, με πολύ απλούστερη απόδειξη που χρησιμοποιεί μόνο το γεγονός ότι ένα πολυώνυμο βαθμού n δεν μπορεί αν έχει περισσότερες από n ρίζες, την πληρότητα του $\mathbb{R}$, και, φυσικά, τη νέα μέθοδο της *απαρίθμησης των μελών άπειρων συνόλων.*

Μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει την ύπαρξη μόνο δύο τάξεων απείρου, αυτήν του $\mathbb{N}$ —τα απαριθμητά, άπειρα σύνολα— και αυτήν του $\mathbb{R}$. Υπάρχουν πολλές άλλες.

2.19. Ορισμός. Το **δυναμοσύνολο** (powerset) $\mathcal{P}(A)$ ενός συνόλου A είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A,

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \text{ είναι σύνολο και } X \subseteq A\}.$$

2.20. Άσκηση. *Για όλα τα σύνολα* A, B,
$$A =_c B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B).$$

2.21. Θεώρημα (Cantor). *Για κάθε σύνολο* A,
$$A <_c \mathcal{P}(A),$$
δηλαδή $A \leq_c \mathcal{P}(A)$ *αλλά* $A \neq_c \mathcal{P}(A)$. *Ειδικότερα, δεν υπάρχει επιμορφισμός* $\pi : A \twoheadrightarrow \mathcal{P}(A)$.

Απόδειξη. Το ότι $A \leq_c \mathcal{P}(A)$ φανερώνεται από το μονομορφισμό
$$(x \mapsto \{x\}),$$
που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο x του A το **μονοσύνολο** $\{x\}$ με μόνο ένα στοιχείο, το x. (Προσέξτε: το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι διαφορετικό αντικείμενο από το στοιχείο x, που πιθανόν δεν είναι καν σύνολο!)

Προς απαγωγή σε άτοπο, δεχόμαστε ότι υπάρχει κάποια αντιστοιχία
$$\pi : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(A)$$
που δείχνει ότι $A =_c \mathcal{P}(A)$, και ορίζουμε το σύνολο
$$B = \{x \in A \mid x \notin \pi(x)\}.$$
έτσι που για κάθε $x \in A$,
$$x \in B \iff x \notin \pi(x). \tag{2-1}$$
Αφού το B είναι υποσύνολο του A και η π είναι επιμορφισμός, πρέπει να υπάρχει κάποιο $b \in A$ ώστε $B = \pi(b)$· θέτωντας $x = b$ και $\pi(b) = B$ στη (2-1), καταλήγουμε στην αντιφατική ισοδυναμία
$$b \in B \iff b \notin B. \qquad \dashv$$

Υπάρχουν λοιπόν πολλές τάξεις απείρου, και ειδικότερα (τουλάχιστον) αυτές των συνόλων
$$\mathbb{N} <_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) <_c \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) <_c \cdots.$$
Αν ορίσουμε τα σύνολα T_n με την αναδρομή
$$\begin{aligned} T_0 &= \mathbb{N}, \\ T_{n+1} &= \mathcal{P}(T_n), \end{aligned} \tag{2-2}$$
τότε η ένωσή τους $T_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$ έχει μεγαλύτερη πληθικότητα από κάθε T_n, Πρόβλημα **x2.8**. Η ταξινόμηση και μελέτη των τάξεων απείρου είναι ένα από τα κεντρικά προβλήματα της συνολοθεωρίας.

Μια γενικότερη έννοια από αυτήν του δυναμοσυνόλου, είναι οι *χώροι συναρτήσεων*.

2.22. Ορισμός. Για όλα τα σύνολα A, B,
$$\begin{aligned} (A \to B) &=_{\text{ορ}} \{f \mid f : A \to B\} \\ &= \text{ το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το } A \text{ στο } B. \end{aligned}$$

2.23. Άσκηση. *Αν* $A_1 =_c A_2$ *και* $B_1 =_c B_2$, *τότε* $(A_1 \to B_1) =_c (A_2 \to B_2)$.

Οι χώροι συναρτήσεων αποτελούν "γενικεύσεις" των δυναμοσυνόλων επειδή κάθε υποσύνολο $X \subseteq A$ αντιπροσωπεύεται από τη *χαρακτηριστική* του συνάρτηση $c_X : A \to \{0, 1\}$,

$$c_X(t) = \begin{cases} 1, \text{ if } t \in A \cap X, \\ 0, \text{ if } t \in A \setminus X, \end{cases} \quad (t \in A). \tag{2-3}$$

Μπορούμε να ανακτήσουμε το X από τη c_X,

$$X = \{t \in A \mid c_X(t) = 1\},$$

που συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $(X \mapsto c_X)$ είναι αντιστοιχία του $\mathcal{P}(A)$ με το $(A \to \{0, 1\})$. Έτσι,

$$(A \to \{0, 1\}) =_c \mathcal{P}(A) >_c A, \tag{2-4}$$

και οι χώροι συναρτήσεων μας οδηγούν σε μεγάλα, μη απαριθμητά σύνολα. Το επόμενο προφανές πρόβλημα είναι να συγκρίνουμε ως προς το πλήθος αυτά τα αναπαρίθμητα σύνολα, ξεκινώντας από τα δύο απλούστερα: το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ των φυσικών αριθμών και το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

2.24. Λήμμα. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού έχουμε ήδη δείξει ότι $\Delta \leq_c \mathbb{R}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \Delta$. Αυτό όμως έπεται άμεσα από τη (2-4), αφού $\Delta = (\mathbb{N} \to \{0, 1\})$. ⊣

2.25. Λήμμα. $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, αφού το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$ και επομένως $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Αυτό φανερώνεται από τη συνάρτηση

$$x \mapsto \pi(x) = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\} \subseteq \mathbb{Q}$$

που είναι μονομορφισμός, επειδή αν $x < y$ είναι διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει κάποιος ρητός q ανάμεσά τους, δηλαδή $x < q < y$ και $q \in \pi(y) \setminus \pi(x)$. ⊣

Απ' αυτά τα απλά Λήμματα έπεται ότι η ισοπληθικότητα $\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$ θα είναι άμεσο πόρισμα του επόμενου βασικού θεωρήματος.

2.26. Θεώρημα (Schröder-Bernstein). *Για όλα τα σύνολα A, B,*

$$\text{αν } A \leq_c B \text{ και } B \leq_c A, \text{ τότε } A =_c B.$$

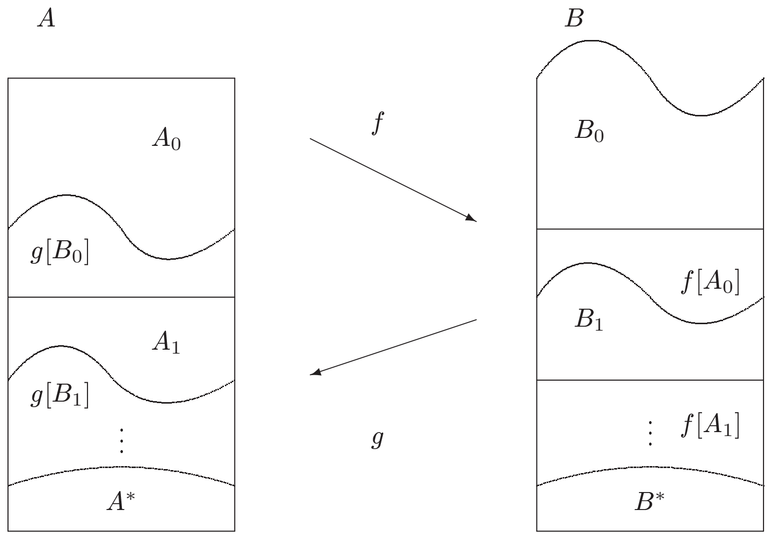
ΑΠΟΔΕΙΞΗ.[4] Υποθέτουμε ότι υπάρχουν μονομορφισμοί

$$f : A \rightarrowtail B, \ g : B \rightarrowtail A,$$

και ορίζουμε τα σύνολα A_n, B_n με την αναδρομή

$$\begin{aligned} A_0 &= A, & B_0 &= B, \\ A_{n+1} &= gf[A_n], & B_{n+1} &= fg[B_n], \end{aligned}$$

[4] Μία διαφορετική απόδειξη σκιαγραφείται στα Προβλήματα **x4.26**, **x4.27**.



Διαγραμμα **2.5**. Απόδειξη του Θεωρήματος Schröder-Bernstein.

όπου $fg[X] = \{f(g(x)) \mid x \in X\}$ και ανάλογα για τη συνάρτηση gf. Με επαγωγή στο n (εύκολα)

$$\begin{aligned} A_n \supseteq g[B_n] \supseteq A_{n+1}, \\ B_n \supseteq f[A_n] \supseteq B_{n+1}, \end{aligned}$$

ώστε έχουμε τις «αλυσίδες συνόλων»

$$\begin{aligned} A_0 \supseteq g[B_0] \supseteq A_1 \supseteq g[B_1] \supseteq A_2 \cdots, \\ B_0 \supseteq f[A_0] \supseteq B_1 \supseteq f[A_1] \supseteq B_2 \cdots. \end{aligned}$$

Ορίζουμε επίσης τις τομές

$$A^* = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n, \; B^* = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n,$$

έτσι ώστε

$$B^* = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \supseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} f[A_n] \supseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{n+1} = B^*$$

και αφού η f είναι μονομορφισμός, από το Πρόβλημα **x1.7**,

$$f[A^*] = f[\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n] = \bigcap_{n=0}^{\infty} f[A_n] = B^*.$$

Συνεπώς η f είναι αντιστοιχία του A^* με το B^*. Από την άλλη μεριά,

$$\begin{aligned} A = A^* \cup (A_0 \setminus g[B_0]) \cup (g[B_0] \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus g[B_1]) \cup (g[B_1] \setminus A_2) \ldots \\ B = B^* \cup (B_0 \setminus f[A_0]) \cup (f[A_0] \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus f[A_1]) \cup (f[A_1] \setminus B_2) \ldots \end{aligned}$$

και αυτές οι ακολουθίες είναι διαχωρισμένες, δηλαδή κανένα σύνολο δεν έχει κοινά στοιχεία με κάποιο άλλο. Για να τελειώσουμε την απόδειξη αρκεί να ελέγξουμε ότι για κάθε n,

$$f[A_n \setminus g[B_n]] = f[A_n] \setminus B_{n+1},$$
$$g[B_n \setminus f[A_n]] = g[B_n] \setminus A_{n+1},$$

από τις οποίες η πρώτη (π.χ.) αληθεύει επειδή η f είναι μονομορφισμός και

$$f[A_n \setminus g[B_n]] = f[A_n] \setminus fg[B_n] = f[A_n] \setminus B_{n+1}.$$

Τελικά έχουμε την αντιστοιχία $\pi : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B$,

$$\pi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in A^* \text{ ή } (\exists n)[x \in A_n \setminus g[B_n]], \\ g^{-1}(x), & \text{αν } x \notin A^* \text{ και } (\exists n)[x \in g[B_n] \setminus A_{n+1}], \end{cases}$$

που φανερώνει ότι $A =_c B$ και τελειώνει την απόδειξη. $\dashv$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Schröder-Bernstein μπορούμε να αποδείξουμε πολλές ισοπληθικότητες που αλλιώς είναι δύσκολες.

Προβλήματα για το Κεφάλαιο 2

x2.1. Για κάθε $\alpha < \beta$ με α, β πραγματικούς αριθμούς, ∞ ή $-\infty$, κατασκεύασε ισομορφισμούς που φανερώνουν τις ισοπληθικότητες

$$(\alpha, \beta) =_c (0, 1) =_c \mathbb{R}.$$

x2.2. Για κάθε $\alpha < \beta$, κατασκεύασε ισομορφισμούς που φανερώνουν τις ισοπληθικότητες

$$[\alpha, \beta) =_c [\alpha, \beta] =_c \mathbb{R}.$$

x2.3. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathbb{R} =_c \mathbb{R}^n$, για κάθε $n \geq 2$.

x2.4. Για όλα τα σύνολα A, B, $(A \to B) \leq_c \mathcal{P}(A \times B)$. Υποδειξη. Αντιπροσώπευσε κάθε συνάρτηση $f : A \to B$ με το *γράφημά* της

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}.$$

x2.5. $(\mathbb{N} \to \mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

* **x2.6.** $(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) =_c \mathbb{R}$.

* **x2.7.** Για όλα τα σύνολα A, B, C,

$$((A \times B) \to C) =_c (A \to (B \to C)).$$

Υποδειξη. Για κάθε $p : A \times B \to C$, όρισε την $\pi(p) = q : A \to (B \to C)$ με τον τύπο

$$q(x)(y) = p(x, y).$$

x2.8. Με τον ορισμό (2-2), για κάθε m,

$$T_m <_c T_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n.$$

Για τα τελευταία δύο προβλήματα χρειάζεται κάποια οικειότητα με τις συνεχείς συναρτήσεις.

***x2.9.** Το σύνολο $C[0,1]$ όλων των συνεχών, πραγματικών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

***x2.10.** Το σύνολο των μονοτονικών πραγματικών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.