ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Συνόλων

Ενότητα: Ο χώρος Baire

Γιάννης Μοσχοβάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Σημειώματα

Σημείωμα ιστορικού εκδόσεων έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1. Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη στο σύνδεσμο http://www.math.ucla.edu/ ynm/lectures/g.pdf

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα αδειοδότησης

Διατήρηση σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Ο ΧΩΡΟΣ BAIRE

Μετά τους φυσικούς αριθμούς, ίσως το πιο θεμελιακό αντικείμενο μελέτης της συνολοθεωρίας να είναι ο **χώρος Baire**,

$$\mathcal{N} =_{\text{ορ}} (\mathbb{N} \to \mathbb{N}), \tag{10-1}$$

το σύνολο των αριθμοσειρών. Με το συμβολισμό

$$\mathcal{C} =_{\text{ορ}} (\mathbb{N} \to \{0,1\}) \tag{10-2}$$

για το **σύνολο του Cantor**[22] των άπειρων, δυαδικών ακολουθιών, τότε

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}),$$

και με οικείους πια υπολογισμούς,

$$\mathfrak{c} =_c 2^{\aleph_0} =_c |\mathcal{P}(\mathbb{N})| =_c |\mathcal{C}| \leq_c |\mathcal{N}| \leq_c |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| =_c |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}.$$

Μετά την αξιωματική απόδειξη της ισοπληθικότητας $\mathcal{N} =_c \mathbb{R}$ στο Παράρτημα **A** (που είναι ακριβώς όπως και η διαισθητική απόδειξη, στο Κεφάλαιο **2**), η Υπόθεση του Συνεχούς **3.2** εκφράζεται από την πρόταση

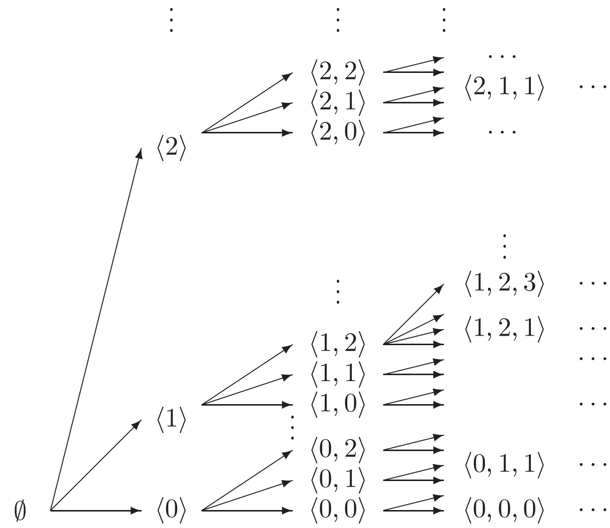
(CH) $$(\forall X \subseteq \mathcal{N})[X \leq_c \mathbb{N} \vee X =_c \mathcal{N}].$$

Η σχέση μάλιστα ανάμεσα στους χώρους $\mathcal{N}$, $\mathcal{C}$ και $\mathbb{R}$ είναι τόσο στενή, που σχεδόν κάθε ενδιαφέρουσα ιδιότητα ενός απ' αυτούς μας δίνει αμέσως μια σχετιζόμενη ιδιότητα των άλλων. Στα προβλήματα θα δώσουμε αυστηρή διατύπωση αυτού του φαινομένου για τους $\mathcal{N}$ και $\mathcal{C}$, και για τον $\mathbb{R}$ θα το αποδείξουμε στο Παράρτημα **A**, όπου και θα αντλήσουμε τα πορίσματα για τους πραγματικούς αριθμούς από τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου.[23]

Το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου δεν είναι απαραίτητο για την κατανόηση των επόμενων δύο, παρουσιάζεται εδώ συμπυκνωμένα και σίγουρα απαιτεί περισσότερη προσπάθεια από τον αναγνώστη σε σχέση με τα υπόλοιπα κεφάλαια. Σε μια πρώτη ανάγνωση, ίσως να είναι καλύτερο να το προσπεράσεις και να επανέλθεις σε αυτό αφού πρώτα εμπεδώσεις καλά την ύλη στα Κεφάλαια 11 και 12.

[22] Από παλιά παράδοση χρησιμοποιείται το ίδιο σύμβολο γι' αυτό το υποσύνολο του $\mathcal{N}$ και για το σύνολο των πραγματικών αριθμών που ορίσαμε στην απόδειξη του **2.14**. Το Διάγραμμα **2.4** επεξηγεί εύγλωττα το λόγο, και κανείς μέχρι σήμερα δεν έχει μπερδευτεί.

[23] Μπορεί κανείς να εκλάβει το $\mathcal{N}$ ως «διακριτή», «ψηφιακή» ή «συνδυαστική» απόδοση του «συνεχούς» ή «αναλογικού» $\mathbb{R}$. Κάθε πραγματικός αριθμός x καθορίζεται από τη δεκαδική του ανάπτυξη $x(0)\,.\,x(1)x(2)\ldots$, όπου $(n \mapsto x(n)) \in \mathcal{N}$, *αλλά* διαφορετικές δεκαδικές αναπτύξεις



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **10.1**. Μικρό μέρος του χώρου Baire.

Ο στόχος μας εδώ είναι να αποδείξουμε τα βασικά αποτελέσματα για το $\mathcal{N}$ που έχουν σχέση με το Πρόβλημα του Συνεχούς. Θα ορίσουμε την οικογένεια των ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΥΠΟΣΥΝΟΛΩΝ ΤΟΥ $\mathcal{N}$ και θα δείξουμε ότι κάθε αναλυτικό σύνολο ικανοποιεί την Υπόθεση του Συνεχούς, δηλαδή είναι ή απαριθμητό ή ισοπληθικό με το $\mathcal{N}$. Αυτό το ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΕΛΕΙΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ **10.20** είναι σημαντικό, επειδή σχεδόν κάθε σύνολο με το οποίο ασχολείται η κλασική ανάλυση είναι αναλυτικό. Ειδικότερα, όλα τα ΣΥΝΟΛΑ BOREL που παίζουν τόσο σημαντικό ρόλο στη θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης είναι αναλυτικά· από το ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ SUSLIN **10.31**, ένα σύνολο $A \subseteq \mathcal{N}$ είναι Borel ακριβώς όταν το A και το $\mathcal{N} \setminus A$ είναι και τα δύο αναλυτικα. Από την άλλη μεριά, θα δείξουμε στο Θεώρημα **10.32** ότι η φυσική μέθοδος απόδειξης της Υπόθεσης του Συνεχούς για τα αναλυτικά σύνολα δεν μπορεί να δώσει λύση στο γενικό Πρόβλημα του Συνεχούς που δεν έχει ακόμη λυθεί. Εκτός από τις εφαρμογές τους στην ανάλυση, τα Θεωρήματα **10.20** και **10.32** παρουσιάζουν ουσιαστικό, θεμελιακό ενδιαφέρον επειδή οι αποδείξεις τους επεξηγούν όμορφα το ρόλο που παίζουν οι αρχές επιλογής στα κλασικά μαθηματικά.

10.1. Η δομή του $\mathcal{N}$. Οι διαισθήσεις μας για το χώρο $\mathcal{N}$ πηγάζουν από την απεικόνισή του ως το σώμα του μεγαλύτερου δέντρου στο $\mathbb{N}$, με την ορολογία

μπορεί να παριστάνουν τον ίδιο πραγματικό αριθμό. Αυτό είναι ένα μεγάλο «αλλά», είναι το κλειδί της απόδειξης ότι ο $\mathbb{R}$ είναι *τοπολογικά συνεκτικός*, που είναι ενδιαφέρον αποτέλεσμα για την ανάλυση αλλά άνευ σημασίας για τη συνολοθεωρία. Θεωρούμε το χώρο Baire ως «ψηφιακή απόδοση» του $\mathbb{R}$ επειδή δεν επιτρέπει τέτοιες ταυτίσεις, κάθε $x \in \mathcal{N}$ καθορίζει χωρίς αμφιβολία τα «ψηφία» του $x(0), x(1), \dots$.

των **9.3** και (9-3),

$$\mathcal{N} = [\mathbb{N}^*].$$

Τα υποσύνολα του χώρου Baire καλούμε **σημειοσύνολα**, (pointsets), περιορίζοντας προσωρινά το νόημα της λέξης «σημείο» στα μέλη του $\mathcal{N}$, τα άπειρα κλαδιά του $\mathbb{N}^*$. Το **συμπλήρωμα** σημειοσυνόλου είναι το συμπλήρωμά του ως προς το $\mathcal{N}$,

$$cA =_{\text{ορ}} \mathcal{N} \setminus A. \tag{10-3}$$

Επίσης είναι χρήσιμο να επεκτείνουμε το συμβολισμό για αρχικά τμήματα λέξεων,

$$u \sqsubseteq x \iff_{\text{ορ}} u \subset x \quad (u \in \mathbb{N}^*, x \in \mathcal{N}), \tag{10-4}$$

έτσι που να υποδείχνει ότι μια πεπερασμένη ακολουθία u είναι αρχή κάποιου σημείου x, μια **προσέγγιση** του x που προσδιορίζει τις πρώτες $\mathrm{lh}(u)$ τιμές του. Για κάθε $u \in \mathbb{N}^*$, το σύνολο

$$\mathcal{N}_u =_{\text{ορ}} \{x \in \mathcal{N} \mid u \sqsubseteq x\} = [\mathbb{N}^*_u] \tag{10-5}$$

σημείων του $\mathcal{N}$ που επεκτείνουν το u είναι η **γειτονιά** (neighborhood) ή **περιοχή** που καθορίζεται από το u στο $\mathcal{N}$.

10.2. Άσκηση. *Για όλα τα $u, v \in \mathbb{N}^*$,*

$$u \sqsubseteq v \iff \mathcal{N}_v \subseteq \mathcal{N}_u.$$

10.3. Άσκηση. *Η οικογένεια των γειτονιών είναι απαριθμητή.*

10.4. Ορισμός. Το σημειοσύνολο A είναι **ανοικτό** (open) αν είναι ένωση γειτονιών, έτσι ώστε

$$x \in G \iff (\exists u)[x \in \mathcal{N}_u \ \&\ \mathcal{N}_u \subseteq G]^{\cdot} \tag{10-6}$$

κλειστό (closed) αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό· και **ανοικτό-κλειστό** (clopen) αν είναι και τα δύο, ανοικτό και κλειστό.

Συχνά ορίζουμε τα ανοικτά σύνολα με την ακόλουθη, εύκολα ισοδύναμη συνθήκη:

10.5. Άσκηση. *Ένα σύνολο $G \subseteq \mathcal{N}$ είναι ανοικτό, αν και μόνον αν για κάθε $x \in G$, υπάρχει κάποια γειτονιά $\mathcal{N}_u$ έτσι που $x \in \mathcal{N}_u \subseteq G$.*

10.6. Πρόταση. (1) *Το $\emptyset$, το $\mathcal{N}$ και κάθε γειτονιά είναι ανοικτά-κλειστά.*

(2) *Κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό, αλλά όχι ανοικτό.*

(3) *Κάθε μη κενό ανοικτό σημειοσύνολο είναι ένωση μιας ακολουθίας γειτονιών.*

(4) *Κάθε οικογένεια $\mathcal{G}$ ανοικτών σημειοσυνόλων έχει ανοικτή ένωση $\bigcup \mathcal{G}$, και δυϊκά, κάθε οικογένεια κλειστών σημειοσυνόλων $\mathcal{F}$ έχει κλειστή τομή $\bigcap \mathcal{F}$.* (Θέτουμε $\bigcap \emptyset = \mathcal{N}$, έτσι ώστε η πράξη της τομής να είναι ορισμένη για κάθε οικογένεια σημειοσυνόλων.)

(5) *Η τομή $G_1 \cap G_2$ δύο ανοικτών σημειοσυνόλων G_1, G_2 είναι ανοικτή, και δυϊκά, η ένωση $F_1 \cup F_2$ δύο κλειστών σημειοσυνόλων F_1, F_2 είναι κλειστή.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Κάθε γειτονιά είναι ανοικτή, αφού $\mathcal{N}_u = \bigcup\{\mathcal{N}_u\}$, και, συγκεκριμένα, το $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\langle\,\rangle}$ είναι ανοικτό. Οι γειτονιές είναι επίσης κλειστές, από την Άσκηση **10.5**: αν $x \notin \mathcal{N}_u$, τότε $u \not\sqsubseteq x$, και άρα υπάρχει $i < \mathrm{lh}(u)$ με $x(i) \neq u(i)$ και έτσι $x \in \mathcal{N}_{\langle x(0),\dots,x(i)\rangle}$ ενώ $\mathcal{N}_{\langle x(0),\dots,x(i)\rangle} \cap \mathcal{N}_u = \emptyset$. Το κενό σύνολο είναι η ένωση της κενής (!) οικογένειας γειτονιών, συμβολικά

$$\emptyset = \bigcup\{\mathcal{N}_u \mid \mathcal{N}_u \subseteq \emptyset\}.$$

(2) Ένα μονοσύνολο $\{x\}$ δεν είναι ανοικτό, διότι δεν περιέχει καμία γειτονιά, και άρα δεν μπορεί να είναι ένωση γειτονιών. Όμως το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό, αφού

$$\mathcal{N} \setminus \{x\} = \bigcup\{\mathcal{N}_u \mid u \not\sqsubseteq x\}.$$

(3) Αν το G είναι ανοικτό και μη κενό, τότε το σύνολο $\{u \mid \mathcal{N}_u \subseteq G\}$ είναι μη κενό και απαριθμητό, και άρα μπορεί να απαριθμηθεί.

(4) Άμεσο από τον χαρακτηρισμό των ανοικτών συνόλων στην Άσκηση **10.5**.

(5) Αν τα G_1, G_2 είναι ανοικτά και $x \in G_1 \cap G_2$, τότε υπάρχουν $u, v \sqsubseteq x$ τέτοια ώστε $\mathcal{N}_u \subseteq G_1$ και $\mathcal{N}_v \subseteq G_2$. Οι λέξεις u, v είναι συγκρίσιμες επειδή και οι δύο είναι αρχικά τμήματα του x. Αν π.χ. $u \sqsubseteq v$, τότε $\mathcal{N}_u \supseteq \mathcal{N}_v$, και επομένως $\mathcal{N}_v \subseteq G_1 \cap G_2$, ακριβώς αυτό που χρειαζόμαστε. Για να δείξουμε τη δυϊκή ιδιότητα των κλειστών θεωρούμε συμπληρώματα. ⊣

Ο χώρος Baire είναι *τοπολογικός χώρος* με τον κλασικό ορισμό που εκθέσαμε στο **4.30**, αλλά πολύ ειδικός, εξαιτίας της επόμενης βασικής ανταπόκρισης ανάμεσα στην τοπολογία του και τη συνδυαστική δομή του δέντρου $\mathbb{N}^*$. Στην απόδειξη—και στη συνέχεια, χωρίς σχόλιο—θα επικαλεστούμε την εξής τετριμμένη ισοδυναμία που συσχετίζει κάθε δέντρο T με το σώμα του:

$$x \in [T] \iff (\forall u \sqsubseteq x)[u \in T]. \tag{10-7}$$

Είναι άμεσο επακόλουθο του ορισμού του $[T]$, (9-3).

10.7. Πρόταση. *Το σημειοσύνολο F είναι κλειστό αν και μόνον αν είναι το σώμα δέντρου T στο $\mathbb{N}$, $F = [T]$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $x \notin [T]$, τότε για κάποιο $u \sqsubseteq x$, $u \notin T$, και επομένως $\mathcal{N}_u \cap [T] = \emptyset$, άρα $\mathcal{N}_u \subseteq c[T]$· επομένως το $c[T]$ είναι ανοικτό και το $[T]$ κλειστό. Αντιστρόφως, αν αντιστοιχίσουμε σε κάθε σημειοσύνολο F το δέντρο

$$T^F =_{\text{ορ}} \{u \in \mathbb{N}^* \mid (\exists x \in F)[u \sqsubseteq x]\}, \tag{10-8}$$

τότε προφανώς

$$F \subseteq [T^F].$$

Αν το F είναι κλειστό, έχουμε επίσης $[T^F] \subseteq F$: επειδή αν $x \notin F$, τότε για κάποιο $u \sqsubseteq x$, $\mathcal{N}_u \cap F = \emptyset$ αφού το συμπλήρωμα cF είναι ανοικτό, άρα $u \notin T^F$ και $x \notin [T^F]$ από τη (10-7). ⊣

Ο βασικός αυτός χαρακτηρισμός μας επιτρέπει να ταξινομήσουμε τα κλειστά σημειοσύνολα ανάλογα με τις συνδυαστικές ιδιότητες των δέντρων που τα ορίζουν. Δεν είναι λάθος να θεωρήσουμε το σύμπλεγμα συνδυαστικών ορισμών που ακολουθούν ως τη **συνδυαστική γεωμετρία** του $\mathcal{N}$, έστω κι αν δεν είναι «γεωμετρία» με καμία αυστηρή, κλασική αντίληψη του όρου.

10.8. Ορισμός. Θέτουμε

$$\begin{aligned} u \,|\, v &\iff_{\text{ορ}} \text{οι } u \text{ και } v \text{ είναι } \textbf{ασυμβίβαστες} \\ &\iff (\exists i < \text{lh}(u), \text{lh}(v))[u(i) \neq v(i)], \end{aligned} \tag{10-9}$$

και με τη φυσική επέκταση του συμβολισμού στα σημεία,

$$u \,|\, x \iff_{\text{ορ}} \neg[u \sqsubseteq x] \iff (\exists v \sqsubseteq x)[u \,|\, v].$$

Η λέξη u **διασπάται** (splits) στο δέντρο T αν έχει ασυμβίβαστες επεκτάσεις στο T, και το δέντρο T είναι **διασπώμενο** (splitting) αν κάθε $u \in T$ διασπάται στο T,

$$u \in T \Longrightarrow (\exists u_1, u_2 \in T)[u \sqsubseteq u_1 \,\&\, u \sqsubseteq u_2 \,\&\, u_1 \,|\, u_2].$$

Παρατηρούμε πως τα διασπώμενα δέντρα δεν έχουν τερματικούς κόμβους.

Το σημειοσύνολο P είναι **τέλειο** (perfect) *αν είναι σώμα διασπώμενου δέντρου.* Τα τέλεια σημειοσύνολα είναι εξ ορισμού κλειστά.

10.9. Άσκηση. *Κάθε γειτονιά $\mathcal{N}_u$ είναι τέλεια.*

10.10. Πρόταση. *Κάθε μη κενό, τέλειο σημειοσύνολο P έχει πληθικότητα $\mathfrak{c}$.*

Αποδειξη. Έστω $P = [T]$ όπου το T είναι μη κενό, διασπώμενο, και διάλεξε συναρτήσεις

$$l : T \to T, \quad r : T \to T$$

που φανερώνουν ότι το T είναι διασπώμενο, δηλαδή τέτοιες ώστε για κάθε $u \in T$,

$$u \sqsubseteq l(u), \quad u \sqsubseteq r(u), \quad l(u) \,|\, r(u).$$

Από το Θεώρημα Αναδρομής για Λέξεις **5.33**, υπάρχει συνάρτηση

$$\sigma : \{0,1\}^* \to T$$

από το δέντρο των δυαδικών λέξεων στο T που ικανοποιεί τις ταυτότητες

$$\sigma(\emptyset) = \emptyset, \quad \sigma(u \star \langle 0 \rangle) = l(\sigma(u)), \quad \sigma(u \star \langle 1 \rangle) = r(\sigma(u)).$$

Έτσι το $\sigma(u \star \langle i \rangle)$ είναι γνήσια επέκταση του $\sigma(u)$ για $i = 0, 1$, και άρα η σ είναι αυστηρά μονοτονική,

$$u \sqsubsetneq v \Longrightarrow \sigma(u) \sqsubsetneq \sigma(v),$$

και μπορούμε να ορίσουμε την $\pi : \mathcal{C} \to [T]$ με τον τύπο

$$\pi(x) =_{\text{ορ}} \sup \{\sigma(u) \mid u \sqsubseteq x\}. \tag{10-10}$$

Η κρίσιμη ιδιότητα της σ είναι ότι σέβεται επίσης την ασυμβιβαστότητα,

$$u \,|\, v \Longrightarrow \sigma(u) \,|\, \sigma(v). \tag{10-11}$$

Για να το επαληθεύσουμε αυτό, έστω ο i ελάχιστος με την ιδιότητα $u(i) \neq v(i)$, έτσι που για κάποιο w,

$$w \star \langle 0 \rangle \sqsubseteq u, \quad w \star \langle 1 \rangle \sqsubseteq v$$

(ή τανάπαλιν)· συνεπώς (από τους ορισμούς τους) τα $\sigma(w\star\langle 0\rangle)$ και $\sigma(w\star\langle 1\rangle)$ είναι ασυμβίβαστα και από τη μονοτονικότητα της σ, τα $\sigma(u)$, $\sigma(v)$ είναι επεκτάσεις τους και επομένως επίσης ασυμβίβαστα. Τελικά η (10-11) συνεπάγεται ότι η π είναι μονομορφισμός, και αυτό φανερώνει ότι $\mathcal{C} \leq_c [T]$, αυτό που χρειαζόμαστε. ⊣

Η απλή αυτή γενίκευση της απόδειξης του Cantor ότι το $\mathbb{R}$ είναι αναπαρίθμητο (**2.14**), υποδείχνει μια φυσική πρόσβαση στο Πρόβλημα του Συνεχούς: για να αποδείξουμε ότι ένα αναπαρίθμητο σημειοσύνολο έχει πληθικότητα $\mathfrak{c}$, αρκεί να δείξουμε ότι περιέχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο. Αυτό είναι προφανές για τα ανοικτά (επειδή κάθε $\mathcal{N}_u$ είναι τέλειο σύνολο) και επίσης αληθεύει για τα κλειστά, για τα οποία όμως χρειάζεται απόδειξη.

10.11. Θεώρημα Cantor-Bendixson. *Κάθε κλειστό υποσύνολο F του $\mathcal{N}$ διασπάται με μοναδικό τρόπο σε δύο ξένα υποσύνολα*

$$F = P \cup S, \quad P \cap S = \emptyset, \tag{10-12}$$

έτσι που ο **πυρήνας** (kernel) P *να είναι τέλειο σύνολο και το* **διασπαρμένο μέρος** (scattered part) S *να είναι απαριθμητό.*

Έπεται ότι κάθε αναπαρίθμητο, κλειστό σημειοσύνολο έχει μη κενό, τέλειο πυρήνα, και επομένως έχει πληθικότητα $\mathfrak{c}$.

Απόδειξη. Έστω $T = T^F$ όπως στην (10-8), έτσι που $F = [T]$ και το T δεν έχει τερματικούς κόμβους. Θέτουμε

$$\begin{aligned} S &=_{\text{ορ}} \bigcup\{[T_u] \mid u \in T \;\&\; |[T_u]| \leq_c \aleph_0\}, \\ P &=_{\text{ορ}} F \setminus S. \end{aligned}$$

Εξ ορισμού το S είναι ένωση απαριθμητής οικογένειας απαριθμητών συνόλων και επομένως απαριθμητό (πρόσεξε την επίκληση του $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ εδώ), και απομένει να δείξουμε ότι το P είναι τέλειο.

Το σύνολο λέξεων

$$kT = \{u \in T \mid |[T_u]| >_c \aleph_0\}$$

είναι (εύκολα) δέντρο, και κατευθείαν από τον ορισμό του S,

$$x \in S \iff x \in F \;\&\; (\exists u \sqsubseteq x)[u \notin kT].$$

Αλλά $P = F \setminus S$, άρα

$$\begin{aligned} x \in P &\iff x \in F \,\&\, [x \notin F \vee (\forall u \sqsubseteq x)[u \in kT]] \\ &\iff (\forall u \sqsubseteq x)[u \in T] \,\&\, (\forall u \sqsubseteq x)[u \in kT] \\ &\iff (\forall u \sqsubseteq x)[u \in kT] \\ &\iff x \in [kT], \end{aligned}$$

έτσι που αρκεί να δείξουμε ότι το kT είναι διασπώμενο. Προς απαγωγή σε άτοπο, δεχόμαστε ότι κάποιο $u \in kT$ δεν διασπάται. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι επεκτάσεις του u στο kT είναι συγκρίσιμες, επομένως προσδιορίζουν ένα μοναδικό σημείο

$$x = \sup\{v \in kT \mid u \sqsubseteq v\}.$$

Αφού κάθε επέκταση του u στο kT είναι προσέγγιση του x,

$$[T_u] = \{x\} \cup \bigcup \{[T_v] \mid u \sqsubseteq v \in T \,\&\, |[T_v]| \leq_c \aleph_0\},$$

και συνεπώς το $[T_u]$ είναι απαριθμητή ένωση απαριθμητών συνόλων, που είναι άτοπο.

Αφήνουμε τη μοναδικότητα της διάσπασης (10-12) για πρόβλημα, **x10.2**. $\dashv$

10.12. Ορισμός. Μια οικογένεια Γ σημειοσυνόλων έχει την **ιδιότητα P** αν κάθε αναπαρίθμητο σύνολο στην Γ περιέχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο. Μ' αυτή την κλασική ορολογία,[24] η οικογένεια $\mathcal{F}$ των κλειστών σημειοσυνόλων έχει την ιδιότητα **P**, ή (απλούστερα), *κάθε κλειστό σημειοσύνολο έχει την ιδιότητα* **P**.

10.13. Άσκηση. *Αν μια οικογένεια σημειοσυνόλων Γ έχει την ιδιότητα* **P**, *τότε και η οικογένεια Γ_σ των απαριθμητών ενώσεων από την Γ επίσης έχει την ιδιότητα* **P**.

Συνάγεται ότι κάθε $\mathcal{F}_\sigma$ σημειοσύνολο της μορφής

$$A = \bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} F_n \tag{10-13}$$

με κάθε F_n κλειστό έχει την ιδιότητα **P**. Η πρόταση αληθεύει και για τα $\mathcal{G}_\delta$-σύνολα της μορφής

$$A = \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} G_n \tag{10-14}$$

με κάθε G_n ανοικτό, αλλά η απόδειξη δεν είναι τόσο απλή· είναι μάλιστα ευκολότερο να αποδείξουμε κατ' ευθείαν την ιδιότητα **P** για την πολύ μεγαλύτερη οικογένεια των αναλυτικών σημειοσυνόλων.

10.14. Ορισμός. Σύμφωνα με τον ορισμό **6.25**, συνάρτηση $f : X \to Y$ από έναν τοπολογικό χώρο σε κάποιον άλλο είναι **συνεχής**, αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[G]$ κάθε ανοικτού συνόλου στο Y είναι ανοικτό σύνολο στο X. Το σημειοσύνολο[25] $A \subseteq \mathcal{N}$ είναι **αναλυτικό** (analytic) ή **Suslin**, αν είτε $A = \emptyset$ ή το A είναι εικόνα του χώρου Baire από μια συνεχή συνάρτηση, συμβολικά:

$$\mathcal{A} =_{\text{ορ}} \{A \subseteq \mathcal{N} \mid A = \emptyset \vee (\exists \text{ συνεχής } f : \mathcal{N} \to \mathcal{N})[A = f[\mathcal{N}]]\}.$$

Η συνέχεια στο $\mathcal{N}$ επιδέχεται έναν απλό, συνδυαστικό χαρακτηρισμό που είναι το κλειδί των εφαρμογών της.

---

[24]Η κλασική ορολογία για τα σημειοσύνολα είναι κάπως άσχετη, αλλά τόσο καλά εδραιωμένη που δεν μπορεί κανείς να την αποφύγει. Σε κάθε τοπολογικό χώρο, τα κλειστά σύνολα καλούνται $\mathcal{F}$-σύνολα, από το γαλλικό *fermèt*· τα ανοικτά καλούνται $\mathcal{G}$-σύνολα, από το γερμανικό *Gebiete* (σημαίνει *περιοχή*)· και απαριθμητές ενώσεις Γ-συνόλων είναι Γ_σ-σύνολα ενώ απαριθμητές τομές Γ-συνόλων είναι Γ_δ-σύνολα, από τα γερμανικά *Summe* και *Durchschnit* για *ένωση* και *τομή*. Δεν θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την ορολογία, εκτός από μερικές αναφορές σε $\mathcal{F}_\sigma$ και $\mathcal{G}_\delta$ σημειοσύνολα.

[25]Περιοριζόμαστε στο χώρο Baire, επειδή υπάρχουν πολλοί ορισμοί «αναλυτικών συνόλων» που δεν είναι ισοδύναμοι σε γενικούς τοπολογικούς χώρους, αν και συμπίπτουν στο $\mathcal{N}$.

10.15. Θεώρημα. *Η συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι συνεχής αν και μόνον αν υπάρχει μονοτονική συνάρτηση $\tau : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ στις λέξεις, τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sup \{\tau(u) \mid u \sqsubseteq x\} \quad (x \in \mathcal{N}) \\ &= \lim_n \tau(\overline{x}(n)). \end{aligned} \tag{10-15}$$

Θα λέμε ότι η $\tau : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ **υπολογίζει** τη συνάρτηση f αν είναι μονοτονική και ικανοποιεί την (10-15).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν η f ικανοποιεί την (10-15), τότε

$$f(x) \in \mathcal{N}_v \iff (\exists u \sqsubseteq x)[v \sqsubseteq \tau(u)],$$

και συνεπώς κάθε αντίστροφη εικόνα γειτονιάς

$$f^{-1}[\mathcal{N}_v] = \bigcup \{\mathcal{N}_u \mid v \sqsubseteq \tau(u)\}$$

είναι ένωση γειτονιών, που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής.

Για το δυσκολότερο αντίστροφο, υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής και θέτουμε

$$S(u) =_{\text{ορ}} \{v \in \mathbb{N}^* \mid f[\mathcal{N}_u] \subseteq \mathcal{N}_v\} \quad (u \in \mathbb{N}^*).$$

Κάθε $S(u) \neq \emptyset$, αφού η ρίζα $\emptyset \in S(u)$, $v \sqsubseteq v' \in S(u) \Longrightarrow v \in S(u)$, και

$$v, v' \in S(u) \Longrightarrow f[\mathcal{N}_u] \subseteq \mathcal{N}_v \cap \mathcal{N}_{v'} \Longrightarrow [v \sqsubseteq v' \vee v' \sqsubseteq v],$$

επειδή $v \mid v' \Longrightarrow \mathcal{N}_v \cap \mathcal{N}_{v'} = \emptyset$. Επομένως, υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1. Υπάρχει κάποιο $v \in S(u)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{lh}(v) = \mathrm{lh}(u)$. Θέτουμε

$$\tau(u) =_{\text{ορ}} v = \text{ η μοναδική λέξη στο } S(u) \text{ τέτοια ώστε } \mathrm{lh}(v) = \mathrm{lh}(u).$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2. Δεν υπάρχει $v \in S(u)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{lh}(v) = \mathrm{lh}(u)$. Σ' αυτήν την περίπτωση θέτουμε

$$\tau(u) =_{\text{ορ}} \sup \{v \mid v \in S(u)\}.$$

Η μονοτονικότητα της τ έπεται εύκολα από τις συνεπαγωγές

$$u_1 \sqsubseteq u_2 \Longrightarrow f[\mathcal{N}_{u_1}] \supseteq f[\mathcal{N}_{u_2}] \Longrightarrow S(u_1) \subseteq S(u_2),$$

θεωρώντας τις διάφορες περιπτώσεις στον ορισμό των $\tau(u_1)$ και $\tau(u_2)$. Για να δείξουμε την (10-15), παρατηρούμε πρώτα ότι επειδή $\tau(u) \in S(u)$,

$$u \sqsubseteq x \in \mathcal{N} \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{N}_{\tau(u)} \Longrightarrow \tau(u) \sqsubseteq f(x).$$

Από τη συνέχεια της f, αν $v \sqsubseteq f(x)$, τότε για κάποιο $u \sqsubseteq x$, $f[\mathcal{N}_u] \subseteq \mathcal{N}_v$, άρα $v \in S(u)$ και είτε αμέσως $v \sqsubseteq \tau(u)$, αν η τιμή $\tau(u)$ ορίζεται με την ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2, ή υπάρχει κάποια επέκταση u' του u, με $\mathrm{lh}(u') = \mathrm{lh}(v)$ και τέτοια ώστε $v = \tau(u')$, στην άλλη περίπτωση. ⊣

Η (10-15) δίνει έναν υπολογιστικό χαρακτηρισμό της συνέχειας: η συνάρτηση $\tau(u)$ στις λέξεις μας δίνει ολοένα καλύτερες προσεγγίσεις $\tau(u) \sqsubseteq f(x)$ της τιμής της f, καθώς την τροφοδοτούμε με διαδοχικά ακριβέστερες προσεγγίσεις $u \sqsubseteq x$ της μεταβλητής της. Με τις έννοιες του Κεφαλαίου **6**, μπορούμε να δώσουμε αυστηρή και κομψή διατύπωση αυτής της ιδέας.

10.16. Πόρισμα. *Η συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι ο περιορισμός στο $\mathcal{N}$ κάποιας μονοτονικής, συνεχούς απεικόνισης*

$$\pi : (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$$

στον επαγωγικό χώρο $(\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$. Σύμφωνα με τον Ορισμό **6.22**, η μονοτονική απεικόνιση $\pi : (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ είναι συνεχής αν ικανοποιεί την ισοδυναμία

$$\pi(x)(i) = w \iff (\exists u \in \mathbb{N}^*)[u \sqsubseteq x \,\&\, \pi(u)(i) = w].$$

Χρησιμοποιούμε εδώ το γεγονός ότι ο $\mathcal{N}$ είναι υποσύνολο του $(\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$, που αποτελείται ακριβώς από όλα τα μεγιστικά του σημεία· η βασική παρατήρηση είναι η διάσπαση

$$(\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}) = \mathbb{N}^* \cup \mathcal{N}, \quad \mathbb{N}^* \cap \mathcal{N} = \emptyset. \tag{10-16}$$

Αποδειξη. Αν η $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι συνεχής, υποθέτουμε ότι η τ την υπολογίζει όπως στο Θεώρημα, και θέτουμε (επί λέξει)

$$\pi = \tau \cup f,$$

δηλαδή $\pi(u) = \tau(u)$ για $u \in \mathbb{N}^*$ και $\pi(x) = f(x)$ για $x \in \mathcal{N}$. Η συνέχεια της π είναι προφανής και το αντίστροφο πολύ εύκολο. $\dashv$

10.17. Άσκηση. *Δείξε το «εύκολο αντίστροφο», δηλαδή ότι αν η $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι ο περιορισμός στον $\mathcal{N}$ κάποιας συνεχούς απεικόνισης*

$$\pi : (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}),$$

τότε η f είναι συνεχής.

Το Πόρισμα μας επιτρέπει να αναγνωρίζουμε αμέσως τη συνέχεια συγκεκριμένων συναρτήσεων στο χώρο Baire, με το μάτι, παρατηρώντας ότι κάθε ψηφίο $f(x)(i)$ της τιμής $f(x)$ μπορεί να υπολογιστεί με χρήση πεπερασμένου πλήθους τιμών του x. Όπως και στο Κεφάλαιο **6**, η αναφορά σε κάποια «προφανώς συνεχή» συνάρτηση χωρίς απόδειξη της συνέχειας υπαινίσσεται επίκληση αυτού του αποτελέσματος.

10.18. Ορισμός. Ένα σημειοσύνολο $K \subseteq \mathcal{N}$ είναι **συμπαγές** (compact) αν $K = [T]$ όπου T δέντρο πεπερασμένης διακλάδωσης στο $\mathbb{N}$. Έπεται ότι κάθε συμπαγές σημειοσύνολο είναι κλειστό, και το $\mathcal{C}$ είναι συμπαγές.

Μερικοί θα παραξενευτούν μ' αυτόν τον ορισμό της συμπαγίας για σημειοσύνολα, αφού υπάρχει γνωστός, κλασικός ορισμός συμπαγίας σε γενικούς τοπολογικούς χώρος, σύμφωνα με τον οποίο το **10.18** είναι θεώρημα. Χωρίς σχόλιο κάναμε το ίδιο και με την «τελειότητα», που κι αυτή είναι γενική, τοπολογική έννοια. Εδώ ενδιαφερόμαστε στις συνδυαστικές ιδιότητες αυτών των σημειοσυνόλων που είναι ειδικές για το χώρο Baire, και θα αφήσουμε τους τοπολογικούς χαρακτηρισμούς τους για προβλήματα, **x10.17** και **x10.21**.

10.19. Πρόταση. (1) *Η εικόνα $f[K]$ συμπαγούς σημειοσυνόλου K από συνεχή συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι συμπαγής.*

(2) *Η εικόνα $f[K]$ συμπαγούς και τέλειου σημειοσυνόλου K από συνεχή μονομορφισμό $f : \mathcal{N} \rightarrowtail \mathcal{N}$ είναι συμπαγής και τέλεια.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Έστω $K = [T]$ όπου το T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης και η τ υπολογίζει την f σύμφωνα με την (10-15), και έστω

$$S = T^{f[K]} = \{v \mid (\exists x \in K)[v \sqsubseteq f(x)]\}$$

το δέντρο όλων των αρχικών τμημάτων της εικόνας $f[K]$. Αρκεί να δείξουμε ότι το S είναι δέντρο πεπερασμένης διακλάδωσης και $f[K] = [S]$.

Έστω $v \in S$. Θέτουμε

$$B =_{\text{ορ}} \{u \in T \mid v \sqsubseteq \tau(u) \vee v \mid \tau(u)\},$$

και υποθέτουμε ότι $x \in [T]$. Αν $v \mid f(x)$, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός n, τέτοιος ώστε $v \mid \tau(\overline{x}(n))$, άρα $\overline{x}(n) \in B$· και αν $v \sqsubseteq f(x)$, τότε για κάποιο n, $v \sqsubseteq \tau(\overline{x}(n))$, οπότε πάλι $\overline{x}(n) \in B$. Άρα το B είναι φράχτης του T, και από το Θεώρημα Βεντάλιας **9.9** πρέπει να έχει πεπερασμένο υποσύνολο

$$B_0 = \{u_0, \dots, u_n\} \subseteq B$$

που επίσης είναι φράχτης. Προκύπτει ότι για κάθε $x \in K$ τέτοιο ώστε $v \sqsubseteq f(x)$, υπάρχει κάποιο u_i που ικανοποιεί την $v \sqsubseteq \tau(u_i) \sqsubseteq f(x)$, και επομένως κάθε παιδί του v στο S είναι αρχικό τμήμα ενός από τα $\tau(u_i)$, και ο αριθμός τους είναι πεπερασμένος.

Προφανώς, $f[K] \subseteq [S]$. Για να δείξουμε ότι $[S] \subseteq f[K]$, δεχόμαστε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι υπάρχει κάποιο $y \in [S] \setminus f[K]$ και θέτουμε

$$B =_{\text{ορ}} \{u \in T \mid \tau(u) \mid y\}.$$

Τώρα το B είναι φράχτης του T, επειδή ο μόνος τρόπος για να είναι το $\tau(\overline{x}(n))$ συμβατό με το y για κάθε n είναι να ισχύει η $f(x) = y$. Από το Θεώρημα Βεντάλιας, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο

$$B_0 = \{u_0, \dots, u_n\} \subseteq B$$

που επίσης είναι φράχτης του T. Θέτουμε

$$k = \max\{\mathrm{lh}(\tau(u_i)) \mid i \leq n\} + 1,$$

και επιλέγουμε κάποιο $x \in [T]$ τέτοιο ώστε $\overline{y}(k) \subseteq f(x)$, που πρέπει να υπάρχει επειδή $y \in [S]$, έτσι που το y επιδέχεται οσοδήποτε ακριβείς προσεγγίσεις από μέλη της εικόνας της f. Από την άλλη μεριά, $u_i \sqsubseteq x$ για κάποιο i, επειδή το B_0 είναι φράχτης· άρα $\tau(u_i) \sqsubseteq f(x)$ επειδή η τ υπολογίζει την f· άρα τα $\tau(u_i)$ και $\overline{y}(k)$ είναι αρχικά τμήματα του $f(x)$, και επομένως συμβατά· και επειδή ο κόμβος $\tau(u_i)$ έχει μικρότερο μήκος του $\overline{y}(k)$, πρέπει να ισχύει η $\tau(u_i) \sqsubseteq y$, που τελικά αντιτίθεται στον ορισμό του B.

(2) Με τον ίδιο συμβολισμό του (1) και την επιπρόσθετη υπόθεση, έστω $v \in S$, έτσι που για κάποιο $u \in T$, $v \sqsubseteq \tau(u)$. Αφού το T είναι διασπώμενο, υπάρχουν διαφορετικά σημεία

$$x_1, x_2 \in K \cap \mathcal{N}_u,$$

και αφού η τ υπολογίζει την f,

$$\tau(u) \sqsubseteq f(x_1), \quad \tau(u) \sqsubseteq f(x_2). \tag{10-17}$$

Αλλά $f(x_1) \neq f(x_2)$, επειδή η f είναι μονομορφισμός, άρα υπάρχουν ασυμβίβαστα $v_1 \sqsubseteq f(x_1)$ και $v_2 \sqsubseteq f(x_2)$ που επεκτείνουν το $\tau(u)$ από την (10-17), και αυτά διασπούν την $\tau(u)$, άρα και το μικρότερο $v \sqsubseteq \tau(u)$ στο S. $\dashv$

10.20. Θεώρημα Τέλειου Συνόλου (Perfect Set Theorem, Suslin, 1916). *Κάθε αναπαρίθμητο αναλυτικό σημειοσύνολο έχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο.*

Απόδειξη. Έστω $A = f[\mathbb{N}^*]$ αναπαρίθμητο σύνολο, δέξου ότι η τ υπολογίζει την f, και θέσε

$$T =_{\text{ορ}} \{u \in \mathbb{N}^* \mid |f[\mathcal{N}_u]| >_c \aleph_0\}. \tag{10-18}$$

Προφανώς το T είναι μη κενό δέντρο.

Λήμμα. *Το δέντρο T είναι τ-διασπώμενο, δηλαδή για κάθε $u \in T$, υπάρχουν $u_1, u_2 \in T$ τέτοια ώστε*

$$u \sqsubseteq u_1, \quad u \sqsubseteq u_2, \quad \tau(u_1) \mid \tau(u_2).$$

Απόδειξη. Για κάθε $u \in T$ και κάθε σταθερό $x \in \mathcal{N}_u$,

$$f[\mathcal{N}_u] = \{f(x)\} \ \cup\ \bigcup\{f[\mathcal{N}_{u'}] \mid \tau(u') \mid f(x)\} \tag{10-19}$$

επειδή $f(y) \neq f(x) \Longrightarrow \tau(u') \sqsubseteq f(y)$ για κάποιο u' τέτοιο ώστε η $\tau(u')$ να είναι ασύμβατη με το $f(x)$. Αν το Λήμμα δεν αληθεύει για το u, τότε

$$u \sqsubseteq u' \in T \Longrightarrow \tau(u') \sqsubseteq f(x)\cdot$$

έτσι που κάθε εικόνα $f[\mathcal{N}_{u'}]$ με $\tau(u') \mid f(x)$ στην (10-19) αναφέρεται σε κάποιο $u' \notin T$ και είναι απαριθμητή, και υπάρχουν μονάχα απαριθμητές το πλήθος επιλογές για το u'. Άρα η εικόνα $f[\mathcal{N}_u]$ είναι ένωση ενός μονοσυνόλου και μιας απαριθμητής οικογένειας απαριθμητών συνόλων, και επομένως είναι απαριθμητή, ενάντια στην υπόθεση. $\dashv$ (Λήμμα)

Όπως στο **10.10**, επιλέγουμε τώρα συναρτήσεις

$$l : T \to T, \quad r : T \to T$$

που φανερώνουν ότι το T είναι τ-διασπώμενο, δηλαδή για κάθε $u \in T$,

$$u \sqsubseteq l(u), \quad u \sqsubseteq r(u), \quad \tau(l(u)) \mid \tau(r(u)),$$

και ορίζουμε με επίκληση του Θεωρήματος Αναδρομής για Λέξεις **5.33** μια συνάρτηση

$$\sigma : \{0,1\}^* \rightharpoonup T$$

από το δέντρο των δυαδικών λέξεων στο T που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\sigma(\emptyset) = \emptyset, \quad \sigma(u \star \langle 0\rangle) = l(\sigma(u)), \quad \sigma(u \star \langle 1\rangle) = r(\sigma(u)),$$

και αυτή η σ είναι (απαραίτητα) μονοτονική. Η κρίσιμη ιδιότητά της είναι ότι αντιστοιχίζει ασυμβίβαστες δυαδικές λέξεις σε τ-ασυμβίβαστες λέξεις,

$$u \mid v \Longrightarrow \tau(\sigma(u)) \mid \tau(\sigma(v)), \tag{10-20}$$

κάτι που επαληθεύεται ακριβώς όπως επαληθεύτηκε η (10-11) στην απόδειξη του **10.10**. Επίσης, η σ υπολογίζει μια συνεχή $g : \mathcal{C} \to \mathcal{N}$,

$$g(x) = \sup\{\sigma(u) \mid u \sqsubseteq x\},$$

και προφανώς

$$g[\mathcal{C}] \subseteq [T]. \tag{10-21}$$

Θεωρούμε τώρα τη σύνθεση $h = fg$ της δοσμένης f και αυτής της g, που υπολογίζεται από τη σύνθεση των τ και σ:

$$h(x) = \sup\{\tau(\sigma(u)) \mid u \sqsubseteq x\}.$$

Η h είναι συνεχής μονομορφισμός από το (10-20), άρα η εικόνα της $h[\mathcal{C}] = fg[\mathcal{C}]$ είναι συμπαγής και τέλεια από το **10.19**, και είναι υποσύνολο του $f[T] \subseteq A$ από τη (10-21). $\dashv$

Το αποτέλεσμα δεν σημαίνει τίποτα βέβαια, μέχρις ότου δείξουμε ότι υπάρχουν πάμπολλα αναλυτικά σύνολα.

10.21. Λήμμα. *Κάθε κλειστό σημειοσύνολο είναι αναλυτικό.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $T = T^F$ όπως στο (10-8) για το δοσμένο κλειστό σύνολο $F \neq \emptyset$, έτσι ώστε πέρα από το $F = [T]$ γνωρίζουμε επίσης ότι κάθε λέξη στο T έχει επέκταση, δεν υπάρχουν τερματικοί κόμβοι. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε μια συνάρτηση $l : T \to T$ τέτοια ώστε

$$u \in T \Longrightarrow u \sqsubseteq l(u) \ \&\ \mathrm{lh}(l(u)) = \mathrm{lh}(u) + 1.$$

Έστω

$$\mathrm{rtail}(u) =_{\mathrm{op}} u \restriction [0, \mathrm{lh}(u) - 1) \quad (\mathrm{lh}(u) > 0) \tag{10-22}$$

η μερική συνάρτηση που αφαιρεί από κάθε μη κενή λέξη το τελευταίο της ψηφίο. Από το Θεώρημα Αναδρομής για Λέξεις **5.33**, υπάρχει συνάρτηση $\tau : \mathbb{N}^* \rightharpoonup T$ τέτοια ώστε

$$\tau(u) = \begin{cases} u, & \text{αν } u \in T, \\ l(\tau(\mathrm{rtail}(u))), & \text{αν } u \notin T, \end{cases}$$

που είναι (εύκολα) *προβολή* του $\mathbb{N}^*$ επί του T, δηλαδή είναι ολική, σέβεται τα μήκη και συμφωνεί με την ταυτοτική στο T. Απ' αυτά προκύπτει ότι η τ υπολογίζει κάποια συνάρτηση $f : \mathcal{N} \twoheadrightarrow [T]$. $\dashv$

10.22. Λήμμα. *Κάθε συνεχής εικόνα αναλυτικού σημειοσυνόλου είναι αναλυτική.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $A = f[B]$ και $B = g[\mathcal{N}]$, τότε $A = fg[\mathcal{N}]$, και η σύνθεση fg είναι συνεχής. $\dashv$

10.23. Λήμμα. *Αν $f, g : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε το σύνολο*

$$E = \{x \mid f(x) = g(x)\}$$

των σημείων στα οποία συμφωνούν είναι κλειστό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή διαφορετικά σημεία έχουν ασυμβίβαστες προσεγγίσεις,

$$\begin{aligned} x \notin E &\iff f(x) \neq g(x) \\ &\iff (\exists u, v)[f(x) \in \mathcal{N}_u \ \&\ g(x) \in \mathcal{N}_v \ \&\ u \mid v], \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι
$$cE = \bigcup\{f^{-1}[\mathcal{N}_u] \cap g^{-1}[\mathcal{N}_v] \mid u \mid v\},$$
έτσι ώστε το cE είναι ένωση ανοικτών συνόλων και επομένως ανοικτό. $\dashv$

10.24. Θεώρημα. *Απαριθμητές ενώσεις και απαριθμητές τομές αναλυτικών σημειοσυνόλων είναι επίσης αναλυτικές.*

Αποδειξη. Έστω $A_n = f_n[\mathcal{N}]$ με κάθε f_n συνεχή, και όρισε πρώτα την $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ με τον τύπο
$$f(z) = f_{z(0)}(\mathrm{tail}(z)),$$
όπου
$$\mathrm{tail}(z) =_{\mathrm{op}} (i \mapsto z(i+1)) = (z(1), z(2), \dots)$$
είναι η συνάρτηση που αποκεφαλίζει σημεία. Προφανώς η f είναι συνεχής: επειδή κάθε $f(z)(i)$ μπορεί να υπολογιστεί από πεπερασμένο πλήθος τιμών του z, θέτοντας πρώτα $n = z(0)$ και μετά χρησιμοποιώντας το πεπερασμένο σύνολο τιμών του $\mathrm{tail}(z)$ που χρειάζονται για τον υπολογισμό της $f_n(\mathrm{tail}(z))$. Επίσης:
$$\begin{aligned} y \in \textstyle\bigcup_n f_n[\mathcal{N}] &\iff (\exists n \in \mathbb{N}, x \in \mathcal{N})[y = f_n(x)] \\ &\iff (\exists z \in \mathcal{N})[y = f_{z(0)}(\mathrm{tail}(z))] \\ &\qquad\qquad \text{με } z(0) = n, \mathrm{tail}(z) = x \\ &\iff (\exists z \in \mathcal{N})[y = f(z)], \end{aligned}$$
άρα $\bigcup_n A_n = f[\mathcal{N}]$ και η ένωση των A_n είναι αναλυτικό σύνολο.

Το ουσιαστικό στοιχείο αυτού του υπολογισμού ήταν ότι η απεικόνιση
$$z \mapsto (z(0), \mathrm{tail}(z))$$
είναι επιμορφισμός του $\mathcal{N}$ στο $\mathbb{N} \times \mathcal{N}$—πράγματι αντιστοιχία— με συνεχείς συντεταγμένες. Για να δείξουμε ότι η τομή $\bigcap_n A_n$ είναι αναλυτική, χρειαζόμαστε έναν ανάλογο επιμορφισμό
$$\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow (\mathbb{N} \to \mathcal{N})$$
του $\mathcal{N}$ επί του συνόλου των άπειρων ακολουθιών από σημεία. Για την κατασκευή μιας τέτοιας π, προσδιορίζουμε κάποια συγκεκριμένη αντιστοιχία $\rho : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{N}$ και θέτουμε
$$\rho_n(z) = (i \mapsto z(\rho(n,i))). \tag{10-23}$$
Κάθε $\rho_n : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι προφανώς συνεχής, και για κάθε άπειρη ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων μπορούμε να βρούμε κάποιο z τέτοιο ώστε
$$z(\rho(n,i)) = x_n(i) \quad (n, i \in \mathbb{N})\cdot$$
απ' αυτό συνάγεται ότι
$$\rho_n(z) = x_n \quad (n \in \mathbb{N})\cdot$$
με άλλα λόγια, η αντιστοιχία
$$\pi(z) = (n \mapsto \rho_n(z))$$

είναι επιμορφισμός. Από το $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ τώρα,

$$\begin{aligned} y \in \bigcap_n A_n &\iff (\forall n)(\exists x)[y = f_n(x)] \\ &\iff (\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})(\forall n)[y = f_n(x_n)] \\ &\iff (\exists z \in \mathcal{N})(\forall n)[y = f_n(\rho_n(z))] \\ &\iff (\exists z \in \mathcal{N})[(\forall n)[f_n(\rho_n(z)) = f_0(\rho_0(z))] \\ &\qquad\qquad \& \; y = f_0(\rho_0(z))]. \end{aligned} \tag{10-24}$$

Για κάθε n, το σύνολο

$$B_n = \{z \in \mathcal{N} \mid f_n(\rho_n(z)) = f_0(\rho_0(z))\}$$

είναι κλειστό από το **10.23**, άρα η τομή

$$B = \bigcap_n B_n$$

είναι επίσης κλειστή. Αλλά από την (10-24),

$$\bigcap_n A_n = f_0\rho_0[B],$$

που σημαίνει ότι η τομή των A_n είναι αναλυτική. ⊣

10.25. Ορισμός. Η οικογένεια $\mathcal{B}(X)$ των συνόλων **Borel** τοπολογικού χώρου X είναι η ελάχιστη οικογένεια υποσυνόλων του X που περιέχει τα ανοικτά σύνολα και είναι σ-**πεδίο**, δηλαδή είναι κλειστή για απαριθμητές ενώσεις και την πράξη του συμπληρώματος:

$$\begin{aligned} (\forall n)[A_n \in \mathcal{B}(X)] &\implies \bigcup_n A_n \in \mathcal{B}(X), \\ A \in \mathcal{B}(X) &\implies cA \in \mathcal{B}(X). \end{aligned}$$

Κυρίως ενδιαφερόμαστε για το χώρο Baire βέβαια,

$$\mathcal{B} =_{\text{ορ}} \mathcal{B}(\mathcal{N}) = \text{η οικογένεια των Borel σημειοσυνόλων.}$$

10.26. Άσκηση. *Δείξε ότι ο ορισμός έχει νόημα, δηλαδή η τομή*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(X) = \bigcap \{\mathcal{E} \mid \mathcal{G} \subseteq \mathcal{E} \\ & \,(\forall \{A_n\}_n \subseteq \mathcal{E})[\bigcup_n A_n \in \mathcal{E}] \\ & \,(\forall A \in \mathcal{E})[cA \in \mathcal{E}]\} \end{aligned}$$

είναι σ-πεδίο που περιέχει τα ανοικτά, και επομένως το ελάχιστο τέτοιο σ-πεδίο.

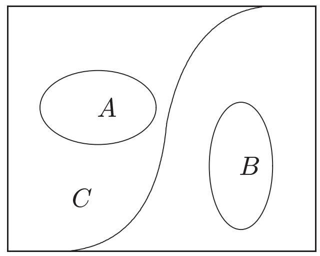
10.27. Άσκηση. *Αν $\{A_n\}$ ακολουθία από σύνολα Borel, τότε η τομή $\bigcap_n A_n$ είναι επίσης Borel.*

10.28. Πόρισμα. *Κάθε Borel σημειοσύνολο είναι αναλυτικό* (Suslin) *και επομένως έχει την ιδιότητα* **P** (Alexandroff, Hausdorff).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω

$$C\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathcal{N} \mid cA \in \mathcal{A}\} \tag{10-25}$$

η οικογένεια των **αναλυτικών συμπληρωμάτων**. Η οικογένεια $\mathcal{A} \cap C\mathcal{A}$ των σημειοσυνόλων που είναι αναλυτικά και που έχουν αναλυτικό συμπλήρωμα είναι



Διαγραμμα **10.2**. Το C διαχωρίζει το A από το B.

σ-πεδίο, αφού εξ ορισμού είναι κλειστή για τον τελεστή του συμπληρώματος, και αν κάθε $A_n \in \mathcal{A} \cap C\mathcal{A}$, τότε το $\bigcup_n A_n$ και επίσης το συμπλήρωμά του

$$c(\bigcup_n A_n) = \bigcap_n cA_n$$

είναι αναλυτικά από το θεώρημα. Επίσης, κάθε ανοικτό σύνολο

$$G = \bigcup_n \{\mathcal{N}_u \mid \mathcal{N}_u \subseteq G\}$$

είναι απαριθμητή ένωση γειτονιών, επομένως αναλυτικό, αλλά και με αναλυτικό συμπλήρωμα από το **10.21**. Συνεπάγεται ότι η $\mathcal{A} \cap C\mathcal{A}$ είναι σ-πεδίο που περιέχει όλα τα ανοικτά σημειοσύνολα, και επομένως περιέχει όλα τα σύνολα Borel. $\dashv$

Στα επόμενα δύο θεωρήματα διασαφηνίζουμε τη σχέση ανάμεσα στα αναλυτικά και στα Borel σημειοσύνολα.

Το σημειοσύνολο $C \subseteq \mathcal{N}$ *διαχωρίζει* το σημειοσύνολο A από το σημειοσύνολο B, αν

$$A \subseteq C, \quad C \cap B = \emptyset.$$

Πρόσεξε ότι αν το C διαχωρίζει το A από το B, τότε $A \cap B = \emptyset$.

10.29. Λήμμα. (1) *Έστω $\{A_i\}$ και $\{B_j\}$ δύο ακολουθίες σημειοσυνόλων και για όλα τα i και j, το C_{ij} διαχωρίζει το A_i από το B_j. Τότε το σύνολο $C = \bigcup_i \bigcap_j C_{ij}$ διαχωρίζει το $\bigcup_i A_i$ από το $\bigcup_j B_j$, δηλαδή*

$$\bigcup_i A_i \subseteq \bigcup_i \bigcap_j C_{ij}, \quad \Big(\bigcup_i \bigcap_j C_{ij}\Big) \cap \bigcup_j B_j = \emptyset. \tag{10-26}$$

(2) *Αν τα $\{A_i\}$ και $\{B_j\}$ είναι δύο ακολουθίες σημειοσυνόλων και δεν υπάρχει σύνολο Borel που να διαχωρίζει το $A = \bigcup_i A_i$ από το $B = \bigcup_j B_j$, τότε υπάρχουν δύο αριθμοί i_0 και j_0 ώστε κανένα σύνολο Borel να μη διαχωρίζει το A_{i_0} από το B_{j_0}.*

Αποδειξη. (1) Σταθεροποιούμε κάποιο i· τώρα για όλα τα j, από την υπόθεση, $A_i \subseteq C_{ij}$, και έτσι

$$A_i \subseteq \bigcap_j C_{ij}.$$

Παίρνοντας ενώσεις και στις δύο μεριές, έχουμε

$$A = \bigcup_i A_i \subseteq \bigcup_i \bigcap_j C_{ij},$$

που είναι και η πρώτη σχέση που χρειαζόμαστε. Για τη δεύτερη, παρατηρούμε ότι η υπόθεση $B_j \cap C_{ij} = \emptyset$, ουσιαστικά σημαίνει ότι

$$B_j \subseteq cC_{ij} \quad (cC_{ij} = \mathcal{N} \setminus C_{ij})\cdot$$

και έτσι, σταθεροποιώντας το i και παίρνοντας πάλι ενώσεις, έχουμε

$$B = \bigcup_j B_j \subseteq \bigcup_j C_{ij},$$

το οποίο με τη σειρά του, αφού το i ήταν τυχαίο, συνεπάγεται ότι

$$B \subseteq \bigcap_i \bigcup_j cC_{ij}.$$

Τώρα από το Πρόβλημα **x1.3** (De Morgan's laws) έχουμε

$$\bigcap_i \bigcup_j cC_{ij} = c\Big(\bigcup_i \bigcap_j C_{ij}\Big),$$

και τελικά $B \cap \Big(\bigcup_i \bigcap_j C_{ij}\Big) = \emptyset$, αυτό που θέλαμε.

(2) Με απαγωγή σε άτοπο, εύκολα: διότι αν υπήρχε κάποιο σύνολο Borel C_{ij} που να διαχώριζε το A_i από το B_j, τότε το $\bigcup_i \bigcap_j C_{ij}$ θα διαχώριζε το A από το B—όμως είναι σύνολο Borel. $\dashv$

10.30. Το Θεώρημα Διαχωρισμού *(*The Seperation Theorem, Lusin*) Αν τα $A, B \subseteq \mathcal{N}$ είναι αναλυτικά σημειοσύνολα και $A \cap B = \emptyset$, τότε υπάρχει ένα Borel σημειοσύνολο C που διαχωρίζει το A από το B.*

Αποδειξη. Θέτουμε $A = f[\mathcal{N}]$ και $B = g[\mathcal{N}]$, όπου οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες από το Θεώρημα **10.15** υπολογίζονται από δοσμένες, μονοτονικές συναρτήσεις λέξεων $\sigma, \tau : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$,

$$f(x) = \lim_n \sigma(\overline{x}(n)), \quad g(y) = \lim_n \tau(\overline{y}(n)).$$

Για όλες τις λέξεις u και v, θέτουμε

$$A_u = f[\mathcal{N}_u] = \{f(x) \mid u \sqsubseteq x\}, \quad B_v = g[\mathcal{N}_v] = \{g(y) \mid v \sqsubseteq y\},$$

και τώρα, το ότι η σ υπολογίζει την f και η τ την g, σημαίνει ότι

$$A_u \subseteq \mathcal{N}_{\sigma(u)}, \quad B_v \subseteq \mathcal{N}_{\tau(v)}. \tag{10-27}$$

Επίσης έχουμε $A_\emptyset = A$, $B_\emptyset = B$, και, εύκολα, για όλα τα u, v,

$$A_u = \bigcup_i A_{u \star \langle i \rangle}, \quad B_v = \bigcup_j B_{v \star \langle j \rangle}. \tag{10-28}$$

Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι δεν υπάρχει σύνολο Borel που να διαχωρίζει το A από το B, και εφαρμόζουμε επανειλημμένα το Λήμμα **10.29**, χρησιμοποιώντας τη (10-28): αφού δεν υπάρχει σύνολο Borel που να διαχωρίζει το $A = A_\emptyset$ από το $B = B_\emptyset$, υπάρχουν αριθμοί i_0, j_0 τέτοιοι που κανένα σύνολο Borel δεν διαχωρίζει το $A_{\langle i_0 \rangle}$ από το $B_{\langle j_0 \rangle}\cdot$ άρα λοιπόν, υπάρχουν i_1,

j_1 τέτοιοι που κανένα σύνολο Borel δεν διαχωρίζει το $A_{\langle i_0,i_1\rangle}$ από το $B_{\langle j_0,j_1\rangle}$· κ.ο.κ. Αυστηρά, χωρίς «κ.ο.κ.», ορίζουμε αναδρομικά δύο ακολουθίες αριθμών

$$x = (i_0, i_1, \dots),\ y = (j_0, j_1, \dots) \in \mathcal{N}$$

τέτοιους που για όλα τα n, *κανένα σύνολο Borel δε διαχωρίζει το* $A_{\overline{x}(n)}$ *από το* $B_{\overline{y}(n)}$. Αυτό σημαίνει ότι,

$$\text{για κάθε } n, \mathcal{N}_{\sigma(\overline{x}(n))} \cap \mathcal{N}_{\tau(\overline{y}(n))} \neq \emptyset, \tag{10-29}$$

αφού διαφορετικά το $\mathcal{N}_{\sigma(\overline{x}(n))}$ θα διαχώριζε το $A_{\overline{x}(n)}$ από το $B_{\overline{y}(n)}$, από τη (10-27)· και, τελικά, η (10-29) μας δίνει άμεσα ότι

$$f(x) = g(y) \in \bigcap\nolimits_n \Big(\mathcal{N}_{\sigma(\overline{x}(n))} \cap \mathcal{N}_{\tau(\overline{y}(n))}\Big),$$

ενάντια στην υπόθεση, ότι $A \cap B = \emptyset$. ⊣

10.31. Το Θεώρημα του Suslin. *Το σημειοσύνολο $A \subseteq \mathcal{N}$ είναι Borel αν και μόνον αν και το A και το συμπλήρωμά του cA είναι αναλυτικά.*

Απόδειξη για τη μη τετριμμένη κατεύθυνση έχουμε άμεσα, αρκεί να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Διαχωρισμού στα A και cA. ⊣

Ο Suslin εισήγαγε τα αναλυτικά σημειοσύνολα το 1917 και απέδειξε πληθώρα θεωρημάτων γι' αυτά, ανάμεσά τους το Θεώρημα Τέλειου Συνόλου **10.20**, το διάσημο χαρακτηρισμός του **10.31**, και το ότι *υπάρχουν αναλυτικά σημειοσύνολα που δεν είναι Borel*, κάτι που δε θα αποδείξουμε εδώ.[26] Τα σύνολα Borel είχαν εισαχθεί περισσότερο από δέκα χρόνια πριν από τον Borel και τον Lebesgue και ήταν η κρίσιμη έννοια στην ανάπτυξη της θεωρίας του *ολοκληρώματος Lebesgue*, μια από τις χαρακτηριστικές επιτυχίες της Ανάλυσης του 19ου αιώνα. Στη θεωρία ολοκλήρωσης κάθε «ενδιαφέρον» σημειοσύνολο είναι *σχεδόν ίσο* με κάποιο σύνολο Borel, μ' έναν αυστηρό ορισμό του «σχεδόν ίσου» που μας επιτρέπει να μελετήσουμε τη θεωρία (και τις πιο σημαντικές εφαρμογές της, όπως τη *Θεωρία Πιθανοτήτων*) σαν όλα τα σημειοσύνολα να ήταν Borel. Γι' αυτό το λόγο είναι σημαντική η ειδική περίπτωση του Προβλήματος του Συνεχούς για τα σύνολα Borel, που αποδείχτηκε ταυτόχρονα και ανεξάρτητα από τους Alexandroff και Haussdorff το 1916, λίγο πριν αποδείξει ο Suslin το γενικότερο Θεώρημα Τέλειου Συνόλου **10.20**.

Η οικογένεια των αναλυτικών σημειοσυνόλων αποτελεί πολύ μικρό μέρος του δυναμοσυνόλου του $\mathcal{N}$, Πρόβλημα **x10.9**. Θα μπορούσε όμως να ελπίσει κανείς ότι η μέθοδος που λύνει το Πρόβλημα του Συνεχούς γι' αυτά μπορεί να γενικευτεί και να οδηγήσει σε απόδειξη της Υπόθεσης του Συνεχούς, αλλά αυτό δεν είναι εφικτό.

[26] Η μελέτη των αναλυτικών και των Borel σημειοσυνόλων είναι η καρδιά της *Περιγραφικής Θεωρίας Συνόλων*, ενός από τους ωραιότερους κλάδους του θέματός μας που (δυστυχώς) δεν μπορούμε να καλύψουμε πιο εκτεταμένα σ' αυτές τις Σημειώσεις.

10.32. Θεώρημα. (**AC**) *Υπάρχει σημειοσύνολο $A \subset \mathcal{N}$ που είναι αναπαρίθμητο αλλά δεν περιέχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο.*

Απόδειξη. Το κλειδί είναι ότι υπάρχουν ακριβώς τόσα μη κενά, τέλεια σημειοσύνολα όσα και σημεία του $\mathcal{N}$:

Λήμμα 1. *Αν $\mathcal{P} = \{P \subseteq \mathcal{N} \mid P \neq \emptyset, P$ τέλειο$\}$, τότε $|\mathcal{P}| =_c \mathfrak{c}$.*

Απόδειξη. Για κάθε $y \in \mathcal{N}$, το σημειοσύνολο

$$A_y = \{x \mid (\forall n)[y(n) \leq x(n)\}$$

είναι εύκολα τέλειο, και εξίσου εύκολα, $y \neq z \Longrightarrow A_y \neq A_z$, άρα $\mathfrak{c} =_c |\mathcal{N}| \leq_c |\mathcal{P}|$. Από την άλλη μεριά, κάθε τέλειο σύνολο $P = [T^P]$ είναι σώμα δέντρου στο $\mathbb{N}$ που το προσδιορίζει, έτσι ώστε

$$|\mathcal{P}| \leq_c |\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)| =_c |\mathcal{P}(\mathbb{N})| =_c \mathfrak{c}. \qquad \dashv \text{(Λήμμα 1)}$$

Καθορίζουμε ένα σύνολο

$$I =_c \mathfrak{c} =_c \mathcal{P}, \tag{10-30}$$

π.χ. $I = \mathfrak{c}$, και αντιστοιχίες

$$\alpha \mapsto x_\alpha \in \mathcal{N}, \quad \alpha \mapsto P_\alpha \in \mathcal{P} \quad (\alpha \in I)$$

που φανερώνουν τις ισοπληθικότητες (10-30). Καθορίζουμε επίσης μια άριστη διάταξη $\leq$ του I. Θα ορίσουμε με υπερπεπερασμένη αναδρομή στο $(I, \leq)$ μονομορφισμούς

$$f_\alpha : \mathbf{seg}(\alpha) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow A_\alpha \subset \mathcal{N},\ g_\alpha : \mathbf{seg}(\alpha) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B_\alpha \subset \mathcal{N} \quad (\alpha \in I),$$

έτσι ώστε να ισχύουν τα εξής:

(1) Αν $\alpha \leq \beta$, τότε $f_\alpha \subseteq f_\beta, g_\alpha \subseteq g_\beta$, έτσι που $A_\alpha \subseteq A_\beta$ και $B_\alpha \subseteq B_\beta$.
(2) Για κάθε $\alpha \in I$, $A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$.
(3) Για κάθε $\alpha \in I$, $B_{S\alpha} \cap P_\alpha \neq \emptyset$, όπου S είναι η συνάρτηση του επόμενου στον καλά διατεταγμένο χώρο $(I, \leq)$.

Λήμμα 2. *Αν οι f_α, g_α $(\alpha \in I)$ ικανοποιούν τις (1) – (3), τότε η ένωση*

$$A = \bigcup\nolimits_{\alpha \in I} A_\alpha =_c \mathfrak{c},$$

όμως το A δεν περιέχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο.

Απόδειξη. Οι ισοπληθικότητες $A =_c I =_c \mathfrak{c}$ ακολουθούν αμέσως από την (1), αφού

$$\bigcup\nolimits_\alpha f_\alpha : I \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow A \text{ και } I =_c \mathfrak{c}.$$

Για το δεύτερο ισχυρισμό, η βασική παρατήρηση είναι ότι

$$A \cap B_\beta = \emptyset \quad (\beta \in I)\cdot$$

αυτό ισχύει επειδή αν $x \in A_\alpha \cap B_\beta$, τότε μαζί με τη $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$, από την (1), $x \in B_\gamma \cap B_\gamma$, ενάντια στη (2). Τώρα αν το $P \neq \emptyset$ είναι τέλειο, τότε $P = P_\alpha$ για κάποιο $\alpha \in I$, και άρα υπάρχει κάποιο $x \in P_\alpha \cap B_{S\alpha}$ και $x \notin A$, οπότε $P_\alpha \not\subseteq A$. $\dashv$ (Λήμμα 2)

Οι συνθήκες (1) – (3) σχεδόν αποτελούν ορισμό των f_α, g_α. Εξηγούμε περιληπτικά την απόδειξη των (1) – (3) με υπερπεπερασμένη επαγωγή, μαζί με την περιγραφή της υπερπεπερασμένης αναδρομής που τις ορίζει· σχολαστικά θα έπρεπε να δώσουμε ξεχωριστά, πρώτα τον ορισμό και μετά την απόδειξη.

(a) Για το ελάχιστο 0 του I, θέτουμε $f_0 = g_0 = \emptyset$.

(b) Αν το λ είναι οριακό σημείο του I, θέτουμε

$$f_\lambda = \bigcup\nolimits_{\alpha<\lambda} f_\alpha, \quad g_\lambda = \bigcup\nolimits_{\alpha<\lambda} g_\alpha.$$

Οι (1) και (2) ισχύουν τετριμμένα από την επαγωγική υπόθεση, και η (3) δεν ανακύπτει σ' αυτή την περίπτωση.

(c) Έστω $\beta = S\alpha$ επόμενο σημείο στο I. Από την επαγωγική υπόθεση, τα A_α και B_α είναι ισοπληθικά με το $\mathbf{seg}(\alpha)$ και $\mathbf{seg}(\alpha) <_c I$, επειδή η $\le$ είναι άριστη διάταξη. Έτσι οι πληθάριθμοι $|A_\alpha|$, $|B_\alpha|$ είναι και οι δύο μικρότεροι του $\mathfrak{c}$, άρα $|A_\alpha \cup B_\alpha| <_c \mathfrak{c}$, και μπορούμε να βρούμε στο μη κενό, τέλειο σύνολο $P_\alpha =_c \mathcal{N}$ διαφορετικά σημεία

$$x, y \in P_\alpha \setminus (A_\alpha \cup B_\alpha)\cdot$$

θέτουμε

$$f_\beta = f_\alpha \cup \{(\alpha, x)\}, \quad g_\beta = g_\alpha \cup \{(\alpha, y)\},$$

και οι (1) – (3) έπονται εύκολα. ⊣

Η κατασκευή προφανώς δείχνει περισσότερα από την εκφώνηση του θεωρήματος, $|A| =_c \mathfrak{c}$ και όχι μόνο το A αλλά και το συμπλήρωμά του cA τέμνουν κάθε μη κενό, τέλειο σημειοσύνολο. Αφήνουμε για τα προβλήματα διάφορες παραλλαγές που κάνουν προφανές ότι δεν υπάρχει ελπίδα να αποδείξουμε την Υπόθεση του Συνεχούς μ' αυτό τον τρόπο, δηλαδή σε τελευταία ανάλυση στηριζόμενοι στο Θεώρημα Cantor-Bendixson.

Στην πραγματικότητα, η στρατηγική αυτή για την επίλυση του Προβλήματος του Συνεχούς δεν είναι η μοναδική που αποτυγχαίνει: κάθε προσπάθεια απόδειξης ή διάψευσης της **CH** με τα αξιώματα της **ZDC** + **AC** είναι καταδικασμένη, εξαιτίας των εξής δύο θεμελιακών αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας.

10.33. Συνέπεια της Γενικευμένης Υπόθεσης του Συνεχούς GCH (Gödel, 1939). Το πρότυπο L των κατασκευάσιμων συνόλων ικανοποιεί τη Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς **GCH**, (9-7), και ειδικότερα, η Υπόθεση του Συνεχούς δεν διαψεύδεται στην **ZDC**+**AC**.

10.34. Ανεξαρτησία της Υπόθεσης του Συνεχούς CH (Cohen, 1963). Υπάρχει πρότυπο της **ZDC**+**AC** στο οποίο η Υπόθεση του Συνεχούς δεν ισχύει, άρα η **CH** δεν είναι θεώρημα της **ZDC**+**AC**. Το *πρότυπο αναγκασμού* (forcing model) του Cohen επιδέχεται ποικίλες παραλλαγές, έτσι που μπορούμε να προσδιορίσουμε χωρίς αντίφαση με πολλούς τρόπους τις πληθικότητες σημειοσυνόλων ή και υποσυνόλων από μεγαλύτερα δυναμοσύνολα.

10.35. Τι σημαίνει η ανεξαρτησία της CH; Οι μέθοδοι των Gödel και Cohen είναι πολύ εύρωστες και έχουν προσαρμοστεί να δείξουν ότι το Πρόβλημα του Συνεχούς δεν επιδέχεται λύση σε πολλές γνωστές, αληθοφανείς επεκτάσεις της

ZDC+AC με επιπρόσθετα αξιώματα. Το ίδιο ισχύει για το Αξίωμα Επιλογής και ακόμη για το Αξίωμα Απείρου· αυτά όμως εκφράζουν θεμελιακές αρχές για τα σύνολα που αληθεύουν μεν, αλλά είναι προφανώς διαφορετικές από τις αρχές που εκφράζουν τα άλλα, απλούστερα αξιώματα, και καταλαβαίνουμε γιατί δεν μπορούν να αποδειχτούν απ' αυτά μόνο με τη λογική. Η Υπόθεση του Συνεχούς έχει την υφή τεχνικού, μαθηματικού προβλήματος που θα έπρεπε να λυθεί με κάποια απόδειξη, αλλά φαίνεται ότι μας λείπει (μέχρι στιγμής) η απαραίτητη έμπνευση για να ανακαλύψουμε τα κατάλληλα αξιώματα.

Πολλά έχουν λεχθεί για την ανεξαρτησία της **CH** από τα γνωστά αξιώματα της συνολοθεωρίας, και μερικοί την έχουν επικαλεστεί για να υποστηρίξουν ότι δεν υπάρχει αντικειμενική πραγματικότητα πίσω από τα «τυπικά», αξιωματικά αποτελέσματα του κλάδου. Με τη μέθοδο *αριθμητικοποίησης* του Gödel, όμως, προβλήματα *ύπαρξης αποδείξεων* μεταφράζονται σε αυστηρές, τεχνικές εικασίες για αριθμούς. Υπάρχουν τέτοιες εικασίες[27] που (όπως η **CH**) είναι ανεξάρτητες απ' όλα τα γενικά παραδεκτά αξιώματα των μαθηματικών· πρέπει γι' αυτό να αρνηθούμε την «αντικειμενική πραγματικότητα» των φυσικών αριθμών; Δυστυχώς δεν μπορούμε να διερευνήσουμε τέτοια προβλήματα με τη σοβαρότητα που τους αξίζει χωρίς αναφορές σε ιδέες και αποτελέσματα της Μαθηματικής Λογικής, και θα αντισταθούμε στον πειρασμό.

Παρενθετικά αναφέρουμε ότι δεν υπάρχει έλλειψη από σημαντικά προβλήματα που δεν επιδέχονται λύση στην **ZDC** ή στην **ZDC+AC**· η **CH** είναι απλώς το πιο βασικό και ενδιαφέρον απ' αυτά. Θα διατυπώσουμε εδώ μόνο τρία συναφή αποτελέσματα ανεξαρτησίας, επειδή σχετίζονται ιδιαίτερα με το Θεώρημα Τέλειου Συνόλου **10.20**.

10.36. (Gödel, 1939) Στο πρότυπο L των κατασκευάσιμων συνόλων, υπάρχει αναπαρίθμητο, αναλυτικό συμπλήρωμα που δεν έχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να βελτιώσουμε το Θεώρημα Τέλειου Υποσυνόλου **10.20** στην **ZDC+AC** και να δείξουμε ότι κάθε αναλυτικό συμπλήρωμα έχει την ιδιότητα **P**.

10.37. (Solovay, 1970) Υπάρχει πρότυπο της **ZDC+AC** στο οποίο κάθε «ορίσιμο» σημειοσύνολο έχει την ιδιότητα **P**. Δεν θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε εδώ τι θα πει «ορίσιμο», αλλά τα αναλυτικά συμπληρώματα είναι ορίσιμα.

10.38. (Solovay, 1970) Υπάρχει πρότυπο της **ZDC** στο οποίο όλα τα σημειοσύνολα έχουν την ιδιότητα **P**.

---

[27] Οι προτάσεις στις οποίες αναφερόμαστε είναι της μορφής «*αν η* **ZDC+AC** *είναι συνεπής, τότε συνεπής είναι και η* T», όπου η T είναι κάποια ισχυρή επέκταση της **ZDC+AC** που συνεπάγεται τη συνέπεια της **ZDC+AC**. Από το *Δεύτερο Θεώρημα Μη Πληρότητας* του Gödel συνάγεται ότι τέτοιες προτάσεις είναι ανεξάρτητες της **ZDC+AC** (εκτός κι αν η **ZDC+AC** δεν είναι συνεπής!), και υπάρχουν φυσικά παραδείγματα τέτοιων προτάσεων των οποίων η αλήθεια είναι αμφιλεγόμενη.

Τα πρότυπα του Solovay κατασκευάζονται με τη μέθοδο αναγκασμού του Cohen αλλά όπως το L του Gödel, έχουν πολλές ιδιότητες κανονικότητας και αποδίδουν πολυάριθμα, επιπρόσθετα αποτελέσματα ανεξαρτησίας. Το πρώτο πρότυπο του Solovay φανερώνει (με το **10.36**) ότι η ιδιότητα **P** για τα αναλυτικά συμπληρώματα δεν μπορεί να αποδειχτεί ή να διαψευστεί στη θεωρία **ZDC+AC**. Το δεύτερο πρότυπο του Solovay δείχνει ότι η **ZDC** δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη αναπαρίθμητου σημειοσυνόλου χωρίς μη κενό, τέλειο υποσύνολο· το **DC** δεν αρκεί για την κατασκευή.

Προβλήματα για το Κεφάλαιο 10

x10.1. Δείξε ότι αν το $F \subseteq \mathcal{N}$ είναι κλειστό, τότε υπάρχει μοναδικό δέντρο T στο $\mathbb{N}$ χωρίς τερματικούς κόμβους, έτσι ώστε $F = [T]$, συγκεκριμένα το δέντρο T^F που ορίστηκε στη (10-8).

x10.2. Δείξε ότι η διάσπαση (10-12) κλειστού σημειοσυνόλου F σε ένα τέλειο σύνολο P και ένα απαριθμητό σύνολο S προσδιορίζει μοναδικά τα P και S.

x10.3. Δώσε παράδειγμα ενός κλειστού σημειοσυνόλου $F \subseteq \mathcal{N}$ και συνεχούς $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, έτσι ώστε η εικόνα $f[F]$ να μην είναι κλειστό σύνολο.

x10.4. Δείξε ότι κάθε ανοικτό σημειοσύνολο είναι $\mathcal{F}_\sigma$ και κάθε κλειστό σημειοσύνολο είναι $\mathcal{G}_\delta$. Οι ορισμοί ανασκοπούνται στην υποσημείωση 24.

***x10.5.** Δείξε ότι η αντίστροφη εικόνα $g^{-1}[A]$ αναλυτικού σημειοσυνόλου A από συνεχή συνάρτηση $g : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι αναλυτική. Υποδειξη. Προσπάθησε να δείξεις ισοδυναμία της μορφής

$$y \in g^{-1}[A] \iff (\exists x)[y = f(\rho_1(x)) = g(\rho_2(x))],$$

όπου η f είναι συνεχής και οι ρ_n ορίζονται από τη (10-23), και μετά χρησιμοποίησε το **10.23**.

***x10.6.** Δείξε ότι

$$\mathcal{N} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \Longrightarrow (\exists i)[A_i =_c \mathcal{N}],$$

δηλαδή ο χώρος $\mathcal{N}$ δεν είναι απαριθμητή ένωση σημειοσυνόλων με μικρότερη πληθικότητα. Υποδειξη. Αυτό ακολουθεί αμέσως από το Θεώρημα του König **9.21**, αλλά αυτή η ειδική περίπτωση δεν χρειάζεται το πλήρες Αξίωμα Επιλογής.

x10.7. (**AC**) Δείξε ότι για κάθε $\kappa \leq_c \mathfrak{c}$, υπάρχει σημειοσύνολο A με $|A| =_c \kappa$ που δεν περιέχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο.

x10.8. (**AC**) Δείξε ότι υπάρχει αναπαρίθμητο σημειοσύνολο A τέτοιο ώστε ούτε το A ούτε το συμπλήρωμά του να περιέχουν αναπαρίθμητο σύνολο Borel.

x10.9. Δείξε ότι υπάρχουν $\mathfrak{c}$-πολλά αναλυτικά και Borel σημειοσύνολα,

$$|\mathcal{A}| =_c |\mathcal{B}| =_c \mathfrak{c}.$$

10.39. Ορισμός. Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από έναν τοπολογικό χώρο σε κάποιον άλλο είναι **Borel μετρήσιμη** αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[G]$ κάθε ανοικτού συνόλου του Y είναι Borel υποσύνολο του X.

x10.10. Η σύνθεση $gf : X \to Z$ δύο Borel μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι Borel μετρήσιμη.

x10.11. Η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[A]$ ενός συνόλου Borel $A \subseteq Y$ από Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι Borel υποσύνολο του X.

10.40. Ορισμός. Δύο τοπολογικοί χώροι X, Y είναι **Borel ισομορφικοί** αν υπάρχει αντιστοιχία $f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$ τέτοια ώστε η f και η αντίστροφη συνάρτησή της $f^{-1} : Y \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow X$ να είναι και οι δύο Borel μετρήσιμες. Χώροι που είναι Borel ισομορφικοί έχουν την ίδια δομή όσον αφορά τη θεωρία μέτρου, και πρακτικά μπορούν να «ταυτιστούν» σ' αυτήν τη θεωρία.

***x10.12.** Έστω $f : X \rightarrowtail Y$ και $g : Y \rightarrowtail X$ Borel μετρήσιμοι μονομορφισμοί σε τοπολογικούς χώρους με την εξής επιπρόσθετη ιδιότητα:[28] υπάρχουν Borel μετρήσιμες συναρτήσεις $f_1 : Y \to X$ και $g_1 : X \to Y$ που είναι αντίστροφες των f και g με την έννοια ότι

$$f_1 f(x) = x \quad (x \in X),$$
$$g_1 g(y) = y \quad (y \in Y).$$

Δείξε ότι οι X και Y είναι Borel ισομορφικοί. ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Χρησιμοποίησε την απόδειξη του Θεωρήματος Schröder-Bernstein **2.26**.

x10.13. Θεωρούμε το σύνολο του Cantor $\mathcal{C}$ ως τοπολογικό υποχώρο του $\mathcal{N}$ με τον προφανή τρόπο, δηλαδή τα ανοικτά σύνολα είναι οι ενώσεις γειτονιών της μορφής

$$\mathcal{N}_u = \{x \in \mathcal{C} \mid u \sqsubseteq x\} \quad (u \in \{0,1\}^*).$$

Δείξε ότι οι χώροι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{N}$ είναι Borel ισομορφικοί.

Στα υπόλοιπα προβλήματα διερευνούμε τη σχέση ανάμεσα στις συγκεκριμένες, συνδυαστικές έννοιες που έχουμε μελετήσει στο χώρο Baire και τις γενικές, τοπολογικές εκδοχές τους.

10.41. Ορισμός. Το σημείο x είναι **οριακό σημείο** (limit point) συνόλου A σε τοπολογικό χώρο X, αν κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το x περιέχει επίσης κάποιο σημείο του A διαφορετικό από το x,

$$(\forall G)[G \text{ ανοικτό και } x \in G \Longrightarrow (\exists y \in A \cap G)[x \neq y]].$$

Από τον ορισμό, ένα οριακό σημείο του A μπορεί να ανήκει στο A, μπορεί και όχι. *Σημείο του A που δεν είναι οριακό σημείο του A καλείται* **απομονωμένο** *ή* **μεμονωμένο** (isolated) στο A.

[28] Στην πραγματικότητα, κάθε Borel μονομορφισμός έχει αυτην την ιδιότητα, όμως για να το αποδείξουμε αυτό, χρειάζεται δουλειά.

x10.14. Βρες τα οριακά και τα απομονωμένα σημεία του σημειοσυνόλου

$$B = \{x \in \mathcal{N} \mid x(0) = 1 \vee (\forall n)[x(n) = 2] \vee (\exists n)[x(n) = 3]\}.$$

x10.15. Δείξε ότι το x είναι οριακό σημείο του A αν και μόνον αν κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το x περιέχει επίσης απείρως πολλά σημεία του A.

x10.16. Δείξε ότι ένα σύνολο σε τοπολογικό χώρο είναι κλειστό τότε και μόνον αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία.

x10.17. Δείξε ότι ένα σημειοσύνολο P είναι τέλειο τότε και μόνον αν είναι κλειστό και δεν έχει απομονωμένα σημεία, δηλαδή κάθε σημείο του P είναι οριακό του σημείο. Αυτή η ισοδυναμία ταυτίζει τον συγκεκριμένο ορισμό τελειότητας που δώσαμε για σημειοσύνολα με τον κλασικό, τοπολογικό ορισμό.

10.42. Ορισμός. Η ακολουθία $(n \mapsto x_n)$ σημείων σε έναν τοπολογικό χώρο X **συγκλίνει** στο σημείο x ή έχει το x ως **όριο**, αν κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το x περιέχει όλα τα x_i, εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο αρχικό τμήμα:

$$\lim_n x_n = x \iff_{\text{ορ}} (\forall G \text{ ανοικτό}, x \in G)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall i \geq n)[x_i \in G].$$

x10.18. Δείξε ότι το σημείο x είναι οριακό σημείο σημειοσυνόλου A αν και μόνον αν $x = \lim_n x_n$ για κάποια ακολουθία $(n \mapsto x_n \in A)$ σημείων του A. Ποια αρχή επιλογής χρησιμοποίησες στην απόδειξη, αν χρησιμοποίησες κάποια;

x10.19. Δείξε ότι η συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι συνεχής αν και μόνον αν

$$f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n),$$

για κάθε ακολουθία όπου το όριο $\lim_n x_n$ υπάρχει. Ποια αρχή επιλογής χρησιμοποίησες στην απόδειξη, αν χρησιμοποίησες κάποια;

x10.20. *Ο τοπολογικός χώρος X είναι* **Hausdorff** *αν για κάθε ζεύγος σημείων $x \neq y$, υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα $G \cap H = \emptyset$ τέτοια ώστε $x \in G$ και $y \in H$.* Δείξε ότι αν οι $f, g : X \to Y$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και ο Y είναι Hausdorff, τότε το σύνολο $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό στον X.

10.43. Ορισμός. Ανοικτό κάλυμμα συνόλου K σε τοπολογικό χώρο X είναι η τυχαία οικογένεια $\mathcal{G}$ ανοικτών συνόλων των οποίων η ένωση περιέχει το K, $K \subseteq \bigcup \mathcal{G}\cdot$ και το K είναι **συμπαγές** στο X αν κάθε ανοικτό κάλυμμά του περιέχει πεπερασμένο **υποκάλυμμα**, δηλαδή για κάθε οικογένεια $\mathcal{G}$ ανοικτών συνόλων,

$$K \subseteq \bigcup \mathcal{G} \Longrightarrow (\exists G_0, \ldots, G_n \in \mathcal{G})[K \subseteq \textstyle\bigcup_{i \leq n} G_i].$$

* **x10.21.** Δείξε ότι ένα σημειοσύνολο είναι συμπαγές με τον Ορισμό **10.18** αν και μόνον αν είναι συμπαγές με τον Ορισμό **10.43**. Υποδειξη. Θα χρειαστείς το Λήμμα του König **9.7**.

x10.22. Δείξε ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to Y$ από έναν τοπολογικό χώρο X σε κάποιον άλλο Y, και για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subseteq X$, η εικόνα $f[K]$ είναι συμπαγές σύνολο στο Y.