ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Συνόλων

Ενότητα: Εισαγωγή

Γιάννης Μοσχοβάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Σημειώματα

Σημειώμα ιστορικού εκδόσεων έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1. Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη στο σύνδεσμο http://www.math.ucla.edu/ ynm/lectures/g.pdf

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα αδειοδότησης

Διατήρηση σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύνολα έχουν χρησιμοποιηθεί σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών από τους αρχαιότατους χρόνους, π.χ. στη γεωμετρία ορίζουμε τον κύκλο ως το σύνολο των σημείων που απέχουν ορισμένη απόσταση r από ορισμένο σημείο C (το κέντρο), μελετάμε τη δέσμη όλων των ευθειών που περνούν από ένα συγκεκριμένο σημείο κ.λπ. Η συστηματική μελέτη των συνόλων, όμως, άρχισε μόνο στα τέλη του 19ου αιώνα με την εργασία του μεγάλου Γερμανού μαθηματικού Georg Cantor, που δημιούργησε μια αυστηρή θεωρία της έννοιας του *ολοκληρωμένου απείρου*, με την οποία μπορούμε να συγκρίνουμε άπειρα σύνολα *ως προς το πλήθος*. Συγκεκριμένα, ας θέσουμε:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\} = \text{το σύνολο των ακεραίων αριθμών},$$
$$\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\} = \text{το σύνολο των φυσικών αριθμών},$$
$$\mathbb{Q} = \text{το σύνολο των ρητών αριθμών},$$
$$\mathbb{R} = \text{τα σημεία μιας απεριόριστης ευθείας},$$

όπου ταυτίζουμε το $\mathbb{R}$ με το σύνολο των πραγματικών αριθμών, κάθε σημείο ταυτιζόμενο με τη (θετική ή αρνητική) του συντεταγμένη. Ο Cantor ερώτησε αν αυτά τα σύνολα «έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων» ή αν κάποιο από αυτά είναι «πολυπληθέστερο» των άλλων. Πριν εξηγήσουμε την απάντηση που έδωσε, στο επόμενο κεφάλαιο, θα ανασκοπήσουμε εδώ συνοπτικά μερικές από τις βασικές ιδέες για σύνολα και συναρτήσεις, κυρίως για να εξηγήσουμε το συμβολισμό που θα χρησιμοποιούμε.

Αλλά τι είναι τα σύνολα; Η ερώτηση είναι παρόμοια με την ερώτηση «τι είναι τα σημεία μιας ευθείας» την οποία ο Ευκλείδης απάντησε με το

«σημεῖόν ἐστιν οὗ μέρος οὐθέν».

Αυτός δεν είναι βέβαια αυστηρός, μαθηματικός ορισμός, αναγωγή της έννοιας του σημείου σε γνωστές έννοιες, αλλά μια κάποια περιγραφή, που θέλει να μας δώσει την εικόνα ότι το σημείο είναι κάτι που δεν έχει «έκταση». Όπως αυτή του σημείου, η έννοια του συνόλου είναι επίσης θεμελιακή και δεν μπορεί να αναχθεί σε απλούστερες έννοιες. Ο Cantor την περιέγραψε ως εξής:

> «Με τη λέξη ‘σύνολο’ εννοούμε μια οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα οριστικών και διακεκριμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας».

Όσο ασαφής και αν είναι αυτός ο ορισμός, συνεπάγεται δύο βασικές ιδιότητες των συνόλων.

1. Κάθε σύνολο A έχει **στοιχεία ή μέλη**. Γράφουμε

$$x \in A \iff \text{το αντικείμενο } x \text{ είναι μέλος του (ή ανήκει στο) } A.$$

2. Ένα σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του, δηλαδή αν τα A, B είναι σύνολα, τότε[2]

$$\begin{aligned} A = B &\iff \text{τα } A \text{ και } B \text{ έχουν τα ίδια μέλη} \qquad (1\text{-}1)\\ &\iff (\forall x)[x \in A \iff x \in B]. \end{aligned}$$

Αυτό το τελευταίο λέγεται η **ιδιότητα της έκτασης**. Το σύνολο των φοιτητών σ' αυτή την τάξη π.χ. θα παραμείνει σταθερό αν όλοι μας αλλάξουμε θέσεις, ξαπλώσουμε κάτω ή μετακινηθούμε σε κάποιο άλλο δωμάτιο: το σύνολο καθορίζεται τελείως από το *ποιοι* είμαστε, όχι από τη στάση μας ή τις θέσεις όπου τυχαίνει να βρισκόμαστε.

Κάπως ιδιότυπο είναι το **κενό σύνολο** $\emptyset$ που δεν έχει κανένα μέλος. Η ιδιότητα της έκτασης συνεπάγεται ότι *μόνο ένα κενό σύνολο υπάρχει.*

Αν τα A και B είναι σύνολα, γράφουμε

$$A \subseteq B \iff (\forall x)[x \in A \Longrightarrow x \in B],$$

και αν $A \subseteq B$, λέμε ότι το A είναι **υποσύνολο** του B, έτσι ώστε για κάθε B,

$$\emptyset \subseteq B, \quad B \subseteq B.$$

Αν το A είναι **γνήσιο** υποσύνολο του B, γράφουμε $A \subsetneq B$,

$$A \subsetneq B \iff [A \subseteq B \;\&\; A \neq B].$$

Από την ιδιότητα της έκτασης έπεται ότι για όλα τα σύνολα A, B,

$$A = B \iff A \subseteq B \;\&\; B \subseteq A.$$

Έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει πολλούς συμβολισμούς για να ορίσουμε συγκεκριμένα σύνολα και θα χρειαστούμε και άλλους, π.χ.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

είναι το (πεπερασμένο) σύνολο με μέλη ακριβώς τα στοιχεία $a_1, a_2, \dots, a_n$. Επίσης, αν η P είναι μια συνθήκη που ορίζει κάποια ιδιότητα των αντικειμένων, τότε

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

είναι το σύνολο όλων των αντικειμένων που ικανοποιούν τη συνθήκη P, έτσι ώστε για κάθε x,

$$x \in A \iff P(x).$$

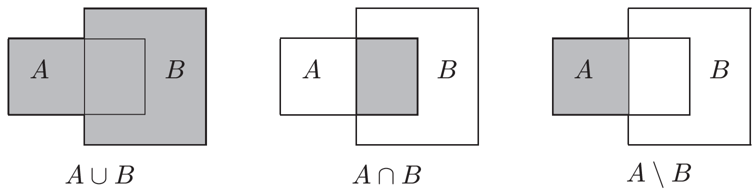
---

[2] Θα χρησιμοποιήσουμε συστηματικά ως συντομεύσεις τους συμβολισμούς της λογικής:

$$\& : \text{και},\ \vee : \text{ή},\ \neg : \text{όχι},\ \Longrightarrow : \text{συνεπάγεται},\ \iff : \text{τότε και μόνον αν},$$

$$\forall : \text{για κάθε},\ \exists : \text{υπάρχει},\ \exists! : \text{υπάρχει ακριβώς ένα}.$$

Τα σύμβολα $=_{\text{ορ}}$ και $\iff_{\text{ορ}}$ διαβάζονται "ισούται εξ' ορισμού" και "ισοδύναμα εξ' ορισμού".



Διαγραμμα **1.1**. Πράξεις Boole.

Για παράδειγμα, αν

$$P(x) \iff x \in \mathbb{N} \,\&\, x \text{ άρτιος},$$

τότε $\{x \mid P(x)\}$ είναι το σύνολο όλων των άρτιων, φυσικών αριθμών. Όταν ενδιαφερόμαστε μονάχα για τη "συνάθροιση σε ολότητα" μελών ενός δοσμένου συνόλου A που ικανοποιούν μια συγκεκριμένη συνθήκη, χρησιμοποιούμε μια παραλαγή του παραπάνω συμβολισμού:

$$\{x \in A \mid P(x)\} =_{\text{ορ}} \{x \mid x \in A \,\&\, P(x)\},$$

έτσι ώστε, για παράδειγμα, $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 0\}$ είναι το σύνολο όλων των μη μηδενικών φυσικών αριθμών, ενώ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ είναι το σύνολο όλων των θετικών πραγματικών αριθμών.

Για όλα τα σύνολα A, B,

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \vee x \in B\} && (\text{η ένωση των } A, B),\\ A \cap B &= \{x \in A \mid x \in B\} && (\text{η τομή των } A, B),\\ A \setminus B &= \{x \in A \mid x \notin B\} && (\text{η διαφορά των } A, B). \end{aligned}$$

Αυτές οι "πράξεις Boole" απεικονίζονται σχηματικά με τα διαγράμματα Venn στο Διάγραμμα **1.1**, όπου τα σύνολα αναπαραστούνται από εμβαδά στο επίπεδο. Η ένωση και η τομή μιας ακολουθίας συνόλων ορίζονται με τον ίδιο τρόπο,

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \cup A_1 \cup \cdots = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})[x \in A_n]\},$$

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \cap A_1 \cap \cdots = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})[x \in A_n]\}.$$

Δύο σύνολα είναι **ξένα** αν η τομή τους είναι κενή,

$$A \text{ ξένο με το } B \iff A \cap B = \emptyset.$$

Με τους συμβολισμούς

$$f : X \to Y \quad \text{ή} \quad A \xrightarrow{f} B$$

εννοούμε ότι η f είναι **συνάρτηση** που αντιστοιχίζει σε κάθε μέλος x του συνόλου X του **πεδίου ορισμού** της f, ακριβώς ένα στοιχείο $f(x)$ του **πεδίου τιμών** Y της f. Τις συναρτήσεις καλούμε και **απεικονίσεις** ή **μετασχηματισμούς**. Πολλές φορές είναι χρήσιμος και ο συνοπτικός συμβολισμός $(x \mapsto f(x))$ που μας επιτρέπει να μιλήσουμε για κάποια συνάρτηση χωρίς να τη βαφτίσουμε επίσημα. Η

$$(x \mapsto x^2 + 1)$$

π.χ. στους πραγματικούς αριθμούς είναι η συνάρτηση (ας την πούμε) f που ορίζεται με τον τύπο

$$f(x) = x^2 + 1, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

έτσι ώστε $f(0) = 1$, $f(2) = 5$ κ.λπ. Χωρίς να εισαγάγουμε το όνομα f γι' αυτή τη συνάρτηση, μπορούμε να πούμε ότι «όλες οι τιμές της $(x \mapsto x^2 + 1)$ είναι θετικές».

Δύο συναρτήσεις είναι **ίσες** αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και αντιστοιχούν την ίδια τιμή σε κάθε μέλος του κοινού τους πεδίου ορισμού.

$$f = g \iff (\forall x \in X)[f(x) = g(x)] \quad (f : X \to Y,\ g : X \to Z, x \in X).$$

Αναφορικά με συναρτήσεις, θα χρησιμοποιούμε επίσης τους συμβολισμούς

$$\begin{aligned} f : X \rightarrowtail Y &\iff_{\text{ορ}} \text{η } f \text{ είναι } \textbf{μονομορφισμός} \text{ (ένα-πρός-ένα)} \\ &\iff (\forall x, x' \in X)[f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'], \\ f : X \twoheadrightarrow Y &\iff_{\text{ορ}} \text{η } f \text{ είναι } \textbf{επιμορφισμός} \text{ (συνάρτηση επί)} \\ &\iff (\forall y \in Y)(\exists x \in X)[f(x) = y], \\ f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y &\iff_{\text{ορ}} \text{η } f \text{ είναι } \textbf{αντιστοιχία} \\ &\iff (\forall y \in Y)(\exists! x \in X)[f(x) = y]. \end{aligned}$$

Για κάθε $f : X \to Y$ και $A \subseteq X$, το σύνολο

$$f[A] =_{\text{ορ}} \{f(x) \mid x \in A\}$$

είναι η **εικόνα** του A από την f, και αν $B \subseteq Y$ τότε το

$$f^{-1}[B] =_{\text{ορ}} \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

είναι η **αντίστροφη εικόνα** του B από την f.

Αν η f είναι αντιστοιχία, τότε βέβαια η **αντίστροφη συνάρτηση** $f^{-1} : Y \to X$ μπορεί να οριστεί ανεξάρτητα με τον τύπο

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

και το σύνολο $f^{-1}[B]$ είναι ακριβώς η εικόνα του B από την f^{-1} όπως την ορίσαμε πιο πάνω.

Η **σύνθεση**

$$h =_{\text{ορ}} gf : X \to Z$$

δύο συναρτήσεων

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

ορίζεται με τον τύπο

$$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in X).$$

Πολλές χρήσιμες ιδιότητες των συνόλων και συναρτήσεων μπορούν να αποδειχτούν αμέσως από αυτούς τους ορισμούς και την ιδιότητα της έκτασης. Για παράδειγμα,

$$A \cup B = B \cup A,$$

επειδή για οποιοδήποτε x,

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\iff x \in A \text{ ή } x \in B \\ &\iff x \in B \text{ ή } x \in A \\ &\iff x \in B \cup A. \end{aligned}$$

Σε μερικές περιπτώσεις η λογική της απόδειξης είναι κάπως περίπλοκη και είναι ευκολότερο να αποδείξουμε την ισότητα $U = V$ επαληθεύοντας ξεχωριστά τις συνεπαγωγές $x \in U \Longrightarrow x \in V$ και $x \in V \Longrightarrow x \in U$. Για παράδειγμα, αν $f : X \to Y$ και $A, B \subseteq X$, τότε

$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B].$$

Για να επαληθεύσουμε αυτήν την ισότητα, πρώτα δείχνουμε ότι

$$x \in f[A \cup B] \Longrightarrow x \in f[A] \cup f[B]\cdot$$

αυτό ισχύει επειδή αν $x \in f[A \cup B]$, τότε υπάρχει κάποιο $y \in A \cup B$ τέτοιο που $x = f(y)$· και αν $y \in A$, τότε $x = f(y) \in f[A] \subseteq f[A] \cup f[B]$, ενώ αν $y \in B$, τότε $x = f(y) \in f[B] \subseteq f[A] \cup f[B]$. Έπειτα δείχνουμε την αντίστροφη συνεπαγωγή,

$$x \in f[A] \cup f[B] \Longrightarrow x \in f[A \cup B]\cdot$$

αυτό ισχύει επειδή αν $x \in f[A]$, τότε $x = f(y)$ για κάποιο $y \in A \subseteq A \cup B$, και έτσι $x \in f[A \cup B]$, ενώ αν $x \in f[B]$, τότε $x = f(y)$ για κάποιο $y \in B \subseteq A \cup B$, άρα και πάλι $x \in f[A \cup B]$.

Προβλήματα για το Κεφάλαιο 1

x1.1. Για όλα τα σύνολα A, B, C,

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \setminus (A \cap B) &= A \setminus B. \end{aligned}$$

x1.2. (Οι νόμοι του De Morgan) Για όλα τα σύνολα A, B, C,

$$\begin{aligned} C \setminus (A \cup B) &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B), \\ C \setminus (A \cap B) &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

x1.3. (Οι νόμοι του De Morgan για ακολουθίες) Για κάθε σύνολο C και ακολουθία συνόλων $\{A_n\}_n = A_0, A_1, \dots,$

$$C \setminus (\bigcup_n A_n) = \bigcap_n (C \setminus A_n),$$
$$C \setminus (\bigcap_n A_n) = \bigcup_n (C \setminus A_n).$$

x1.4. Για κάθε μονομορφισμό $f : X \rightarrowtail Y$ και όλα τα $A, B \subseteq X$,

$$f[A \cap B] = f[A] \cap f[B],$$
$$f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B].$$

Δείξε επίσης ότι αυτές οι ισότητες δεν ισχύουν πάντα αν η f δεν είναι μονομορφισμός.

x1.5. Για κάθε $f : X \to Y$ και όλα τα $A, B \subseteq Y$,

$$f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B],$$
$$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B],$$
$$f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B].$$

x1.6. Για όλες τις $f : X \to Y$ και όλες τις ακολουθίες συνόλων $A_n \subseteq X$, $B_n \subseteq Y$,

$$f^{-1}[\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n] = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-1}[B_n],$$
$$f^{-1}[\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n] = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-1}[B_n],$$
$$f[\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n] = \bigcup_{n=0}^{\infty} f[A_n].$$

x1.7. Για κάθε μονομορφισμό $f : X \rightarrowtail Y$ και κάθε ακολουθία συνόλων $A_n \subseteq X$,

$$f[\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n] = \bigcap_{n=0}^{\infty} f[A_n].$$

x1.8. Η σύνθεση μονομορφισμών είναι μονομορφισμός, η σύνθεση επιμορφισμών είναι επιμορφισμός, και επομένως η σύνθεση αντιστοιχιών είναι αντιστοιχία.