ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Συνόλων

Ενότητα: Επιλογής επόμενα

Γιάννης Μοσχοβάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Σημειώματα

Σημείωμα ιστορικού εκδόσεων έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1. Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη στο σύνδεσμο http://www.math.ucla.edu/ ynm/lectures/g.pdf

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα αδειοδότησης

Διατήρηση σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΕΠΟΜΕΝΑ

Θα αρχίσουμε αυτό το κεφάλαιο με μερικά αποτελέσματα για απαριθμητά σύνολα των οποίων οι αποδείξεις επεξηγούν τη διαφορά των αρχών επιλογής $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$, **DC** και **AC**. Ο κύριος στόχος μας, όμως, είναι να αποδείξουμε μερικά σημαντικά επακόλουθα του πλήρους Αξιώματος Επιλογής, ανάμεσά τους και τους βασικούς κανόνες της *πληθικής αριθμητικής*. Το ενδεικτικό σημάδι (**AC**) θα διακοσμήσει σχεδόν όλες τις αριθμημένες προτάσεις.

9.1. Θεώρημα. *Κάθε άπειρο σύνολο έχει άπειρο, απαριθμητό υποσύνολο, και επομένως, για κάθε πληθάριθμο κ, είτε $\kappa <_c \aleph_0$ είτε $\aleph_0 \leq_c \kappa$.*

Απόδειξη. Αν το A είναι άπειρο, προφανώς

$$(\forall u \in A^*)(\exists y \in A)(\forall i < \mathrm{lh}(u))[u(i) \neq y].$$

που με το **DC** συνεπάγεται ότι υπάρχει ακολουθία $f : \mathbb{N} \to A$ τέτοια ώστε

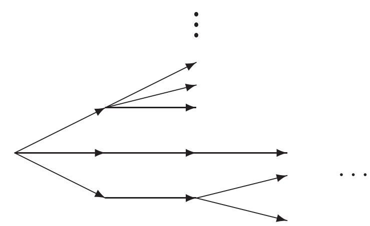
$$(\forall n)(\forall i < n)[f(i) \neq f(n)],$$

και η εικόνα της $f[\mathbb{N}]$ είναι άπειρο, απαριθμητό υποσύνολο του A. Το δεύτερο συμπέρασμα συνάγεται εύκολα, διαχωρίζοντας περιπτώσεις αν ο κ είναι πεπερασμένος ή άπειρος. $\dashv$

Το νόημα του δεύτερου ισχυρισμού στο Θεώρημα είναι ότι παρόλο που η γενική Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων χρειάζεται το πλήρες Αξίωμα Επιλογής για την απόδειξή της, η ειδική (και σημαντική) περίπτωση συγκρισιμότητας με τον $\aleph_0$ είναι θεώρημα της **ZDC**. Το **9.1** μπορεί μάλιστα να αποδειχτεί με επίκληση μόνο της ασθενέστερης Αρχής Απαριθμητής Επιλογής $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ αντί του **DC**, αλλά η απόδειξη είναι κάπως πιο τεχνική, βλ. Πρόβλημα **x9.1**. Το φαινόμενο είναι ενδεικτικό της σχέσης ανάμεσα στο **DC** και το $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$: πολλά αποτελέσματα των οποίων οι φυσικές αποδείξεις στηρίζονται στο **DC** έπονται της ασθενέστερης αρχής, αλλά με περισσότερη προσπάθεια.

Το Θεώρημα **9.1** επίσης ξεκαθαρίζει τη σχέση ανάμεσα στα άπειρα και τα Dedekind-άπειρα σύνολα.

9.2. Πόρισμα. *Ένα σύνολο A είναι πεπερασμένο αν και μόνον αν είναι πεπερασμένο κατά τον Dedekind* (**4.31**), *δηλαδή αν δεν υπάρχει μονομορφισμός $\pi : A \rightarrowtail B \subsetneq A$ από το A σε ένα γνήσιο υποσύνολό του.*



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **9.1**. Μη κενό δέντρο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Τα πεπερασμένα σύνολα είναι Dedekind-πεπερασμένα από την Αρχή του Περιστερεώνα, **5.27**. Αν το A είναι άπειρο, έστω $f : \mathbb{N} \rightarrowtail A$ απαρίθμηση χωρίς επαναλήψεις κάποιου άπειρου, απαριθμητού υποσυνόλου του. Ο μονομορφισμός

$$\pi(x) = \begin{cases} f(n+1) & \text{αν για κάποιο } n,\ x = f(n), \\ x & \text{αν } x \notin f[\mathbb{N}] \end{cases}$$

βεβαιώνει ότι το A είναι Dedekind-άπειρο, εφόσον $\pi[A] = A \setminus \{f(0)\}$. $\dashv$

Θεωρούμε τώρα ένα απλό αλλά πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα για δέντρα, του οποίου η απόδειξη προσφέρει ακόμη ένα παράδειγμα χρήσης του **DC** και της σχέσης του με το $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$.

9.3. Ορισμός. Δέντρο (tree)[21] σε σύνολο E είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο $T \subseteq E^*$ λέξεων από το E που είναι κλειστό προς τα κάτω, δηλαδή

$$u \sqsubseteq v \in T \Longrightarrow u \in T.$$

Από την (5-16), για λέξεις (πεπερασμένες ακολουθίες), $u \sqsubseteq v \iff u \subseteq v$.

Πολλοί όροι χρησιμοποιούνται στη μελέτη δέντρων, οι περισσότεροι πηγάζουν από τη συνήθεια να απεικονίζουμε τα δέντρα σαν ... δέντρα. Τα μέλη του T είναι οι **κόμβοι** (nodes) ή **πεπερασμένα κλαδιά** του (finite branches), και κάθε μη κενό δέντρο έχει το $\emptyset$ ως ελάχιστο κόμβο, τη **ρίζα** (root). Αν $u \star \langle x \rangle \in T$, τότε το u είναι **γονέας** (parent) του $u \star \langle x \rangle$ και το $u \star \langle x \rangle$ είναι **παιδί** (child) του u στο T. Κάθε κόμβος εκτός από τη ρίζα έχει ακριβώς ένα γονέα, αλλά μπορεί να έχει πολλά παιδιά· αν δεν έχει παιδιά είναι **τερματικός κόμβος** (terminal node ή leaf). Σε κάθε κόμβο u αντιστοιχίζουμε το **υπόδεντρο**

$$T_u =_{\text{ορ}} \{w \in T \mid w \sqsubseteq u \vee u \sqsubseteq w\} \tag{9-1}$$

των κόμβων που είναι συγκρίσιμοι με τον u. Εύκολα:

$$T_u = \{w \mid w \sqsubseteq u\} \cup \bigcup \{T_v \mid \text{το } v \text{ είναι παιδί του } u\}. \tag{9-2}$$

[21] Δέντρα χρησιμοποιούνται σε πολλούς μαθηματικούς κλάδους, με διαφορετικούς ορισμούς ανάλογα με τις ανάγκες του κάθε κλάδου. Αυτός ο ορισμός είναι ο πιο γενικός που θα χρειαστούμε σ' αυτές τις Σημειώσεις.

9.4. Άσκηση. *Δείξε την* (9-2).

Τα **άπειρα κλαδιά** (infinite branches) ενός δέντρου T είναι οι άπειρες ακολουθίες του, και τις συλλέγουμε στο **σώμα** (body) του T,

$$[T] =_{\text{op}} \{f : \mathbb{N} \to E \mid (\forall n)[\overline{f}(n) \in T]\}. \tag{9-3}$$

Κάθε άπειρο κλαδί δέντρου παράγει ένα άπειρο πλήθος διαφορετικών κόμβων, άρα πεπερασμένα δέντρα έχουν κενά σώματα. Είναι επίσης εύκολο να κατασκευάσουμε άπειρα δέντρα με κενά σώματα:

9.5. Άσκηση. *Δείξε ότι το δέντρο*

$$T = \{u \in \mathbb{N}^* \mid (\forall i < \mathrm{lh}(u),\ i > 0)[u(i-1) > u(i)]\}$$

στους φυσικούς αριθμούς είναι άπειρο αλλά δεν έχει άπειρο κλαδί.

9.6. Ορισμός. Το δέντρο T είναι **πεπερασμένης διακλάδωσης** (finitely branching) αν κάθε κόμβος του T έχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος παιδιών.

Το δέντρο στην Άσκηση **9.5** δεν είναι πεπερασμένης διακλάδωσης (στη ρίζα), και δεν θα μπορούσε να είναι εξαιτίας του επόμενου, βασικού αποτελέσματος.

9.7. Λήμμα του König. *Κάθε άπειρο, πεπερασμένης διακλάδωσης δέντρο έχει τουλάχιστον ένα άπειρο κλαδί.*

Απόδειξη. Έστω $T \subseteq E^*$ άπειρο δέντρο πεπερασμένης διακλάδωσης και έστω

$$S =_{\text{op}} \{u \in T \mid T_u \text{ είναι άπειρο}\}$$

το υπόδεντρο όλων των κόμβων του T που είναι συγκρίσιμα με άπειρο πλήθος κόμβων. Εφόσον το $T_\emptyset = T$ είναι άπειρο από την υπόθεση, η ρίζα $\emptyset \in S$, και η (9-2) συνεπάγεται ότι το S δεν έχει τερματικούς κόμβους,

$$(\forall u \in S)(\exists x \in T)[u \star \{x\} \in S],$$

επειδή κάθε u έχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος παιδιών και το άπειρο σύνολο S_u δεν μπορεί να είναι η ένωση πεπερασμένης οικογένειας πεπερασμένων συνόλων. Από το ισχυρό **DC** Πρόταση **8.14**, έπεται ότι υπάρχει κάποια $f : \mathbb{N} \to E$ τέτοια ώστε για κάθε n, $\overline{f}(n) \in S$ και το $f(n+1)$ να είναι παιδί του $\overline{f}(n)$, έτσι που η f είναι ένα άπειρο κλαδί του S—συνεπώς και του T. ⊣

Το Λήμμα του König είναι πολύ χρήσιμο, ιδιαίτερα στην επόμενη, «κατασκευαστική» εκδοχή του.

9.8. Ορισμός. Ένα σύνολο κόμβων $B \subseteq T$ είναι **φράχτης** (bar) του δέντρου T, αν κάθε άπειρο κλαδί του T περιέχει τουλάχιστον έναν κόμβο του B,

$$(\forall f \in [T])(\exists n)[\overline{f}(n) \in B].$$

9.9. Θεώρημα Βεντάλιας (Fan Theorem). *Έστω δέντρο T πεπερασμένης διακλάδωσης. Κάθε φράχτης B του T έχει πεπερασμένο υποσύνολο*

$$B_0 = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq B,$$

που είναι επίσης φράχτης του T.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω B_0 το σύνολο των ελαχιστικών κόμβων του φράχτη B,

$$B_0 =_{\text{ορ}} \{u \in B \mid (\forall v \sqsubsetneq u)[v \notin B]\},$$

Το B_0 είναι επίσης φράχτης, επειδή αν $f \in [T]$ και n είναι ο ελάχιστος αριθμός τέτοιος ώστε $\overline{f}(n) \in B$, τότε $\overline{f}(n) \in B_0$. Έστω S το δέντρο όλων των αρχικών τμημάτων κόμβων του B_0,

$$S =_{\text{ορ}} \{v \in T \mid (\exists u \in B_0)[v \sqsubseteq u]\}.$$

Παρατηρούμε ότι το S είναι δέντρο πεπερασμένης διακλάδωσης (υπόδεντρο του T), και οι τερματικοί του κόμβοι είναι ακριβώς τα μέλη του B_0, εφόσον κανείς κόμβος στο B_0 δεν είναι γνήσιο αρχικό τμήμα κάποιου άλλου. Άρα το S δεν έχει άπειρο κλαδί, αφού το B_0 είναι φράχτης του T. Έπεται ότι το S είναι πεπερασμένο, από το Λήμμα του König και επομένως το υποσύνολό του B_0 είναι επίσης πεπερασμένο. $\dashv$

Η εκπληκτικά εύκολη απόδειξη του Λήμματος του König είναι τυπική επιχειρημάτων που στηρίζονται στο **DC**, αφενός επειδή η βασική δομή της απόδειξης φανερά επικαλείται το **DC**, αλλά επίσης και για τους εξής δύο λόγους.

(1) Το Λήμμα του König μπορεί να αποδειχτεί για κάθε δέντρο T σε καλά διατάξιμο σύνολο E χωρίς επίκληση ουδεμίας αρχής επιλογής, Πρόβλημα **x9.3**. Σε πολλές εφαρμογές $E = \mathbb{N}$ ή το E είναι πεπερασμένο, και γι' αυτές δεν χρειαζόμαστε καμία επιλογή.

(2) Όπως και το **9.1**, το Λήμμα του König μπορεί να αποδειχτεί με επίκληση του $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ αντί του **DC**, Πρόβλημα **x9.4**.

Πολλές από τις εφαρμογές του πλήρους Αξιώματος Επιλογής έχουν την εξής δομή: διατυπώνουμε και δείχνουμε στη θεωρία **ZDC** (ή και χωρίς καθόλου επιλογές) κάποια ενδιαφέρουσα πρόταση για τα καλά διατάξιμα σύνολα, και από αυτή βγάζουμε το συμπέρασμα που θέλουμε για όλα τα σύνολα με μια απλή επίκληση του Θεωρήματος Καλής Διάταξης. Τυπικό παράδειγμα είναι η εξής γενίκευση της Εικασίας Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων, όπου (για πρώτη και τελευταία φορά) θα διατυπώσουμε ξεχωριστά το πόρισμα για όλα τα σύνολα.

9.10. Θεώρημα. Καλή θεμελίωση του $\leq_c$. (1) *Για κάθε μη κενή κλάση $\mathcal{E}$ καλά διατάξιμων συνόλων, υπάρχει $A_0 \in \mathcal{E}$ τέτοιο ώστε για κάθε $A \in \mathcal{E}$, $A_0 \leq_c A$.*

(2) (**AC**) *Κάθε μη κενή κλάση $\mathcal{E}$ συνόλων έχει $\leq_c$-ελάχιστο μέλος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Με επίκληση του **7.33**, έστω $U_0 = (A_0, \leq_0)$ ένας $\leq_o$-ελάχιστος καλά διατεταγμένος χώρος με πεδίο στην $\mathcal{E}$. Αν $A \in \mathcal{E}$, τότε υπάρχει κάποια καλή διάταξη $\leq$ του A και από την επιλογή του U_0, $(A_0, \leq_0) \leq_o (A, \leq)$, και ειδικότερα $A_0 \leq_c A$ αφού κάθε αρχική ομοιότητα είναι μονομορφισμός. $\dashv$

9.11. Λήμμα. Ο επόμενος πληθάριθμος. *Για κάθε καλά διατάξιμο πληθάριθμο κ, ο πληθάριθμος*

$$\kappa^+ =_{\text{ορ}} |\chi(\kappa)| \tag{9-4}$$

είναι επίσης καλά διατάξιμος, και είναι ελάχιστος στους καλά διατάξιμους πληθαρίθμους μεγαλύτερους του κ, *δηλαδή*

$$\kappa <_c \kappa^+, \quad \kappa <_c \lambda \Longrightarrow \kappa^+ \leq_c \lambda, \tag{9-5}$$

για κάθε καλά διατάξιμο πληθάριθμο λ.

Απόδειξη. Ο κ^+ είναι καλά διατάξιμο σύνολο, επομένως συγκρίσιμο με το κ, και το Θεώρημα του Hartogs **7.34** αποκλείει την ανισότητα $\kappa^+ \leq_c \kappa$, άρα $\kappa <_c \kappa^+$. Η ελαχιστότητα του $\chi(\kappa)$ συνεπάγεται εύκολα τα υπόλοιπα. ⊣

Θέτουμε

$$\aleph_1 =_{\text{ορ}} \aleph_0{}^+, \ \aleph_2 =_{\text{ορ}} \aleph_1^+, \dots \ . \tag{9-6}$$

9.12. Άσκηση. (**AC**) *Εφόσον* (με το **AC**) *οι πληθάριθμοι είναι συγκρίσιμοι ανά δύο, η Υπόθεση του Συνεχούς* **CH** *και η Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς* **GCH** *μπορούν να εκφραστούν με απλές εξισώσεις της πληθικής αριθμητικής:*

$$\mathbf{CH} \iff 2^{\aleph_0} =_c \aleph_1, \quad \mathbf{GCH} \iff (\forall \kappa \geq_c \aleph_0)[2^\kappa =_c \kappa^+]. \tag{9-7}$$

Δυστυχώς αυτό δεν διευκολύνει τη λύση τους.

Σε επιχειρήματα για καλά διατάξιμα σύνολα, το εξής απλό Λήμμα είναι πολλές φορές χρήσιμο.

9.13. Ορισμός. Άριστη διάταξη (best wellordering) ενός συνόλου A είναι μια καλή διάταξη $\leq$ του A, της οποίας κάθε αρχικό τμήμα έχει πληθάριθμο μικρότερο του $|A|$,

$$(\forall x \in A)[\mathbf{seg}(x) <_c A].$$

9.14. Λήμμα. (1) *Κάθε καλά διατάξιμο σύνολο επιδέχεται άριστη διάταξη.*
(2) *Αν οι* $\leq_A$, $\leq_B$ *είναι άριστες διατάξεις των* A *και* B, *τότε*

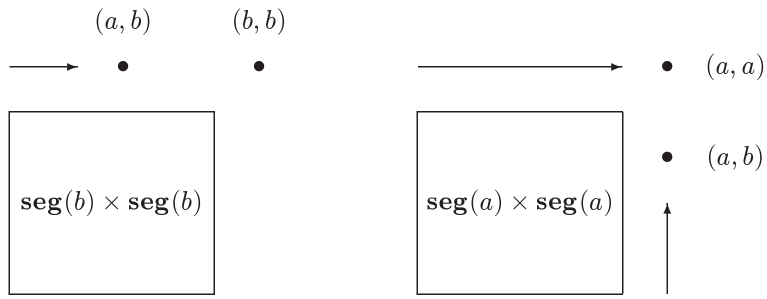
$$\textit{αν} \ \ A =_c B, \ \textit{τότε} \ \ (A, \leq_A) =_o (B, \leq_B).$$

Ειδικότερα, δύο άριστες διατάξεις του ίδιου συνόλου είναι όμοιες.

Απόδειξη. (1) Έστω $U = (A, \leq)$ κάποιος $\leq_o$-ελάχιστος χώρος στο σύνολο όλων των καλά διατεταγμένων χώρων με πεδίο A, και έστω (προς απαγωγή σε άτοπο) $x \in A$ τέτοιο που $A \leq_c \mathbf{seg}_U(x)$. Αυτό μας δίνει μονομορφισμό $\pi : A \rightarrowtail \mathbf{seg}_U(x)$ και η σχέση

$$u \leq' v \iff_{\text{ορ}} \pi(u) \leq \pi(v) \quad (u, v \in A)$$

είναι καλή διάταξη του A που είναι $\leq_o \mathbf{seg}_U(x)$ από το **7.32**, άρα $<_o U$, ενάντια στην επιλογή του U. (2) Υποθέτουμε ότι $U = (A, \leq_A)$, $V = (B, \leq_B)$ και (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $U =_o \mathbf{seg}_V(x)$ για κάποιο $x \in B$. Η ομοιότητα $\pi : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbf{seg}_V(x)$ φανερώνει ότι $A =_c \mathbf{seg}_V(x) <_c B$, που αντιτίθεται στην υπόθεση $A =_c B$. ⊣



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **9.2**. Αρχικά τμήματα της καλής διάταξης του Gödel.

Κάθε άριστη διάταξη απαριθμητού συνόλου είναι όμοια με τη φυσική διάταξη του $\mathbb{N}$, και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άριστες διατάξεις για να αποδείξουμε ότι πολλές ιδιότητες απαριθμητών συνόλων ισχύουν για όλα τα καλά διατάξιμα σύνολα. Τυπικό παράδειγμα είναι το επόμενο αποτέλεσμα, που γενικεύει την ταυτότητα ${\aleph_0}^2 =_c \aleph_0$ και δείχνει ότι η υπερπεπερασμένη πληθική αριθμητική των διμελών πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι τετριμμένη.

9.15. Λήμμα. *Για κάθε άπειρο και καλά διατάξιμο σύνολο C, $C \times C =_c C$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Δεχόμενοι το αντίθετο προς απαγωγή σε άτοπο, έστω C ένα $\leq_c$-ελάχιστο αντιπαράδειγμα από το **9.10**, και έστω $\leq$ άριστη διάταξη του C. Από την επιλογή του C, για κάθε άπειρο σημείο $x \in C$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{seg}(x)| + |\mathbf{seg}(x)| &=_c 2 \cdot |\mathbf{seg}(x)| \\ &\leq_c |\mathbf{seg}(x)| \cdot |\mathbf{seg}(x)| =_c \mathbf{seg}(x) <_c C. \end{aligned} \tag{9-8}$$

Το κρίσιμο βήμα στην απόδειξη είναι ο εξής ορισμός μιας νέας καλής διάταξης του γινομένου $C \times C$, του Gödel, που την έχουμε ήδη συναντήσει (κάπως μεταμφιεσμένη) στην απόδειξη του **5.32**. Θέτουμε:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \leq_g (x_2, y_2) \iff_{\text{ορ}} & [\max(x_1, y_1) < \max(x_2, y_2)] \\ & \vee[\max(x_1, y_1) = \max(x_2, y_2) \,\&\, x_1 < x_2] \\ & \vee[\max(x_1, y_1) = \max(x_2, y_2) \,\&\, x_1 = x_2 \\ & \qquad \& \, y_1 \leq y_2]. \end{aligned} \tag{9-9}$$

Τα μέγιστα (max) εδώ προφανώς υπολογίζονται στη διάταξη $\leq$.

Υπολήμμα. *Η σχέση $\leq_g$ είναι καλή διάταξη του $C \times C$.*

Απόδειξη. Η γραμμικότητα της $\leq_g$ είναι εύκολη υπόθεση. Για να δείξουμε ότι είναι καλή διάταξη, υποθέτουμε ότι το $X \subseteq C \times C$ είναι μη κενό: έστω w^* το $\leq$-ελάχιστο σημείο τέτοιο ώστε να υπάρχει κάποιο $(x, y) \in X$ με $\max(x, y) = w^*$· μετά έστω x^* το $\leq$-ελάχιστο, τέτοιο ώστε για κάποιο y, $(x^*, y) \in X$ και $\max(x^*, y) = w^*$· και τελικά έστω y^* το $\leq$-ελάχιστο τέτοιο ώστε $(x^*, y^*) \in X$, $\max(x^*, y^*) = w^*$. Έπεται ότι το (x^*, y^*) είναι το ελάχιστο του X.$\dashv$ (Υπολήμμα)

Οι καλά διατεταγμένοι χώροι $(C, \leq)$ και $(C \times C, \leq_g)$ είναι $\leq_o$-συγκρίσιμοι και από την επιλογή του $(C, \leq)$, δεν είναι δυνατό να έχουμε $(C \times C, \leq_g) \leq_o (C, \leq)$, άρα πρέπει να αληθεύει η $C <_o C \times C$· επομένως υπάρχει ζεύγος (a, b) μελών του C που ικανοποιούν την

$$(C, \leq) =_o \mathbf{seg}_{C \times C}((a, b)) = \mathbf{seg}_g((a, b)),$$

και θα φτάσουμε στο άτοπο που χρειαζόμαστε αν δείξουμε ότι το αρχικό τμήμα $\mathbf{seg}_g((a, b)) <_c C$. Θεωρούμε περιπτώσεις στις σχετικές θέσεις των a και b στην $\leq$, και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το σημείο $\max(a, b)$ πρέπει να είναι άπειρο στη διάταξη $\leq_g$.

Περιπτωση 1, $a = b$. Από τον ορισμό της διάταξης του Gödel,

$$(u, v) <_g (a, a) \iff [u < a \,\&\, v < a] \vee [u < a \,\&\, v = a] \vee [u = a \,\&\, v < a],$$

άρα

$$\mathbf{seg}_g((a, a)) = (\mathbf{seg}(a) \times \mathbf{seg}(a)) \cup (\mathbf{seg}(a) \times \{a\}) \cup (\{a\} \times \mathbf{seg}(a)),$$

και εφαρμόζοντας την (9-8) επανειλημμένα,

$$|\mathbf{seg}_g((a, a))| \leq_c |\mathbf{seg}(a)|^2 + |\mathbf{seg}(a)| \cdot 2 \leq_c |\mathbf{seg}(a)| \cdot 3 <_c C.$$

Περιπτωση 2, $a < b$. Τώρα $\max(a, b) = b$,

$$(u, v) <_g (a, b) \iff [u < b \,\&\, v < b] \vee [u < a \,\&\, v = b],$$

έτσι που $\mathbf{seg}((a, b)) = (\mathbf{seg}(b) \times \mathbf{seg}(b)) \cup (\mathbf{seg}(a) \times \{b\})$ και ένας παρόμοιος υπολογισμός δείχνει ξανά ότι $|\mathbf{seg}_g((a, b))| <_c C$.

Περιπτωση 3, $a > b$. Αυτή τη φορά

$$(u, v) <_g (a, b) \iff [u < a \,\&\, v < a] \vee [u < a \,\&\, v = a] \vee [u = a \,\&\, v < b],$$

από το οποίο φτάνουμε σε άτοπο με τον ίδιο τρόπο. ⊣

9.16. Θεώρημα (**Κανόνες απορρόφησης,** The Absorption Laws)**.** *Αν τουλάχιστον ένας από τους δύο πληθαρίθμους κ, λ είναι άπειρος και κανένας δεν είναι το 0, τότε*

$$\kappa + \lambda =_c \kappa \cdot \lambda =_c \max(\kappa, \lambda).$$

Αποδειξη. Δεχόμενοι ότι $0 <_c \kappa \leq_c \lambda$ και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα $\lambda \cdot \lambda =_c \lambda$ του Λήμματος, υπολογίζουμε:

$$\lambda \leq_c \kappa + \lambda \leq_c \kappa \cdot \lambda \leq_c \lambda \cdot \lambda =_c \lambda. \qquad \dashv$$

9.17. Πόρισμα. (**AC**) *Για κάθε οικογένεια συνόλων σε δείκτες $(i \mapsto \kappa_i)_{i \in I}$ και κάθε άπειρο κ, αν $|I| \leq_c \kappa$ και για κάθε $i \in I$, $\kappa_i \leq_c \kappa$, τότε $\sum_{i \in I} \kappa_i \leq_c \kappa$.*

Αποδειξη. Από το **AC** και την υπόθεση, επιλέγουμε για κάθε $i \in I$ κάποιο μονομορφισμό $\pi_i : \kappa_i \rightarrowtail \kappa$, έτσι ώστε η απεικόνιση $((i, x) \mapsto (i, \pi_i(x)))$ να είναι μονομορφισμός του $\{(i, x) \mid i \in I \,\&\, x \in \kappa_i\}$ στο $I \times \kappa$. Έτσι

$$\textstyle\sum_{i \in I} \kappa_i =_c \{(i, x) \mid i \in I \,\&\, x \in \kappa_i\} \leq_c |I \times \kappa| =_c |I| \cdot |\kappa| =_c \kappa. \qquad \dashv$$

Για να βρούμε ενδιαφέροντα προβλήματα και αποτελέσματα στην πληθική αριθμητική πρέπει να θεωρήσουμε τελεστές απείρων μεταβλητών, από τους οποίους οι απλούστεροι είναι οι εξής.

9.18. Λήμμα Πληθικού Ελάχιστου. *Υπάρχει οριστικός τελεστής* $\mathrm{inf}_c(\mathcal{E})$ *τέτοιος ώστε για κάθε μη κενή οικογένεια* $\mathcal{E}$ *από καλά διατάξιμα σύνολα, η τιμή* $\kappa = \mathrm{inf}_c(\mathcal{E})$ *ικανοποιεί τα εξής.*

(1) *Το* κ *είναι καλά διατάξιμος πληθάριθμος.*
(2) *Για κάποιο* $A \in \mathcal{E}$, $\kappa =_c A$.
(3) *Για κάθε* $B \in \mathcal{E}$, $\kappa \leq_c B$.

Επιπλέον, αυτές οι ιδιότητες καθορίζουν την τιμή $\mathrm{inf}_c(\mathcal{E})$ *μέχρι τη συνθήκη* $=_c$, *δηλαδή αν το* κ *είναι οποιοδήποτε σύνολο που ικανοποιεί τις* (1) – (3), *τότε* $\kappa =_c \mathrm{inf}_c(\mathcal{E})$.

Απόδειξη. Αν ο τελεστής πληθικότητας $|X|$ είναι ισχυρός κατά τον ορισμό **4.21**, τότε από το **9.10** υπάρχει ακριβώς ένας πληθάριθμος που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\mathrm{Least}(\mathcal{E}, \kappa) \iff (\exists A \in \mathcal{E})[(\forall B \in \mathcal{E})[A \leq_c B] \,\&\, \kappa = |A|],$$

και μπορούμε να ορίσουμε

$$\mathrm{inf}_c(\mathcal{E}) = \min(\mathcal{E}) = \text{το μοναδικό } \kappa \text{ τέτοιο ώστε } \mathrm{Least}(\mathcal{E}, \kappa).$$

Αυτό δεν αρκεί, επειδή δεχόμαστε μόνον ότι ο $|X|$ είναι ασθενής τελεστής πληθικότητας και μπορεί να υπάρχουν πολλές τιμές του κ που ικανοποιούν την $\mathrm{Least}(\mathcal{E}, \kappa)$.

Από το Λήμμα στην απόδειξη του Θεωρήματος Hartogs **7.34**, αν $A \subseteq \bigcup \mathcal{E}$ και η $\leq$ είναι καλή διάταξη του A, τότε ο χώρος $U = (A, \leq)$ είναι όμοιος με κάποιο γνήσιο αρχικό τμήμα του $W = \chi(\bigcup \mathcal{E})$, και επομένως κάθε $A \in \mathcal{E}$ είναι ισοπληθικό με κάποιο γνήσιο αρχικό τμήμα του W. Άρα μπορούμε να θέσουμε:

$$w =_{\text{ορ}} \text{το ελάχιστο } x \in W \text{ τέτοιο ώστε } (\exists A \in \mathcal{E})[A =_c \mathbf{seg}_W(x)],$$
$$\mathrm{inf}_c(\mathcal{E}) =_{\text{ορ}} |\mathbf{seg}_W(w)|.$$

Η επαλήθευση των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων του $\mathrm{inf}_c(\mathcal{E})$ είναι αρκετά εύκολη.⊣

9.19. Άσκηση. *Δείξτε το μέρος του Θεωρήματος που ακολουθεί το «επιπλέον».*

9.20. Λήμμα Πληθικού Ελάχιστου Άνω Φράγματος. *Υπάρχει οριστικός τελεστής* $\mathrm{sup}_c(\mathcal{E})$, *τέτοιος ώστε για κάθε μη κενή οικογένεια* $\mathcal{E}$ *από καλά διατάξιμα σύνολα, η τιμή* $\kappa = \mathrm{sup}_c(\mathcal{E})$ *ικανοποιεί τα εξής.*

(1) *Το* κ *είναι καλά διατάξιμος πληθάριθμος.*
(2) *Για κάθε* $A \in \mathcal{E}$, $A \leq_c \kappa$.
(3) *Αν το* B *είναι καλά διατάξιμο και για κάθε* $A \in \mathcal{E}$ $A \leq_c B$, *τότε* $\kappa \leq_c B$.

Επιπλέον, αυτές οι ιδιότητες καθορίζουν την τιμή $\mathrm{sup}_c(\mathcal{E})$ *μέχρι τη συνθήκη* $=_c$, *δηλαδή αν το* κ *είναι οποιοδήποτε σύνολο που ικανοποιεί τις* (1) – (3), *τότε* $\kappa =_c \mathrm{sup}_c(\mathcal{E})$.

Αποδειξη. Έστω $C = h(\bigcup\mathcal{E})$ το σύνολο Hartogs για την ένωση της οικογένειας $\mathcal{E}$, που από το Θεώρημα Hartogs **7.34** είναι καλά διατάξιμο και έχει μεγαλύτερη πληθικότητα από κάθε καλά διατάξιμο υποσύνολο του $\bigcup\mathcal{E}$, ανάμεσα στα οποία είναι και κάθε $A \in \mathcal{E}$. Θέτουμε

$$\sup_c(\mathcal{E}) =_{\text{ορ}} \inf_c(\{B \subseteq C \mid (\forall A \in \mathcal{E})[A \leq_c B]\}),$$

και επαληθεύουμε εύκολα τα συμπεράσματα του Λήμματος. ⊣

Άπειρα αθροίσματα και γινόμενα πληθαρίθμων έχουμε ήδη ορίσει στο **4.21**. Δεν μπορούμε να πούμε πολλά για αυτά, επειδή τα άπειρα αθροίσματα είναι τόσο τετριμμένα όσο και τα πεπερασμένα (Πρόβλημα **x9.15**), και τα άπειρα γινόμενα είναι τουλάχιστον τόσο πολύπλοκα όσο και η Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς αφού

$$2^\kappa =_c \prod_{i\in\kappa} 2.$$

Υπάρχει όμως μια ενδιαφέρουσα ανισότητα που συνδέει τα δύο.

9.21. Θεώρημα του König. (**AC**) *Για δύο οικογένειες συνόλων* $(i \mapsto A_i)$ *και* $(i \mapsto B_i)$ *με δείκτες στο ίδιο σύνολο* $I \neq \emptyset$,

$$\text{αν } (\forall i \in I)[A_i <_c B_i], \text{ τότε } \bigcup_{i\in I} A_i <_c \prod_{i\in I} B_i. \tag{9-10}$$

Ειδικότερα, για οικογένειες πληθαρίθμων $(i \mapsto \kappa_i)$ *και* $(i \mapsto \lambda_i)$,

$$\text{αν } (\forall i \in I)[\kappa_i <_c \lambda_i], \text{ τότε } \sum_{i\in I} \kappa_i <_c \prod_{i\in I} \lambda_i. \tag{9-11}$$

Αποδειξη. Από την υπόθεση και το **AC**, για κάθε i υπάρχει μονομορφισμός $\pi_i : A_i \rightarrowtail B_i$, και εφόσον ο π_i δεν μπορεί να είναι αντιστοιχία, υπάρχει συνάρτηση $c : I \to \bigcup_{i\in I} B_i$ τέτοια ώστε για κάθε i, $c(i) \in B_i \setminus \pi_i[A_i]$. Θέτουμε

$$f(x,i) = \begin{cases} \pi_i(x), & \text{αν } x \in A_i, \\ c(i), & \text{αν } x \notin A_i, \end{cases}$$
$$g(x) = (i \mapsto f(x,i)).$$

Αν $x \neq y$ και τα x, y ανήκουν στο ίδιο A_i για κάποιο i, τότε

$$g(x)(i) = \pi_i(x) \neq \pi_i(y) = g(y)(i),$$

επειδή η π_i είναι μονομορφισμός, και επομένως $g(x) \neq g(y)$. Αν δεν υπάρχει A_i που να περιέχει και το x και το y, έστω $x \in A_i$, $y \notin A_i$· συνεπώς $g(x)(i) = \pi_i(x) \in \pi_i[A_i]$ και $g(y)(i) = c(i) \in B_i \setminus \pi_i[A_i]$ έτσι ώστε και πάλι $g(x) \neq g(y)$. Συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $g : \bigcup_{i\in I} A_i \rightarrowtail \prod_{i\in I} B_i$ είναι μονομορφισμός, και επομένως

$$\bigcup_{i\in I} A_i \leq_c \prod_{i\in I} B_i.$$

Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω ότι υπάρχει αντιστοιχία

$$h : \bigcup_{i\in I} A_i \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \prod_{i\in I} B_i,$$

που φανερώνει ότι αυτά τα δύο σύνολα είναι ισοπληθικά. Για κάθε i, η συνάρτηση

$$h_i(x) =_{\text{ορ}} h(x)(i) \quad (x \in A_i)$$

είναι (εύκολα) συνάρτηση από το A_i στο B_i και από την υπόθεση δεν μπορεί να είναι επιμορφισμός· επομένως από το **AC** υπάρχει συνάρτηση ε που επιλέγει από κάθε B_i κάποιο στοιχείο που δεν ανήκει στην εικόνα, δηλαδή

$$\varepsilon(i) \in B_i \setminus h_i[A_i], \quad (i \in I).$$

Από τον ορισμό της, $\varepsilon \in \prod_{i\in I} B_i$, άρα πρέπει να υπάρχει στοιχείο $x \in A_j$, για κάποιο j, έτσι ώστε $h(x) = \varepsilon$· αυτό μας δίνει

$$\varepsilon(j) = h(x)(j) = h_j(x) \in h_j[A_j],$$

ενάντια στη χαρακτηριστική ιδιότητα της ε.

Η πληθική εκδοχή (9-11) προκύπτει με εφαρμογή της (9-10) στα $A_i = \{i\} \times \kappa_i$ και $B_i = \lambda_i$. ⊣

9.22. Άσκηση. (**AC**) *Το Θεώρημα του König εφαρμόζεται στα δεδομένα $I = \kappa$, $A_i = \{i\}$ και $B_i = 2$ και αποδίδει*

$$\kappa = \bigcup_{i\in\kappa}\{i\} <_c \prod_{i\in\kappa} 2 =_c 2^\kappa,$$

δηλαδή το Θεώρημα του Cantor.

Παρά την απλότητά του, το Θεώρημα του König συνεπάγεται άμεσα μια μη τετριμμένη ανισότητα για τον πληθικό $\mathfrak{c}$ του συνεχούς, πέραν της $\aleph_0 <_c \mathfrak{c}$. Για τη διατύπωσή της θα χρησιμοποιήσουμε *ομοτελικότητες*.

9.23. Ορισμός. Η **ομοτελικότητα** (cofinality) ενός καλά διατάξιμου, άπειρου πληθαρίθμου κ είναι ο ελάχιστος καλά διατάξιμος πληθάριθμος λ τέτοιος ώστε το κ να είναι η ένωση λ συνόλων μικρότερων σε πληθικότητα από το κ:

$$\begin{aligned}\mathrm{cf}(\kappa) =_{\mathrm{op}} \inf\nolimits_c(\{I \subseteq \kappa \mid &\text{ για κάποια οικογένεια } (i \mapsto K_i)_{i\in I},\\ &(\forall i \in I)[K_i <_c \kappa] \,\&\, \kappa = \textstyle\bigcup_{i\in I} K_i\}).\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι η οικογένεια καλά διατάξιμων συνόλων δεικτών της οποίας υπολογίζουμε το $\inf_c$ δεν είναι κενή, μάλιστα περιέχει τον κ αφού

$$\kappa = \bigcup_{i\in\kappa}\{i\}. \tag{9-12}$$

Οι γενικές ιδιότητες του $\inf_c$ συνεπάγονται τις εξής, βασικές ιδιότητες του τελεστή ομοτελικότητας:

(1) $\mathrm{cf}(\kappa) \leq_c \kappa$.
(2) $\kappa = \bigcup_{i\in\mathrm{cf}(\kappa)} K_i$ για κάποια οικογένεια συνόλων $(i \mapsto K_i)$ τέτοια ώστε $(\forall i \in \mathrm{cf}(\kappa))[K_i <_c \kappa]$.
(3) Αν ο λ είναι καλά διατάξιμος πληθάριθμος, αν $(\forall i \in \lambda)[L_i <_c \kappa]$ και αν $\kappa = \bigcup_{i\in\lambda} L_i$, τότε $\mathrm{cf}(\kappa) \leq_c \lambda$.

Αυτές οι ιδιότητες, επιπλέον, χαρακτηρίζουν τον πληθάριθμο $\mathrm{cf}(\kappa)$ μέχρι τη συνθήκη $=_c$.

Ένας καλά διατάξιμος, άπειρος πληθάριθμος κ είναι **κανονικός** (regular) *αν* $\mathrm{cf}(\kappa) =_c \kappa$, *αλλιώς είναι* **ιδιάζων** (singular). Είναι χρήσιμο να ορίσουμε τον τελεστή ομοτελικότητας $\mathrm{cf}(\kappa)$ και τη συνθήκη της κανονικότητας για κάθε καλά διατάξιμο πληθάριθμο κ χωρίς να αποδεχτούμε γενικά το πλήρες Αξίωμα

Επιλογής, αλλά τα περισσότερα αποτελέσματα γι' αυτές τις έννοιες στηρίζονται στο **AC**.

9.24. Άσκηση. *Ο $\aleph_0$ είναι κανονικός, επειδή κάθε πεπερασμένο άθροισμα πεπερασμένων πληθαρίθμων είναι πεπερασμένο.*

9.25. Πόρισμα. (**AC**) *Για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ,*

$$\mathrm{cf}(2^\kappa) >_c \kappa,$$

και ειδικότερα $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) >_c \aleph_0$, δηλαδή δεν εκφράζεται το συνεχές $\mathfrak{c}$ ως απαριθμητή ένωση συνόλων με πληθικότητα $<_c \mathfrak{c}$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα του König, αν $K_i <_c 2^\kappa$ για κάθε $i \in \lambda$ με $\lambda \leq_c \kappa$, τότε

$$\bigcup_{i\in\lambda} K_i <_c \prod_{i\in\lambda} 2^\kappa =_c (2^\kappa)^\lambda =_c 2^{\kappa\cdot\lambda} =_c 2^\kappa,$$

που αντιτίθεται στο $\mathrm{cf}(2^\kappa) \leq_c \kappa$. $\dashv$

9.26. Το πρότυπο L των κατασκευάσιμων συνόλων του Gödel ικανοποιεί τη Γενικευμένη Υπόθεση Συνεχούς, και επομένως για κάθε κ, $2^\kappa =_c \kappa^+$ είναι κανονικός από το Πρόβλημα **x9.19**. Με τη μέθοδο του αναγκασμού του Cohen, μπορούν να κατασκευαστούν πρότυπα της θεωρίας του Zermelo $\mathbf{ZDC} + \mathbf{AC}$ στα οποία ο $\mathfrak{c}$ είναι ιδιάζων, με ομοτελικότητα $\mathrm{cf}(\mathfrak{c})$ οποιονδήποτε κανονικό πληθάριθμο μεταξύ των $\aleph_0$ και $\mathfrak{c}$, για παράδειγμα τον $\aleph_1$.

Τα βασικά αποτελέσματα για ομοτελικότητες είναι πολύ απλά και τα έχουμε αφήσει για προβλήματα. Πρέπει όμως να παρατηρήσουμε ότι δεν είναι δυνατό να μελετήσουμε το θέμα σοβαρά τώρα, επειδή χωρίς το Αξίωμα Αντικατάστασης δεν μπορούμε καν να αποδείξουμε ότι *υπάρχουν* ιδιάζοντες πληθάριθμοι!

Προβλήματα για το Κεφάλαιο 9

* **x9.1.** Δείξε το Θεώρημα **9.1** επικαλούμενος μόνο τα κατασκευαστικά αξιώματα (**I**) – (**VI**) και την Αρχή Απαριθμητής Επιλογής $\mathbf{AC}_\mathbb{N}$.

x9.2. Θεωρούμε σύστημα αεροπορικών συγκοινωνιών που ενώνει τις πόλεις (ίσως άπειρες το πλήθος) ενός κόσμου και δεχόμαστε τα εξής. (1) Από κάθε πόλη, υπάρχει μόνο πεπερασμένος αριθμός κατευθείαν πτήσεων σε άλλες πόλεις. (2) Μπορεί κανείς να ταξιδέψει αεροπορικά από κάθε πόλη σε κάθε άλλη. (3) Δεν είναι δυνατό να ταξιδεύει κανείς για πάντα, χωρίς να επισκεφθεί το ίδιο αεροδρόμιο δύο φορές. Δείξε ότι το σύνολο πόλεων σ' αυτό τον κόσμο είναι πεπερασμένο.

x9.3. Δείξε το Λήμμα του König **9.7** στην περίπτωση που το T είναι δέντρο σε καλά διατάξιμο σύνολο E χωρίς επίκληση αρχών επιλογής.

* **x9.4.** Δείξε το Λήμμα του König **9.7** χρησιμοποιώντας μόνο τα κατασκευαστικά αξιώματα (**I**) – (**VI**) και την Αρχή Απαριθμητής Επιλογής $\mathbf{AC}_\mathbb{N}$.

x9.5. Έστω T δέντρο πεπερασμένης διακλάδωσης και B φράχτης του T. Δείξε ότι υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός k, τέτοιος ώστε για κάθε άπειρο κλαδί $f \in [T]$, $\overline{f}(i) \in B$, για κάποιο $i \leq k$.

* **x9.6.** Έστω καλά διατάξιμο σύνολο C και συνάρτηση $f : C \times C \to C$, $A \subseteq C$, και έστω

$$A_f =_{\text{ορ}} \bigcap \{X \subseteq C \mid A \subseteq X \,\&\, f[X \times X] \subseteq X\}$$

η **κλειστότητα** (closure) του A για την f. Όρισε τα σύνολα $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με την αναδρομή

$$A_0 = A, \quad A_{n+1} = A_n \cup f[A_n \times A_n],$$

και δείξε ότι

$$A_f = \bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Δείξε επίσης ότι αν το A είναι άπειρο, τότε $A_f =_c A$.

x9.7. Δείξε ότι αν το C είναι καλά διατάξιμο, τότε καλά διατάξιμο είναι και το σύνολο C^* όλων των λέξεων (πεπερασμένων ακολουθιών) από το C.

x9.8. Αν χρησιμοποίησες το $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ ή το **DC** στα Προβλήματα **x9.6** και **x9.7**, να βρεις άλλες λύσεις που δεν επικαλούνται καμιά αρχή επιλογής.

x9.9. Κάθε σύνολο Hartogs $h(A)$ είναι άριστα διατεταγμένο από την $\leq_{\chi(A)}$.

x9.10. Αν οι $(n \mapsto \kappa_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(n \mapsto \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθίες πληθαρίθμων και για κάθε n, $\kappa_n \leq_c \lambda_n$, τότε

$$\sum\nolimits_{n \in \mathbb{N}} \kappa_n \leq_c \sum\nolimits_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n, \qquad \prod\nolimits_{n \in \mathbb{N}} \kappa_n \leq_c \prod\nolimits_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n.$$

x9.11. (**AC**) Αν οι $(i \mapsto \kappa_i)_{i \in I}$ και $(i \mapsto \lambda_i)_{i \in I}$ είναι οικογένειες πληθαρίθμων στο ίδιο σύνολο δεικτών I και για κάθε $i \in I$, $\kappa_i \leq_c \lambda_i$, τότε

$$\sum\nolimits_{i \in I} \kappa_i \leq_c \sum\nolimits_{i \in I} \lambda_i, \ \prod\nolimits_{i \in I} \kappa_i \leq_c \prod\nolimits_{i \in I} \lambda_i.$$

x9.12. (**AC**) Για κάθε οικογένεια συνόλων σε δείκτες $(i \mapsto A_i)_{i \in I}$,

$$|\prod\nolimits_{i \in I} A_i| =_c \prod\nolimits_{i \in I} |A_i|$$

και το ίδιο για αθροίσματα, με «ξένη ένωση» στα αριστερά.

x9.13. Εξήγησε το συμβολισμό και δείξε την ταυτότητα

$$\prod\nolimits_{i \in I} \prod\nolimits_{j \in J(i)} \kappa_{ij} =_c \prod\nolimits_{\{(i,j) \mid i \in I \,\&\, j \in J(i)\}} \kappa_{ij}.$$

x9.14. (**AC**) Δείξε το χαρακτηρισμό του $\sup_c \mathcal{E}$ στο **9.20**.

x9.15. (**AC**) Για κάθε οικογένεια απείρων πληθαρίθμων $(i \mapsto \kappa_i)$ στο μη κενό σύνολο δεικτών I,

$$\sum\nolimits_{i \in I} \kappa_i =_c \max(|I|, \sup_c\{\kappa_i \mid i \in I\}).$$

x9.16. Δείξε ότι για κάθε άπειρο, καλά διατάξιμο πληθάριθμο κ,

$$\begin{aligned}\mathrm{cf}(\kappa) = \inf_c\Big(\big\{I \subseteq \kappa \mid & \text{ για κάποια οικογένεια } (i \mapsto K_i')_{i\in I},\\ & (\forall i,j \in I)[i \neq j \Longrightarrow K_i' \cap K_j' = \emptyset] \,\&\, (\forall i \in I)[K_i' <_c \kappa]\\ & \qquad \& \, \kappa = \textstyle\bigcup_{i\in I} K_i'\big\}\Big).\end{aligned}$$

*x9.17.** (**AC**) Δείξε ότι για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ,

$$\begin{aligned}\mathrm{cf}(\kappa) = \inf_c\Big(\big\{I \subseteq \kappa \mid & \text{ για κάποια οικογένεια πληθαρίθμων } (i \mapsto \kappa_i)_{i\in I},\\ & (\forall i \in I)[\kappa_i <_c \kappa] \,\&\, \kappa =_c \textstyle\sum_{i\in I}\kappa_i\big\}\Big).\end{aligned}$$

Υποδειξη. Χρησιμοποίησε το Πρόβλημα **x9.16**.

*x9.18.** Δείξε ότι για κάθε άπειρο κ, $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\kappa)) =_c \mathrm{cf}(\kappa)$, και επομένως ο $\mathrm{cf}(\kappa)$ είναι πάντα κανονικός πληθάριθμος.

x9.19. (**AC**) Για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ, ο επόμενος πληθάριθμος κ^+ είναι κανονικός. Υποδειξη. Το Πρόβλημα **x9.17** απλοποιεί την απόδειξη.

x9.20. (**AC**) Δείξε ότι για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ, $\kappa <_c \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

*x9.21.** (**AC**) Κάθε μερική διάταξη $\leq$ σε τυχόν σύνολο P επιδέχεται **γραμμικοποίηση** (linearization), δηλαδή υπάρχει κάποια γραμμική διάταξη $\leq'$ του P τέτοια ώστε $x \leq y \Longrightarrow x \leq' y$.

Το επόμενο πρόβλημα μας δίνει το βασικό γεγονός που συσχετίζει επαγωγικούς και κατευθυνόμενα πλήρεις μερικά διατεταγμένους χώρους. Πρόσεξε ότι «αλυσίδα» στον μερικά διατεταγμένο χώρο P είναι το τυχόν υποσύνολο $C \subseteq P$ που είναι γραμμικά διατεταγμένο από τη μερική διάταξη $\leq_P$· το C είναι *καλά διατεταγμένη αλυσίδα* αν επιπλέον ο περιορισμός της $\leq_P$ στο C είναι καλή διάταξη. Όταν υποθέτουμε ότι «το S είναι καλά διατάξιμο» για κάποιο $S \subseteq P$, εννοούμε ότι το S *επιδέχεται κάποια καλή διάταξη* $\leq$, η οποία όμως μπορεί να μην έχει καμία σχέση (και συνήθως δεν έχει) με τη δοσμένη μερική διάταξη $\leq_P$ του P.

*x9.22.** Αν κάθε καλά διατεταγμένη αλυσίδα στον μερικά διατεταγμένο χώρο $(P, \leq_P)$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα, τότε για κάθε καλά διατάξιμο, κατευθυνόμενο υποσύνολο S του P υπάρχει καλά διατεταγμένη αλυσίδα C με τις εξής δύο ιδιότητες:

(1) Το σύνολο S είναι «φραγμένο» από το C, δηλαδή για κάθε $x \in S$ υπάρχει κάποιο $y \in C$ τέτοιο ώστε $x \leq_P y$.

(2) Για κάθε $y \in C$, υπάρχει κατευθυνόμενο υποσύνολο $C_y \subseteq S$, τέτοιο ώστε $|C_y| <_c |S|$ και $y = \sup C_y$.

Παρατηρούμε ότι το C μπορεί να έχει αυτές τις ιδιότητες χωρίς απαραίτητα να είναι υποσύνολο του S. Υποδειξη (W. Allen). Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω

S καλά διατάξιμο, κατευθυνόμενο και $\leq_c$-ελάχιστο αντιπαράδειγμα του συμπεράσματος, και δείξε πρώτα ότι το S είναι αναπαρίθμητο. Έστω $\leq$ άριστη διάταξη του S και έστω $f : S \times S \to S$ συνάρτηση τέτοια ώστε $x, y \in S \Longrightarrow x, y \leq_P f(x,y)$. Για κάθε $x \in S$, θέτουμε

$$C_x =_{\text{ορ}} \mathbf{seg}(x)_f,$$

με το συμβολισμό του Προβλήματος **x9.6**. Δείξε ότι αυτό είναι κατευθυνόμενο, ότι το $\sup C_x$ υπάρχει για κάθε $x \in S$, και ότι το

$$C =_{\text{ορ}} \{\sup C_x \mid x \in S\}$$

είναι καλά διατεταγμένη αλυσίδα στον P που έχει τις ιδιότητες (1) και (2) για το S.

* **x9.23.** (**AC**) Για κάθε μερικά διατεταγμένο χώρο P, οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(1) Κάθε κατευθυνόμενο σύνολο του P έχει ελάχιστο άνω φράγμα.
(2) Κάθε αλυσίδα στο P έχει ελάχιστο, άνω φράγμα.
(3) Κάθε καλά διατεταγμένη αλυσίδα στο P έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Ειδικότερα: (**AC**) *Ένας μερικά διατεταγμένος χώρος είναι επαγωγικός αν και μόνον αν είναι πλήρης κατά κατεύθυνση* (dcpo).

* **x9.24.** (**AC**) Έστω $\pi : P \to Q$ μονοτονική απεικόνιση από έναν επαγωγικό χώρο σε κάποιον άλλο. Δείξε ότι η π ικανοποιεί την εξίσωση

$$\pi(\sup S) = \sup \pi[S] \tag{9-13}$$

για κάθε μη κενή αλυσίδα $S \subseteq P$, αν και μόνον αν ικανοποιεί την (9-13) για κάθε μη κενό, κατευθυνόμενο $S \subseteq P$.

x9.25. Δείξε ότι ο χαρακτηρισμός της ιδιότητας της συνέχειας για απεικονίσεις της μορφής $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$ του **x6.24** ισχύει για όλα τα σύνολα A, E, B, M.

x9.26. (**AC**) **Λήμμα Πεπερασμένης Βάσης**. Έστω μη κενή οικογένεια $\mathcal{I}$ υποσυνόλων κάποιου συνόλου V, τέτοια ώστε

$$X \in \mathcal{I} \iff (\forall Y \subseteq X)[Y \text{ πεπερασμένο} \Longrightarrow Y \in \mathcal{I}].$$

Δείξε ότι η $\mathcal{I}$ έχει μεγιστικό μέλος (κατά την $\subseteq$).

* **x9.27.** Έστω οικογένεια $\mathcal{I}$ με πεπερασμένη βάση όπως στο **x9.26** και δέξου επιπλέον ότι το V είναι καλά διατάξιμο· δείξε (χωρίς το **AC**) ότι η $\mathcal{I}$ έχει μεγιστικό μέλος.

x9.28. (**AC**) Αν ξέρεις τι θα πει *διανυσματικός χώρος* και τις βασικές ιδιότητες *γραμμικής ανεξαρτησίας*, δείξε ότι κάθε διανυσματικός χώρος έχει βάση. Δείξε επίσης, χωρίς το **AC**, ότι κάθε καλά διατάξιμος διανυσματικός χώρος έχει βάση. Υπόδειξη. Εφάρμοσε το **x9.26** ή το **x9.27** στην οικογένεια όλων των γραμμικά ανεξάρτητων συνόλων του διανυσματικού χώρου.

***x9.29.** (**AC**) Αν ξέρεις μερικά πράγματα για σώματα και αλγεβρικές επεκτάσεις, δείξε ότι κάθε σώμα έχει αλγεβρική κλειστότητα. Υποδειξη. Η συνηθισμένη απόδειξη γι' αυτό είναι κάπως έτσι. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} =_{\text{ορ}} \{F \mid F \text{ είναι αλγεβρική επέκταση του } K\} \tag{9-14}$$

μερικά διατεταγμένη από την

$$F_1 \sqsubseteq F_2 \iff_{\text{ορ}} F_1 \text{ είναι υποσώμα του } F_2,$$

παρατηρούμε ότι είναι επαγωγικός χώρος και επομένως έχει μεγιστικό στοιχείο $\overline{K}$, και επαληθεύουμε ότι αυτό το $\overline{K}$ είναι αλγεβρικά κλειστό. Το επιχείρημα δεν είναι σωστό, επειδή η κλάση $\mathcal{A}$ στην (9-14) δεν είναι σύνολο. Για να το επιδιορθώσουμε, στην ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου το K είναι άπειρο, παρατηρούμε ότι *κάθε αλγεβρική επέκταση του K είναι ισομορφική με κάποιο σώμα $F =_c K$*. Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την οικογένεια $\mathcal{A}$ του (9-14) με την

$$\mathcal{A}' =_{\text{ορ}} \{F \subseteq E \mid \text{το } F \text{ είναι αλγεβρική επέκταση του } K\}, \tag{9-15}$$

όπου το E είναι κάποιο υπερσύνολο του K, πολυπληθέστερο του K.

***x9.30.** Δείξε ότι κάθε καλά διατάξιμο σώμα (και επομένως κάθε αριθμήσιμο σώμα) έχει αλγεβρική κλειστότητα. Υποδειξη. Η ιδέα είναι να αποφύγουμε το **AC** ορίζοντας την αλγεβρική κλειστότητα κατευθείαν με Υπερπεπερασμένη Αναδρομή. Το τέχνασμα στο προηγούμενο Πρόβλημα δεν μπορεί να αποφευχθεί. Να κατεργαστείς πρώτα την αριθμήσιμη περίπτωση, που φανερώνει ποια αλγεβρικά αποτελέσματα θα χρειαστείς.