ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Συνόλων

Ενότητα: Οι φυσικοί αριθμοί

Γιάννης Μοσχοβάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Σημειώματα

Σημειώμα ιστορικού εκδόσεων έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1. Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη στο σύνδεσμο http://www.math.ucla.edu/ ynm/lectures/g.pdf

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα αδειοδότησης

Διατήρηση σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Η βασική διαισθητική κατανόηση που έχουμε για τους φυσικούς αριθμούς είναι ότι υπάρχει ένας (ελάχιστος) αριθμός 0, ότι κάθε αριθμός n έχει έναν (αμέσως) επόμενο Sn, και ότι αν ξεκινήσουμε με το 0 και κατασκευάσουμε διαδοχικά τον επόμενο του κάθε αριθμού

$$0,\ S0 = 1,\ S1 = 2,\ S2 = 3,\ \ldots$$

επ' άπειρον, τότε θα απαριθμήσουμε όλους τους φυσικούς αριθμούς. Στο πλαίσιο της συνολοθεωρίας, αυτή η διαίσθηση εκφράζεται από τον εξής αξιωματικό ορισμό:

5.1. Ορισμός. **Σύστημα Peano** ή **σύστημα φυσικών αριθμών** είναι ένα δομημένο σύνολο

$$(\mathbb{N}, 0, S) = (\mathbb{N}, (0, S))$$

που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες.

1. Το $\mathbb{N}$ είναι σύνολο που περιέχει το στοιχείο 0, $0 \in \mathbb{N}$.
2. Η S είναι συνάρτηση στο $\mathbb{N}$, $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
3. Η S είναι μονομορφισμός, $Sn = Sm \Longrightarrow n = m$.
4. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $Sn \neq 0$.
5. **Αρχή Επαγωγής** (Induction Principle). Για κάθε $X \subseteq \mathbb{N}$,

$$[0 \in X \,\&\, (\forall n \in \mathbb{N})[n \in X \Longrightarrow Sn \in X]] \Longrightarrow X = \mathbb{N}.$$

Οι προφανείς αυτές ιδιότητες των αριθμών καλούνται **αξιώματα του Peano**, προς τιμήν του Ιταλού λογικού και μαθηματικού που πρώτος τα πρότεινε σαν αξιωματική βάση για τη θεωρία αριθμών. Το πιο σημαντικό από αυτά είναι η Αρχή Επαγωγής, που χρησιμοποιείται χαρακτηριστικά στο επόμενο λήμμα.

5.2. Λήμμα. *Σε ένα σύστημα φυσικών αριθμών* $(\mathbb{N}, 0, S)$, *κάθε στοιχείο* $n \neq 0$ *είναι επόμενος,*

$$\textit{αν}\ \ n \neq 0,\ \ \textit{τότε}\ \ (\exists m \in \mathbb{N})[n = Sm],$$

και για κάθε n, $Sn \neq n$.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την πρώτη πρόταση με την Αρχή Επαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 0 \vee (\exists m \in \mathbb{N})[n = Sm]\}$$

ικανοποιεί τις συνθήκες

$$0 \in X, \quad (\forall n \in \mathbb{N})[n \in X \Longrightarrow Sn \in X],$$

που είναι και οι δύο προφανείς από τον ορισμό του X. Με τον ίδιο τρόπο, για τη δεύτερη πρόταση αρκεί να επαληθεύσουμε ότι $S0 \neq 0$ (που ισχύει επειδή γενικά, $Sn \neq 0$) και ότι $Sn \neq n \Longrightarrow SSn \neq Sn$: αυτό ισχύει επειδή η S είναι ένα-προς-ένα, έτσι που $SSn = Sn \Longrightarrow Sn = n$. $\dashv$

Δεν είναι βέβαια προφανές ότι η αριθμοθεωρία, ένας από τους πιο πλούσιους και αναπτυγμένους κλάδους των μαθηματικών, μπορεί να οικοδομηθεί με βάση αυτά τα πέντε απλά αξιώματα, και πράγματι δεν φτάνουν, χρειάζεται και η θεωρία συνόλων που (στη διαισθητική της μορφή) ο Peano τη θεωρούσε δεδομένη, σαν μέρος της «λογικής». Θα δείξουμε εδώ ότι τα αξιώματα πράγματι συνεπάγονται τουλάχιστον τις πρώτες βασικές ιδιότητες (αυτές που χρειαζόμαστε) της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της διάταξης των αριθμών. Επιπλέον, οι αποδείξεις που θα δώσουμε είναι χαρακτηριστικά δείγματα της χρήσης των αξιωμάτων στα πιο προχωρημένα μέρη της θεωρίας αριθμών.

Αν η αριθμοθεωρία μπορεί να θεμελιωθεί με βάση τα αξιώματα του Peano, τότε για να την απεικονίσουμε πιστά στη θεωρία συνόλων αρκεί να αποδείξουμε τα επόμενα δύο θεωρήματα.

5.3. Θεώρημα (Ύπαρξη των φυσικών αριθμών). *Υπάρχει τουλάχιστον ένα σύστημα Peano* $(\mathbb{N}, 0, S)$.

5.4. Θεώρημα (Μοναδικότητα των φυσικών αριθμών). *Αν τα* $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ *και* $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ *είναι συστήματα Peano, τότε υπάρχει ακριβώς μία αντιστοιχία*

$$\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}_2$$

που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \pi(0_1) &= 0_2, \\ \pi(S_1 n) &= S_2 \pi(n), \quad (n \in \mathbb{N}_1). \end{aligned}$$

Μια αντιστοιχία π που ικανοποιεί αυτές τις εξισώσεις λέγεται **ισομορφισμός** του $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ με το $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$, δηλαδή συνοπτικά το θεώρημα βεβαιώνει ότι *όλα τα συστήματα Peano είναι (με μοναδικό τρόπο) ισομορφικά ανά δύο.*

Το Θεώρημα Ύπαρξης είναι πολύ απλό και θα το αποδείξουμε αμέσως.

5.5. Απόδειξη της ύπαρξης των φυσικών αριθμών, 5.3. Από το Αξίωμα Απείρου (**VI**) ξέρουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο I τέτοιο ώστε

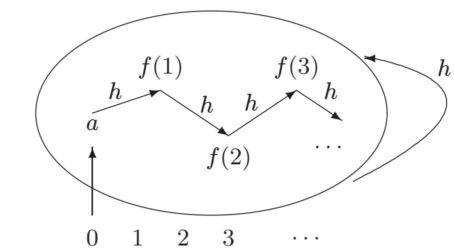
$$\begin{gathered} \emptyset \in I, \\ (\forall n)[n \in I \Longrightarrow \{n\} \in I]. \end{gathered}$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το I, ορίζουμε πρώτα την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq I \mid \emptyset \in X \,\&\, (\forall n)[n \in X \Longrightarrow \{n\} \in X]\}$$

έτσι ώστε προφανώς $I \in \mathcal{I}$, και θέτουμε

$$\mathbb{N} = \bigcap \mathcal{I}, \quad 0 = \emptyset, \quad S = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = \{n\}\}.$$



Διαγραμμα **5.1**. Το Θεώρημα Αναδρομής.

Για να τελειώσουμε την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι αυτή η τριάδα $(\mathbb{N}, 0, S)$ είναι σύστημα Peano. Καταρχήν $\mathbb{N} \in \mathcal{I}$, επειδή $X \in \mathcal{I} \Longrightarrow \emptyset \in X$ και επομένως $\emptyset \in \bigcap \mathcal{I} = \mathbb{N}$ και με τον ίδιο συλλογισμό,

$$n \in \mathbb{N} \Longrightarrow (\forall X \in \mathcal{I})[n \in X] \Longrightarrow (\forall X \in \mathcal{I})[\{n\} \in X] \Longrightarrow \{n\} \in \mathbb{N}.$$

Αυτό συνεπάγεται αμέσως τα πρώτα δύο αξιώματα του Peano, τα επόμενα δύο αληθεύουν επειδή (γενικά, για όλα τα n, m) $\{n\} = \{m\} \Longrightarrow n = m$ και $\{n\} \neq \emptyset$, και η Αρχή Επαγωγής έπεται αμέσως από τον ορισμό του $\mathbb{N}$ σαν τομή. $\dashv$

Η απόδειξη του Θεωρήματος Μοναδικότητας **5.4** στηρίζεται στο εξής θεμελιακό θεώρημα της αξιωματικής αριθμοθεωρίας.

5.6. Θεώρημα Αναδρομής. *Ας υποθέσουμε ότι το* $(\mathbb{N}, 0, S)$ *είναι σύστημα Peano, το* E *είναι σύνολο,* $a \in E$, *και η* $h : E \to E$ *είναι συνάρτηση: υπάρχει τότε μία και μόνο μία συνάρτηση* $f : \mathbb{N} \to E$ *που ικανοποιεί τις ταυτότητες*

$$\begin{aligned} f(0) &= a, \\ f(Sn) &= h(f(n)) \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Το Θεώρημα Αναδρομής δικαιολογεί τον συνηθισμένο τρόπο με τον οποίο ορίζουμε συναρτήσεις στους φυσικούς αριθμούς **αναδρομικά**[11] (ή επαγωγικά): δηλαδή για να ορίσουμε την $f : \mathbb{N} \to E$, προσδιορίζουμε απαρχής την τιμή $f(0) = a$ και δίνουμε μια συνάρτηση $h : E \to E$ που προσδιορίζει την τιμή $f(Sn)$ της f σε κάθε επόμενο αριθμό Sn από την τιμή $f(n)$ της f στον προηγούμενό του n: $f(Sn) = h(f(n))$. Η διαισθητική κατανόηση των φυσικών αριθμών που περιγράψαμε πιο πάνω προφανώς δικαιολογεί τέτοιους ορισμούς, και επομένως πρέπει να τους δικαιολογήσουμε και στην αξιωματική αριθμοθεωρία.

Πριν αποδείξουμε το Θεώρημα Αναδρομής θα το χρησιμοποιήσουμε στην επόμενη απόδειξη που είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα της χρήσης του.

[11] Οι λέξεις «αναδρομή» και «επαγωγή» πολλές φορές χρησιμοποιούνται συνώνυμα στα μαθηματικά. Εδώ θα ακολουθήσουμε την πιο σύγχρονη χρήση των όρων που διαχωρίζει **αναδρομικούς ορισμούς** από **επαγωγικές αποδείξεις**.

5.7. Απόδειξη της μοναδικότητας των φυσικών αριθμών, 5.4. Υποθέτουμε ότι τα $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ είναι συστήματα Peano. *Από το Θεώρημα Αναδρομής στο* $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ με $E = \mathbb{N}_2$, $a = 0_2$, $h = S_2$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \pi(0_1) &= 0_2, \\ \pi(S_1 n) &= S_2 \pi(n) \quad (n \in \mathbb{N}_1), \end{aligned}$$

και υπολείπεται μόνο να αποδείξουμε ότι αυτή η π είναι (ένα-προς-ένα) αντιστοιχία.

(1) **Η π είναι επιμορφισμός**, $\pi : \mathbb{N}_1 \twoheadrightarrow \mathbb{N}_2$. Προφανώς $0_2 \in \pi[\mathbb{N}_1]$ αφού $0_2 = \pi(0_1)$, και

$$\begin{aligned} m \in \pi[\mathbb{N}_1] &\Longrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}_1)[m = \pi(n)] \\ &\Longrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}_1)[S_2 m = S_2 \pi(n) = \pi(S_1 n)] \\ &\Longrightarrow S_2 m \in \pi[\mathbb{N}_1], \end{aligned}$$

συνεπώς, από *την Αρχή Επαγωγής στο* $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$, $\pi[\mathbb{N}_1] = \mathbb{N}_2$.

(2) **Η π είναι μονομορφισμός**, $\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail \mathbb{N}_2$. Αρκεί να ελέγξουμε ότι αν θέσουμε

$$X = \{n \in \mathbb{N}_1 \mid (\forall m \in \mathbb{N}_1)[\pi(m) = \pi(n) \Longrightarrow m = n]\},$$

τότε

$$0_1 \in X, \quad n \in X \Longrightarrow S_1 n \in X,$$

γιατί μαζί με *την Αρχή Επαγωγής στο* $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$, οι προτάσεις αυτές συνεπάγονται ότι $X = \mathbb{N}_1$, δηλαδή ότι η π είναι μονομορφισμός. Για την πρώτη συνθήκη,

$$\begin{aligned} m \neq 0_1 &\Longrightarrow m = S_1 m' \text{ για κάποιο } m' \text{ από το Λήμμα } \mathbf{5.2} \\ &\Longrightarrow \pi(m) = \pi(S_1 m') = S_2 \pi(m') \neq 0_2, \end{aligned}$$

άρα αν $\pi(m) = \pi(0_1) = 0_2$, τότε $m = 0_1$ και $0_1 \in X$. Για τη δεύτερη συνθήκη, αρκεί να δείξουμε ότι

$$n \in X \,\&\, \pi(m) = \pi(S_1 n) \Longrightarrow m = S_1 n.$$

Η υπόθεση μας δίνει

$$\pi(m) = \pi(S_1 n) = S_2 \pi(n) \neq 0_2,$$

που συνεπάγεται ότι $m \neq 0_1$, αφού $\pi(0_1) = 0_2$ και $0_1 \in X$. Από το Λήμμα **5.2** και πάλι, $m = S_1 m'$ για κάποιο $m' \in \mathbb{N}_1$,

$$\pi(m) = \pi(S_1 m') = S_2 \pi(m')$$

και η υπόθεση $\pi(m) = \pi(S_1 n)$ μας δίνει

$$S_2 \pi(m') = S_2 \pi(n),$$

που συνεπάγεται $\pi(m') = \pi(n)$. Αυτό πάλι συνεπάγεται $m' = n$ επειδή $n \in X$, οπότε $m = S_1 m' = S_1 n$, αυτό που θέλαμε. ⊣

5.8. Απόδειξη του Θεωρήματος Αναδρομής, 5.6. Με τις υποθέσεις του θεωρήματος, ορίζουμε πρώτα το σύνολο $\mathcal{A}$ όλων των *προσεγγίσεων* της συνάρτησης που θέλουμε να κατασκευάσουμε:

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{A} \iff_{\text{ορ}} & \text{ Function}(p) \\ & \,\&\, \text{Domain}(p) \subseteq \mathbb{N} \,\&\, \text{Image}(p) \subseteq E \\ & \,\&\, 0 \in \text{Domain}(p) \,\&\, p(0) = a \\ & \,\&\, (\forall n \in \mathbb{N})[Sn \in \text{Domain}(p) \\ & \qquad \Longrightarrow n \in \text{Domain}(p) \,\&\, p(Sn) = h(p(n))]. \end{aligned} \tag{5-1}$$

Με λόγια, κάθε $p \in \mathcal{A}$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και τιμές στο E· από την τρίτη πρόταση το $\text{Domain}(p)$ περιέχει το 0· και η τελευταία συνεπάγεται ότι το $\text{Domain}(p)$ «είναι κλειστό προς τα κάτω», δηλαδή αν $Sn \in \text{Domain}(p)$, τότε $n \in \text{Domain}(p)$, και η τιμή $p(Sn)$ καθορίζεται από το $p(n)$. Μερικά παραδείγματα προσεγγίσεων είναι τα

$$\{(0,a)\}, \{(0,a),(S0,f(a))\}, \{(0,a),(S0,f(a)),(SS0,f(f(a)))\}, \ldots$$

τα οποία υποδεικνύουν τον τρόπο με τον οποίο «χτίζεται» η ζητούμενη συνάρτηση βήμα-προς-βήμα από τον αναδρομικό ορισμό. Για να αποδείξουμε το θεώρημα, πρέπει να δείξουμε (αυστηρά από τα αξιώματα, χωρίς « . . . » ή «κ.λπ.») ότι υπάρχει ακριβώς μία προσέγγιση με πεδίο ορισμού ολόκληρο το $\mathbb{N}$.

Λήμμα. *Για όλα τα $p, q \in \mathcal{A}$ και $n \in \mathbb{N}$,*

$$n \in \text{Domain}(p) \cap \text{Domain}(q) \Longrightarrow p(n) = q(n).$$

Απόδειξη. Το σύνολο

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid (\forall p, q \in \mathcal{A})\Big[n \in \text{Domain}(p) \cap \text{Domain}(q) \Longrightarrow p(n) = q(n)\Big]\}$$

προφανώς περιέχει το 0, αφού για κάθε $p \in \mathcal{A}$, $p(0) = a$. Αν

$$n \in X \,\&\, p \in \mathcal{A} \,\&\, q \in \mathcal{A} \,\&\, Sn \in \text{Domain}(p) \cap \text{Domain}(q),$$

τότε

$$\begin{aligned} p(Sn) &= h(p(n)) && \text{επειδή } p \in \mathcal{A}, \\ &= h(q(n)) && \text{επειδή } p(n) = q(n), \\ &= q(Sn) && \text{επειδή } q \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

ώστε αν $n \in X$, τότε $Sn \in X$. Από την Αρχή Επαγωγής έπεται ότι $X = \mathbb{N}$ και το Λήμμα αληθεύει. ⊣ (Λήμμα)

Το Λήμμα συνεπάγεται αμέσως ότι *το πολύ μία* συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ ανήκει στο $\mathcal{A}$, οπότε παραμένει μόνο να δείξουμε ότι *τουλάχιστον μία* τέτοια f υπάρχει. Αυτή είναι η ένωση

$$f = \bigcup \mathcal{A} = \{(n, w) \mid (\exists p \in \mathcal{A})[n \in \text{Domain}(p) \,\&\, p(n) = w]\},$$

η οποία καταρχήν είναι συνάρτηση, επειδή

$$\begin{aligned}(n,w)\in f\,\&\,(n,w')\in f &\implies (\exists p,q\in\mathcal{A})[(n,w)\in p\,\&\,(n,w')\in q]\\ &\implies w=w' \text{ από το Λήμμα },\end{aligned}$$

και από τον ορισμό του $\mathcal{A}$ και έναν παρόμοιο υπολογισμό έπεται ότι $f\in\mathcal{A}$. Υπολείπεται μόνο να επαληθεύσουμε ότι $\mathrm{Domain}(f)=\mathbb{N}$, και γι' αυτό χρησιμοποιούμε άλλη μια φορά την Αρχή Επαγωγής. Προφανώς $0\in\mathrm{Domain}(f)$, αφού $0\in\mathrm{Domain}(p)$ για κάθε $p\in\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}\neq\emptyset$. Αν $n\in\mathrm{Domain}(f)$, τότε υπάρχει κάποια συνάρτηση $p\in\mathcal{A}$ με $n\in\mathrm{Domain}(p)$, και επομένως (εύκολα)

$$q=p\cup\{(Sn,h(p(n)))\}\in\mathcal{A},$$

ώστε $Sn\in\mathrm{Domain}(q)\subseteq\mathrm{Domain}(f)$. ⊣

5.9. Οι φυσικοί αριθμοί. Καθορίζουμε τώρα ένα συγκεκριμένο σύστημα Peano $(\mathbb{N},0,S)$ τα μέλη του οποίου θα τα λέμε **φυσικούς αριθμούς**, ή απλά **αριθμούς**, όταν δεν υπάρχει σύγχυση. Ακολουθώντας τον Cantor, συμβολίζουμε τον πληθάριθμο του $\mathbb{N}$ με το πρώτο γράμμα του εβραϊκού αλφαβήτου,

$$\aleph_0 =_{\text{ορ}} |\mathbb{N}|. \tag{5-2}$$

Αργότερα θα συναντήσουμε τους αμέσως επόμενούς του, $\aleph_1$, $\aleph_2$ κ.λπ. Συναρτήσεις $a:\mathbb{N}\to A$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ καλούνται **ακολουθίες** και συνήθως η μεταβλητή τους τοποθετείται σαν δείκτης,

$$a_n=a(n)\quad(n\in\mathbb{N},a:\mathbb{N}\to A).$$

Μια προφανής επιλογή για το $\mathbb{N}$ είναι το σύστημα που κατασκευάσαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος Ύπαρξης **5.3**, όπου $0=\emptyset$,

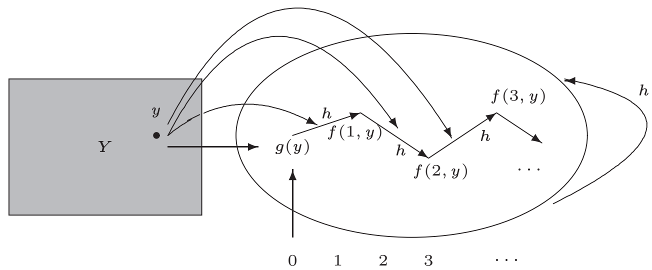
$$\mathbb{N}=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\dots\}$$

και $Sn=\{n\}$. Μια άλλη επιλογή, που μερικοί θα την προτιμήσουν για φιλοσοφικούς λόγους, είναι να δεχτούμε ότι υπάρχει πράγματι το σύνολο

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$$

των «αληθινών φυσικών αριθμών», οι οποίοι δεν είναι σύνολα αλλά «αριθμοί», και ο επόμενος S δεν είναι η κάπως άσχετη συνάρτηση $(n\mapsto\{n\})$, αλλά η συνάρτηση που συσχετίζει με κάθε αριθμό n τον «επόμενο αριθμό» Sn. Η θεωρία του Zermelo επιτρέπει τέτοια μη σύνολα (σαν τους «αληθινούς αριθμούς») ως άτομα, και επιμένει μόνο σε ένα πράγμα: το σύστημα των φυσικών αριθμών πρέπει να ικανοποιεί τα αξιώματα του Peano, κάτι που κάθε σοβαρός άνθρωπος αποδέχεται χωρίς δισταγμό. Όσον αφορά τη μαθηματική θεωρία των αριθμών και συνόλων που αναπτύσσουμε, αυτές οι δύο (και όλες οι άλλες) επιλογές του συνόλου των φυσικών αριθμών είναι ισοδύναμες, αφού θα στηρίξουμε όλες τις αποδείξεις μόνο στα αξιώματα του Peano.

5.10. Το Θεώρημα Schröder-Bernstein 2.26. Στο σημείο αυτό, πρέπει να επανεξετάσουμε την απόδειξη του σημαντικού αυτού θεωρήματος και να βεβαιωθούμε πως *μπορούμε πλέον να τη στηρίξουμε μόνο στα αξιώματα*· αυτό ισχύει επειδή οι αναδρομικοί ορισμοί των ακολουθιών συνόλων $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και



Διαγραμμα **5.2**. Το Θεώρημα Αναδρομής με παραμέτρους.

$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δικαιολογούνται από το Θεώρημα Αναδρομής, και οι βασικές τους ιδιότητες εδραιώνονται με επαγωγή και απλές πράξεις συναρτήσεων, κι όλα αυτά μπορούν να βασιστούν στα αποτελέσματα στο Κεφάλαιο **4**.

Υπάρχουν πολλές εναλλακτικές μορφές του Θεωρήματος Αναδρομής που χρησιμεύουν σε εφαρμογές. Αναφέρουμε εδώ μόνο δύο απ' αυτές, στις αποδείξεις των οποίων φαίνεται η χρήση του θεωρήματος. Δύο ακόμα παρόμοιες μορφές βρίσκονται στα προβλήματα, **x5.20** και **x5.21**.

5.11. Πόρισμα (Αναδρομή με παραμέτρους). *Για όλα τα σύνολα Y, E και συναρτήσεις*

$$g : Y \to E, \quad h : E \times Y \to E,$$

υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : \mathbb{N}\times Y \to E$ που ικανοποιεί τις ταυτότητες

$$\begin{aligned} f(0, y) &= g(y) && (y \in Y), \\ f(Sn, y) &= h(f(n, y), y) && (y \in Y, n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Αποδειξη. Για κάθε $y \in Y$ ορίζουμε τη συνάρτηση $h_y : E \to E$ με τον τύπο

$$h_y(w) = h(w, y),$$

και από το Θεώρημα Αναδρομής ξέρουμε ότι υπάρχει *ακριβώς μία* συνάρτηση

$$f_y : \mathbb{N} \to E$$

που ικανοποιεί τις ταυτότητες

$$\begin{aligned} f_y(0) &= g(y), \\ f_y(Sn) &= h_y(f_y(n)) = h(f_y(n), y). \end{aligned}$$

Προκύπτει αμέσως ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times Y \to E$ ορισμένη με τον τύπο

$$f(n, y) =_{\text{ορ}} f_y(n) \quad (y \in Y, n \in \mathbb{N})$$

ικανοποιεί το συμπέρασμα του Πορίσματος. ⊣

5.12. Πόρισμα (Αναδρομή με το όρισμα σαν παράμετρο). *Για κάθε σύνολο E, καθε $a \in E$, και κάθε συνάρτηση $h : E \times \mathbb{N} \to E$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις:*

$$f(0) = a,$$
$$f(Sn) = h(f(n), n).$$

Όμοια, με παραμέτρους, για κάθε

$$g : Y \to E, \quad h : E \times \mathbb{N} \times Y \to E,$$

υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times Y \to E$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} f(0, y) &= g(y) && (y \in Y), \\ f(Sn, y) &= h(f(n, y), n, y) && (y \in Y,\ n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για τη μορφή με τις παραμέτρους, αρχικά ορίζουμε συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{N} \times Y \to \mathbb{N} \times E$$

χρησιμοποιώντας αναδρομή με παραμέτρους **5.11**, όπου οι συναρτήσεις First και Second είναι αυτές της Άσκησης **4.3**:

$$\begin{aligned} \phi(0, y) &= (0, g(y)) \\ \phi(Sn, y) &= (S\mathrm{First}(\phi(n, y)), h(\mathrm{Second}(\phi(n, y)), \mathrm{First}(\phi(n, y)), y).) \end{aligned}$$

Με επαγωγή στο h, αμέσως,

$$\mathrm{First}(\phi(n, y)) = n,$$

κι έτσι η συνάρτηση ϕ ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\phi(0, y) = (0, g(y)), \quad \phi(Sn, y) = (Sn, h(\mathrm{Second}(\phi(n, y)), n, y)).$$

Απ' αυτό συνάγουμε ότι η συνάρτηση

$$f(n, y) = \mathrm{Second}(\phi(n, y))$$

ικανοποιεί τις εξισώσεις που θέλουμε.

Η μοναδικότητα αποδεικνύεται εύκολα, με επαγωγή στο n. ⊣

Χρησιμοποιόντας τα παραπάνω, ορίζουμε και θεμελιώνουμε τις βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της διάταξης στο $\mathbb{N}$.

5.13. Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός. Η συνάρτηση της πρόσθεσης στους αριθμούς ορίζεται με την αναδρομή

$$\begin{aligned} n + 0 &= n, \\ n + (Sm) &= S(n + m), \end{aligned} \tag{5-3}$$

κι έπειτα, χρησιμοποιώντας την πρόσθεση, ορίζουμε τον πολλαπλασιασμό από την αναδρομή

$$\begin{aligned} n \cdot 0 &= 0, \\ n \cdot Sm &= (n \cdot m) + n. \end{aligned} \tag{5-4}$$

Αναλυτικότερα, ξέρουμε από το **5.11** ότι υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} f(0, n) &= g(n), \\ f(Sm, n) &= h(f(m, n), n), \end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις g και h ορίζονται σαν σύνολα ζευγών,

$$\begin{aligned} g &= \{(n, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ h &= \{((z, n), w) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \mid w = Sz\}, \end{aligned}$$

και ορίζουμε την πρόσθεση με τον τύπο

$$n + m = f(m, n),$$

δηλαδή $+ = \{((n, m), w) \mid ((m, n), w) \in f\}$. Τέτοιες τερατώδεις σχολαστικότητες δεν βοηθούν την κατανόηση (μάλλον βλάπτουν) και θα τις αποφύγουμε.

5.14. Θεώρημα. *Η πρόσθεση είναι* **προσεταιριστική** *πράξη, δηλαδή ικανοποιεί την εξίσωση*

$$(n + m) + k = n + (m + k) \tag{5-5}$$

Απόδειξη. Πρώτα για $k = 0$,

$$(n + m) + 0 = n + m = n + (m + 0),$$

χρησιμοποιώντας δύο φορές τη σχέση $w + 0 = w$ από τον ορισμό της πρόσθεσης. Επαγωγικά, δεχόμενοι ότι για κάποιο k

$$(n + m) + k = n + (m + k), \tag{5-6}$$

υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} (n + m) + Sk &= S((n + m) + k) \\ &= S(n + (m + k)) \text{ από την (5-6)} \\ &= n + S(m + k) \\ &= n + (m + Sk) \end{aligned}$$

όπου οι μη δικαιολογημένες εξισώσεις προκύπτουν από τον ορισμό της πρόσθεσης. ⊣

Η μεταθετικότητα της πρόσθεσης δεν είναι τόσο απλή και χρειάζεται δύο λήμματα:

5.15. Λήμμα. *Για κάθε αριθμό n, $0 + n = n$.*

Απόδειξη. Επαγωγικά, $0+0 = 0$ συνάγεται από τον ορισμό, και αν $0+n = n$, τότε $0 + Sn = S(0 + n) = Sn$. ⊣

5.16. Λήμμα. *Για όλους τους αριθμούς n, m, $n + Sm = Sn + m$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Με επαγωγή στο m, πρώτα για $m = 0$, αμέσως από τον ορισμό:

$$n + S0 = S(n + 0) = Sn = Sn + 0.$$

Για το επαγωγικό βήμα, δεχόμαστε ότι για κάποιο m,

$$n + Sm = Sn + m \tag{5-7}$$

και πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$n + SSm = Sn + Sm.$$

Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} n + SSm &= S(n + Sm) && \text{από τον ορισμό} \\ &= S(Sn + m) && \text{από την (5-7)} \\ &= Sn + Sm && \text{από τον ορισμό.} \end{aligned}$$

⊣

5.17. Θεώρημα. *Η πρόσθεση είναι* **μεταθετική** *πράξη, δηλαδή*

$$n + m = m + n.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Με επαγωγή στο m, η βάση έπεται αμέσως από το Λήμμα **5.15**. Για το επαγωγικό βήμα, δεχόμαστε ότι για κάποιο συγκεκριμένο m

$$n + m = m + n \tag{5-8}$$

και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} n + Sm &= S(n + m) && \text{από τον ορισμό} \\ &= S(m + n) && \text{από την (5-8)} \\ &= m + Sn && \text{από τον ορισμό} \\ &= Sm + n && \text{από το Λήμμα } \mathbf{5.16}. \end{aligned}$$

⊣

5.18. Άσκηση. *Για κάθε αριθμό n, η συνάρτηση $(s \mapsto n + s)$ είναι ένα-προς-ένα, άρα $n + s = n + t \Longrightarrow s = t$, και ειδικότερα,*

$$\text{αν } \ n + s = n, \ \text{ τότε } \ s = 0.$$

5.19. Ορισμός. Μια διμελής σχέση $\leq$ σε ένα σύνολο P είναι **μερική διάταξη** (partial ordering) αν είναι αυτοπαθής, μεταβατική και αντισυμμετρική (antisymmetric), δηλαδή για όλα τα $x, y, z \in P$,

$$\begin{aligned} &x \leq x && \text{(αυτοπάθεια),} \\ &x \leq y \,\&\, y \leq z \Longrightarrow x \leq z && \text{(μεταβατικότητα),} \\ &x \leq y \,\&\, y \leq x \Longrightarrow x = y && \text{(αντισυμμετρικότητα).} \end{aligned}$$

Σχετικά με μερικές διατάξεις θα χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό

$$x < y \iff_{\text{ορ}} x \leq y \,\&\, x \neq y.$$

Η $\leq$ είναι **ολική** (total), ή **γραμμική** (linear) ή απλά **διάταξη** αν επιπλέον όλα τα στοιχεία του P είναι **συγκρίσιμα** (comparable) ανά δύο ως προς την $\leq$, δηλαδή

$$(\forall x, y \in P)[x \leq y \vee y \leq x],$$

ή ισοδύναμα

$$(\forall x, y \in P)[x < y \vee x = y \vee y < x].$$

5.20. Ορισμός. Η διμελής σχέση $\leq$ στο P είναι **καλή διάταξη** (wellordering) του συνόλου P, αν είναι ολική διάταξη του P και επιπλέον κάθε μη κενό υποσύνολο του P έχει ένα ελάχιστο στοιχείο, συμβολικά:

$$(\forall X \subseteq P)[X \neq \emptyset \Longrightarrow (\exists x \in X)(\forall y \in X)[x \leq y]].$$

5.21. Ορισμός. Η σχέση διάταξης $\leq$ στους φυσικούς αριθμούς ορίζεται με την ισοδυναμία

$$n \leq m \iff_{\text{ορ}} (\exists s)[n + s = m].$$

Βασική ιδιότητα της $\leq$ είναι η εξής:

5.22. Λήμμα. *Για όλους τους αριθμούς n, m,*

$$n \leq Sm \iff n \leq m \vee n = Sm.$$

Απόδειξη. Αν $n \leq Sm$, τότε εξ ορισμού υπάρχει t τέτοιος ώστε $n + t = Sm$ και εξετάζουμε δύο περιπτώσεις. Περιπτωση (1), $t = 0$. Τώρα $n + 0 = Sm$, επομένως $n = Sm$. Περιπτωση (2), $n + t = Sm$ για κάποιο $t \neq 0$. Τώρα από το Λήμμα **5.2**, $t = Ss$ για κάποιο s, οπότε $n + Ss = Sm$, άρα $S(n + s) = Sm$, άρα $n + s = m$ αφού η S είναι μονομορφισμός και επομένως $n \leq m$. Η άλλη κατεύθυνση του Λήμματος είναι ευκολότερη. $\dashv$

5.23. Θεώρημα. *Η σχέση $\leq$ στους φυσικούς αριθμούς είναι καλή διάταξη.*

Απόδειξη. Η αυτοπάθεια είναι προφανής από το $n + 0 = n$ και η μεταβατικότητα ισχύει επειδή $n + s = m \,\&\, m + t = k \Longrightarrow n + (s + t) = k$. Για την αντισυμμετρικότητα, παρατηρούμε ότι αν $n + s = m$ και $m + t = n$, τότε $n + (s + t) = n$ και η Άσκηση **5.18** συνεπάγεται $s + t = 0$· επομένως $t = 0$ (αλλιώς ο $s + t$ είναι επόμενος) και τελικά $m = n$.

Απόδειξη γραμμικότητας. Θα δείξουμε ότι $(\forall n)[n \leq m \vee m \leq n]$, με επαγωγή στο m. Παρατηρούμε αρχικά πως για κάθε n, $n \leq Sn$, διότι $n + S0 = Sn$.

Βαση. Για κάθε n, $0 + n = n$ και επομένως $0 \leq n$.

Επαγωγικο Βημα. Δεχόμαστε την επαγωγική υπόθεση

$$(\forall n)[n \leq m \vee m \leq n]$$

και δείχνουμε ότι για κάθε n, $n \leq Sm \vee Sm \leq n$. Η επαγωγική υπόθεση χωρίζει φυσικά την απόδειξη σε δύο περιπτώσεις: Αν $n \leq m$, τότε $n \leq Sm$ αφού $m \leq Sm$ και η $\leq$ είναι μεταβατική. Αν $m \leq n$, τότε για κάποιο t, $m + t = n$, και έχουμε πάλι δύο περιπτώσεις: αν $t = 0$, τότε $n = m \leq Sm$, και αν $t \neq 0$, τότε $t = Ss$ για κάποιο s, άρα $m + Ss = n$ και από το Λήμμα **5.16** $Sm + s = n$, κι άρα $Sm \leq n$.

Απόδειξη ιδιότητας καλής διάταξης. Προς άτοπο, υποθέτουμε ότι το X είναι μη κενό και χωρίς ελάχιστο μέλος και θέτουμε

$$Y = \{n \in \mathbb{N} \mid (\forall m \leq n)[m \notin X]\},$$

ώστε προφανώς

$$Y \cap X = \emptyset. \tag{5-9}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $0 \in Y$ και $n \in Y \Longrightarrow Sn \in Y$, γιατί τότε $Y = \mathbb{N}$ από την Αρχή Επαγωγής και άρα $X = \emptyset$ από την (5-9), που είναι άτοπο.

ΒΑΣΗ. $0 \in Y$. Το 0 είναι ο ελάχιστος αριθμός και επομένως $0 \notin X$ (αλλιώς το X θα είχε ελάχιστο) και επίσης $m \leq 0 \Longrightarrow m = 0 \Longrightarrow m \notin X$, άρα $0 \in Y$.

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ. Η επαγωγική υπόθεση $n \in Y$ και ο ορισμός του Y συνεπάγονται ότι $(\forall m \leq n) m \notin X$, και από το Λήμμα **5.22** γνωρίζουμε ότι $m \leq Sn \Longrightarrow m \leq n \vee m = Sn$. Άρα για να επαληθεύσουμε την $Sn \in Y$, αρκεί να δείξουμε ότι $Sn \notin X$. Αλλά αν το Sn ανήκε στο X, τότε θα ήταν το ελάχιστό του μέλος αφού

$$\begin{aligned} m < Sn &\iff m \leq n && \text{από το Λήμμα } \mathbf{5.22} \\ &\Longrightarrow m \notin X && \text{από την επαγωγική υποθεση.} \end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι η $\leq$ είναι καλή διάταξη και συμπληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. ⊣

Για καλές διατάξεις, γενικά, θα πούμε πολλά αργότερα, στο Κεφάλαιο **7**. Ειδικά για τους φυσικούς αριθμούς, το γεγονός ότι το $\mathbb{N}$ είναι καλά διατεταγμένο από την $\leq$ είναι μια άλλη έκφραση της Αρχής Επαγωγής.

Περνάμε τώρα στις εφαρμογές των φυσικών αριθμών στη συνολοθεωρία και ιδιαίτερα τη θεωρία των πεπερασμένων και απαριθμητών συνόλων, αφού πρώτα επαναλάβουμε την προειδοποίηση του **3.24**: πολλές από αυτές χρειάζονται το Αξίωμα Επιλογής και θα πρέπει να περιμένουν μέχρι το Κεφάλαιο **8**. Οι περισσότερες όμως μπορούν να αποδειχτούν με την ίδια βασική αποδεικτική μέθοδο που συμβολίζεται από το ζευγάρωμα

αναδρομικός ορισμός – επαγωγική απόδειξη.

Επαναλαμβάνουμε μερικούς από τους ορισμούς του Κεφαλαίου **2** με τις αξιωματικές έννοιες που έχουμε αποκτήσει στο μεταξύ.

5.24. Ορισμός. Για κάθε φυσικό αριθμό m και κάθε $n \leq m$, ορίζουμε το (ημιανοικτό) **διάστημα** από το n στο m

$$[n, m) =_{\text{ορ}} \{k \in \mathbb{N} \mid n \leq k \,\&\, k < m\}.$$

5.25. Άσκηση. *Για κάθε n, $[n, n) = \emptyset$ και για κάθε $n \leq m$,*

$$[n, Sm) = [n, m) \cup \{m\}.$$

5.26. Ορισμός. Το σύνολο A είναι **πεπερασμένο** αν υπάρχει φυσικός αριθμός n, τέτοιος ώστε $A =_c [0, n)$· **άπειρο** αν δεν είναι πεπερασμένο· και **αριθμήσιμο** ή

απαριθμητό αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$. Από την Πρόταση **2.7** (η οποία συνάγεται εύκολα από τα αξιώματα),

$$A \text{ απαριθμητό} \iff A \leq_c \mathbb{N}.$$

Οι **πεπερασμένοι πληθάριθμοι** είναι οι πληθάριθμοι των πεπερασμένων συνόλων.

Η επόμενη θεμελιακή ιδιότητα των πεπερασμένων συνόλων είναι η βάση του κλάδου των μαθηματικών που λέγεται *συνδυαστική*.

5.27. Αρχή του Περιστερεώνα. *Κάθε μονομορφισμός $f : A \rightarrowtail A$ από ένα πεπερασμένο σύνολο στον εαυτό του είναι επιμορφισμός, δηλαδή $f[A] = A$.*

Αποδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό m και κάθε g,

$$g : [0, m) \rightarrowtail [0, m) \Longrightarrow g[[0, m)] = [0, m), \tag{5-10}$$

για τον εξής λόγο: αν η $f : A \rightarrowtail A$ είναι μονομορφισμός και η $\pi : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow [0, m)$ βεβαιώνει ότι το A είναι πεπερασμένο, ορίζουμε τη συνάρτηση $g : [0, m) \to [0, m)$ με τον τύπο

$$g(i) = \pi(f(\pi^{-1}(i))) \quad (i < m),$$

ώστε (εύκολα)

$$f(x) = \pi^{-1}(g(\pi(x))) \quad (x \in A). \tag{5-11}$$

Η g είναι μονομορφισμός, σαν σύνθεση μονομορφισμών, και επομένως από την (5-10) είναι αντιστοιχία, αλλά τότε και η f είναι αντιστοιχία σαν σύνθεση αντιστοιχιών, από την (5-11).

Η απόδειξη της (5-10) είναι (φυσικά) με επαγωγή στο m. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι θα αποδείξουμε τη γενική πρόταση

$$(\forall g)\, [g : [0, m) \rightarrowtail [0, m) \Longrightarrow g[[0, m)] = [0, m)]\,, \tag{5-12}$$

επειδή στην επαλήθευση του επαγωγικού βήματος για κάποια g θα χρειαστούμε την επαγωγική υπόθεση για διάφορες άλλες συναρτήσεις g.

Βαση. Η (5-10) είναι τετριμμένη για $m = 0, 1$, επειδή μόνο μία συνάρτηση $g : [0, m) \to [0, m)$ υπάρχει σ' αυτές τις περιπτώσεις και αυτή είναι αντιστοιχία.

Επαγωγικο Βημα. Δεχόμαστε την (5-12) για κάποιο $m > 1$ και πρέπει να αποδείξουμε ότι κάθε μονομορφισμός

$$g : [0, Sm) \rightarrowtail [0, Sm)$$

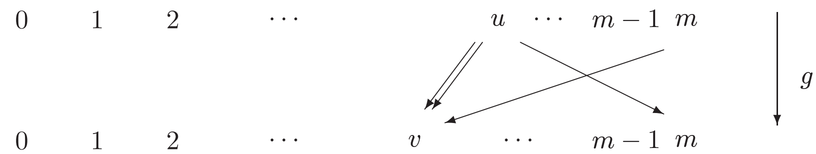
είναι επιμορφισμός. Από την Ἂσκηση **5.25** ξέρουμε ότι

$$[0, Sm) = [0, m) \cup \{m\},$$

και η απόδειξη διασπάται φυσικά σε τρεις περιπτώσεις:

Περιπτωση (1). $m \notin \mathrm{Image}(g)$. Σ' αυτή την περίπτωση θεωρούμε τον *περιορισμό* h της g στο διάστημα $[0, m)$ που ορίζεται με τον τύπο

$$h(i) = g(i) \quad (i < m),$$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **5.3**. Αρχή του Περιστερεώνα, ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (3).

δηλαδή σαν σύνολο ζευγών $h = g \setminus \{(m, g(m))\}$. Αυτή η συνάρτηση παίρνει όλες τις τιμές της στο διάστημα $[0, m)$ και είναι βέβαια μονομορφισμός. Έτσι, η επαγωγική υπόθεση αληθεύει για την h και επομένως $h[[0, m)] = [0, m)$. Αυτό σημαίνει ότι $g[[0, m)] = [0, m)$ και οδηγεί σε άτοπο, επειδή η υπόθεση της περίπτωσης συνεπάγεται $g(m) < m$ και επομένως η συνάρτηση g παίρνει δύο φορες την τιμή $g(m)$, δηλαδή δεν είναι μονομορφισμός.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (2). $g(m) = m$. Με τον ίδιο συλλογισμό, ο περιορισμός h είναι αντιστοιχία $h : [0, m) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow [0, m)$, και επομένως (εύκολα) και η g είναι αντιστοιχία.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (3). Υπάρχουν αριθμοί $u, v < m$ τέτοιοι ώστε

$$g(u) = m, \quad g(m) = v.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση που είναι η πιο ενδιαφέρουσα, ορίζουμε τη συνάρτηση $h' : [0, m) \to [0, m)$ με τον τύπο

$$h'(i) = \begin{cases} g(i), & \text{αν } i < m \,\&\, i \neq u, \\ v, & \text{αν } i = u. \end{cases}$$

Η h' είναι μονομορφισμός επειδή συμφωνεί με την g σε όλα τα στοιχεία εκτός από το u, όπου παίρνει την τιμή v και $v \neq g(j)$, για κάθε $j < m$, επειδή $g(m) = v$ και η g είναι μονομορφισμός. Επομένως, εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση στην h' συμπεραίνουμε ότι $h'[[0, m)] = [0, m)$, και απ' αυτή την ισότητα (εύκολα πια) $g[[0, Sm)] = [0, Sm)$. ⊣

Σαν πρώτη εφαρμογή μπορούμε να αποδείξουμε αυστηρά το εξής «προφανές» θεώρημα:

5.28. Πόρισμα. *Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι άπειρο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η συνάρτηση $(n \mapsto Sn)$ είναι μονομορφισμός από το $\mathbb{N}$ στο γνήσιο υποσύνολο $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. ⊣

Συνεπώς «άπειρο, απαριθμητό» σημαίνει ακριβώς «ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$», σύμφωνα με τις διαισθήσεις μας: το σύνολο A είναι άπειρο, απαριθμητό ακριβώς αν $|A| =_c \aleph_0$.

5.29. Πόρισμα. *Για κάθε πεπερασμένο σύνολο A, υπάρχει ακριβώς ένας φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $A =_c [0, n)$.* Θέτουμε

$$\#(A) =_{\text{ορ}} \text{ο μοναδικός } n \in \mathbb{N} \text{ τέτοιος ώστε } [A =_c |A| =_c [0, n)] \tag{5-13}$$

και φυσικά καλούμε τον $\#(A)$ τον *αριθμό των στοιχείων* του A.

Αποδειξη. Αν $A =_c [0, n)$ και $A =_c [0, m)$ με $n < m$, τότε $[0, n) =_c [0, m)$ και η αντιστοιχία $\pi : [0, m) \rightarrowtail [0, n)$ αντικρούει την Αρχή του Περιστερεώνα, αφού το $[0, n)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $[0, m)$. $\dashv$

Μπορούμε πλέον να αποδείξουμε πολλές ιδιότητες πεπερασμένων συνόλων με επαγωγή στον αριθμό των μελών τους, που προσδιορίζεται από τον πληθικό τους αριθμό. Πολλά από τα προβλήματα λύνονται με αυτό τον τρόπο.

5.30. Λέξεις (words ή strings). Στο Κεφάλαιο **2** χρησιμοποιήσαμε το Καρτεσιανό γινόμενο n παραγόντων A^n για να απεικονίσουμε ακολουθίες μήκους n από το σύνολο A. Αυτό δεν είναι βολικό όταν θέλουμε να μελετήσουμε το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών από το A, οι οποίες απεικονίζονται πιο εύκολα σαν συναρτήσεις με πεδίο ορισμού κάποιο αρχικό τμήμα του $\mathbb{N}$. Για κάθε A, το σύνολο **πεπερασμένων ακολουθιών** ή **λέξεων** από το A ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} A^{(n)} &=_{\text{ορ}} \{u \subseteq \mathbb{N} \times A \mid \text{Function}(u) \,\&\, \text{Domain}(u) = [0, n)\}, \\ A^* &=_{\text{ορ}} \textstyle\bigcup_{n=0}^{\infty} A^{(n)}. \end{aligned} \tag{5-14}$$

Το **μήκος** (length) μιας λέξης ορίζεται με τη συνάρτηση

$$\text{lh}(u) =_{\text{ορ}} \max\{i \mid i = 0 \vee i - 1 \in \text{Domain}(u)\} \quad (u \in A^*), \tag{5-15}$$

έτσι που $\text{lh}(u) = 0$ μόνο όταν το u είναι η κενή λέξη $\emptyset$. Επίσης θέτουμε

$$u \sqsubseteq v \iff_{\text{ορ}} u \subseteq v \quad (u, v \in A^*), \tag{5-16}$$

και καλούμε το u **αρχικό τμήμα** (initial segment) του v αν $u \sqsubseteq v$. Αν $a_0, \dots, a_{n-1}$ είναι στοιχεία του A, συμβολίζουμε με

$$\langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle =_{\text{ορ}} \{(0, a_0), \dots, (n-1, a_{n-1})\} \tag{5-17}$$

την ακολουθία τους, ειδικότερα (με $n = 0, 1$),

$$\langle\ \rangle = \emptyset, \quad \langle a\rangle =_{\text{ορ}} \{(0, a)\}. \tag{5-18}$$

Για όλες τις λέξεις u, v, η λέξη

$$u \star v = \langle u(0), \dots, u(\text{lh}(u) - 1), v(0), \dots, v(\text{lh}(v) - 1)\rangle \tag{5-19}$$

είναι η **παράθεση** (concatenation) των λέξεων u και v.

Για κάθε $f : \mathbb{N} \to A$ και κάθε φυσικό αριθμό n,

$$\overline{f}(n) =_{\text{ορ}} f \restriction [0, n) = \{(i, f(i)) \mid i < n\} \tag{5-20}$$

είναι ο **περιορισμός** (restriction) της f στο αρχικό τμήμα $[0, n)$ του $\mathbb{N}$. Σαν παράδειγμα,

$$\overline{f}(0) = \emptyset, \quad \overline{f}(1) = \{(0, f(0))\}, \dots,$$

και μπορούμε να ανακτήσουμε την f από την $\overline{f}$, αφού

$$i < n \Longrightarrow f(i) = \overline{f}(n)(i).$$

5.31. Ορισμός. Για κάθε πληθάριθμο κ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$\kappa^n =_{\text{ορ}} |\kappa^{(n)}|.$$

5.32. Πρόταση. *Για κάθε άπειρο, απαριθμητό σύνολο A και κάθε $n > 0$,*

$$A =_c A \times A =_c A^{(n)} =_c A^*.$$

Εναλλακτικά, σαν εξισώσεις της πληθικής αριθμητικής:

$$\aleph_0 =_c \aleph_0 \cdot \aleph_0 =_c {\aleph_0}^n =_c |{\aleph_0}^*|. \tag{5-21}$$

Απόδειξη. Οι ανισότητες από τα αριστερά στα δεξιά είναι προφανείς, ώστε με το Θεώρημα Schröder-Bernstein αρκεί να αποδείξουμε $\mathbb{N}^* \leq_c \mathbb{N}$. Χρειαζόμαστε κάποιο μονομορφισμό

$$\rho : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N}, \tag{5-22}$$

κι ας υποθέσουμε ότι τον βρήκαμε. Ξεκινώντας με αυτόν, ορίζουμε αναδρομικά μονομορφισμούς $\pi_n : \mathbb{N}^{(n+1)} \rightarrowtail \mathbb{N}$, για κάθε n, τέτοιους ώστε

$$\begin{aligned} \pi_0(u) &= u(0), \\ \pi_{n+1}(u) &= \rho(\pi_n(u \restriction [0, n+1)), u(n+1)). \end{aligned}$$

Λεπτομερέστερα (για τελευταία φορά), αυτό έπεται από το Θεώρημα Αναδρομής, αν θέσουμε

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \{(u, w) \mid u \in \mathbb{N}^{(1)}, (0, w) \in u\}, \\ \pi_{n+1} &= \{(u, w) \mid u \in \mathbb{N}^{(n+2)}, w = \rho(\pi_n(u \restriction [0, n+1), u(n+1))\}. \end{aligned}$$

Τελικά, η συνάρτηση

$$\pi(u) = (\mathrm{lh}(u) - 1, \pi_{\mathrm{lh}(u)-1}(u))$$

φανερώνει ότι $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^{(n+1)} \leq_c \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, από το οποίο, το θεώρημα συνάγεται εύκολα χρησιμοποιώντας άλλη μια φορά το μονομορφισμό ρ. Όσον αφορά την αρχική επιλογή κάποιου ρ, καθένας που έχει σκεφτεί το πρόβλημα έχει τον αγαπημένο του τρόπο να ζευγαρώνει αριθμούς, και οπωσδήποτε αυτός του Cantor (εικονισμένος στο Διάγραμμα **2.2**) είναι από τους καλύτερους. Ο επόμενος, έχει εφευρεθεί από τον Gödel και εικονίζεται στο Διάγραμμα **5.4**,

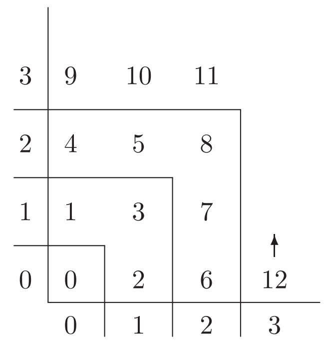
$$\rho(m, n) = \begin{cases} (m+1)^2 - 1, & \text{αν } m = n, \\ n^2 + m, & \text{αν } m < n, \\ m^2 + m + n, & \text{αν } n < m. \end{cases}$$

Η απόδειξη ότι όντως είναι μονομορφισμός είναι διασκεδαστική (Πρόβλημα **x5.24**). ⊣

Μερικές φορές είναι χρήσιμο να θεωρούμε το A^* σαν μια γενίκευση του $\mathbb{N}$, που παράγεται από την κενή λέξη $\langle\ \rangle$ (αντί για το 0) επαναλαμβάνοντας τους **τελεστές προσάρτησης**

$$S_a(u) = u \star \langle a \rangle \quad (a \in A),$$

έναν για κάθε $a \in A$. Έχοντας αυτό κατά νου, μπορούμε να κατασκευάσουμε ορισμούς με αναδρομή στο A^*, σύμφωνα με το ακόλουθο, χρήσιμο θεώρημα:



Διαγραμμα **5.4**. Αντιστοιχία του $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με το $\mathbb{N}$.

5.33. Θεώρημα Αναδρομής σε Λέξεις. *Για οποιαδήποτε δύο σύνολα A, E, κάθε $a \in E$ και κάθε συνάρτηση $h : E \times A \to E$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : A^* \to E$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις:*

$$\begin{aligned} f(\langle\ \rangle) &= a, \\ f(u \star \langle x \rangle) &= h(f(u), x) \quad (u \in A^*, x \in A). \end{aligned}$$

Όμοια, με παραμέτρους, για κάθε

$$g : Y \to E, \quad h : E \times A \times Y \to E,$$

υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : A^* \times Y \to E$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} f(\langle\ \rangle, y) &= g(y) && (y \in Y), \\ f(u \star \langle x \rangle, y) &= h(f(u, y), x, y) && (u \in A^*, y \in Y, x \in A). \end{aligned}$$

Αποδειξη. Για την εκδοχή με τις παραμέτρους, χρησιμοποιώντας την Άσκηση **5.12** παίρνουμε συνάρτηση $\phi : \mathbb{N} \times A^* \times Y \to E$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \phi(0, u, y) &= g(y), \\ \phi(n + 1, u, y) &= h(\phi(n, u, y), u(n), y), \end{aligned}$$

και θέτουμε

$$f(u, y) = \phi(\mathrm{lh}(u), u, y).$$

Προφανώς $f(\langle\ \rangle, y) = \phi(0, u, y) = g(y)$, άρα η $f(u, y)$ ικανοποιεί την πρώτη εξίσωση. Για τη δεύτερη, δείχνουμε εύκολα με επαγωγή στο n πως για οποιεσδήποτε λέξεις u, v,

$$(\forall i < n)[u(i) = v(i)] \Longrightarrow \phi(n, u, y) = \phi(n, v, y). \tag{$*$}$$

Η βάση της επαγωγής επαληθεύεται αμέσως, αφού η $\phi(0, u, y) = g(y)$ δεν εξαρτάται από την τιμή του u, και για το επαγωγικό βήμα, με την υπόθεση ότι

$(\forall i < n+1)[u(i) = v(i)]$, έχουμε

$$\begin{aligned}\phi(n+1,u,y) &= h(\phi(n,u,y),u(n),y)\\ &= h(\phi(n,v,y),v(n),y) \quad \text{(επαγωγική υπόθεση και υπόθεση)}\\ &= \phi(n+1,v,y).\end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την $(*)$, υπολογίζουμε για κάθε u με $\mathrm{lh}(u) = n$ και κάθε $x \in A$,

$$\begin{aligned}f(u\star\langle x\rangle,y) &= \phi(n+1,u\star\langle x\rangle,y)\\ &= h(\phi(n,u\star\langle x\rangle,y),x,y)\\ &= h(\phi(n,u,y),x,y) \qquad \text{(από την } (*))\\ &= h(f(u,y),x,y) \qquad \text{(από τον ορισμό της } f)\end{aligned}$$

Με επαγωγή στο $\mathrm{lh}(u)$, δείχνουμε εύκολα τη μοναδικότητα της $f(u,y)$. ⊣

5.34. Το συνεχές (the continuum). Ο κλασικός συμβολισμός για τον πληθάριθμο του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι ο

$$\mathfrak{c} =_{\mathrm{op}} |\mathcal{P}(\mathbb{N})| =_c 2^{\aleph_0}. \tag{5-23}$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε τα βασικά αποτελέσματα για τον $\mathfrak{c}$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του $\aleph_0$ στην (5-21) και στοιχειώδη πληθική αριθμητική. Σαν παράδειγμα,

$$\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} =_c 2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0} =_c 2^{\aleph_0+\aleph_0} =_c 2^{\aleph_0} =_c \mathfrak{c}.$$

Το Θεώρημα Schröder-Bernstein είναι επίσης πολύ χρήσιμο, π.χ.

$$\mathfrak{c} =_c 2^{\aleph_0} \le_c {\aleph_0}^{\aleph_0} \le_c \mathfrak{c}^{\aleph_0} =_c (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} =_c 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} =_c 2^{\aleph_0} =_c \mathfrak{c},$$

ώστε από το Schröder-Bernstein,

$$\mathfrak{c} =_c {\aleph_0}^{\aleph_0} =_c \mathfrak{c}^{\aleph_0}.$$

Μερικά από τα προβλήματα χρειάζονται υπολογισμούς αυτού του τύπου. Από την άλλη μεριά, η ισοπληθικότητα $\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$ θα προκύψει αμέσως από τα αξιώματα μόλις ορίσουμε τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$ στο Παράρτημα **A**, ώστε η Υπόθεση του Συνεχούς είναι ισοδύναμη με την πρόταση

(CH) $$(\forall\kappa \le_c \mathfrak{c})[\kappa \le_c \aleph_0 \vee \kappa =_c \mathfrak{c}].$$

Θα διερευνήσουμε την **CH** στο Κεφάλαιο **10**. Δεν είναι εύκολο πρόβλημα η λύση της.

Προβλήματα για το Κεφάλαιο 5

x5.1. Ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς είναι προσεταιριστική πράξη.

x5.2. Ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς είναι μεταθετική πράξη.

x5.3. Η πράξη της δύναμης ορίζεται με την αναδρομή στο m

$$n^0 = 1$$
$$n^{Sm} = n^m \cdot n,$$

και ικανοποιεί τις ακόλουθες εξισώσεις (για $n \neq 0$):

$$n^{(m+k)} = n^m \cdot n^k,$$
$$n^{(m \cdot k)} = (n^m)^k.$$

x5.4. Ας υποθέσουμε ότι τα $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ είναι συστήματα Peano, $+_1$, $\cdot_1$, $+_2$, $\cdot_2$ είναι οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού σ' αυτά τα συστήματα, και $\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}_2$ είναι ο «κανονικός» ισομορφισμός ανάμεσα στα δύο συστήματα, από το Θεώρημα **5.4**. Δείξε ότι ο π είναι επίσης ισομορφισμός για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, δηλαδή αν $n, m \in \mathbb{N}_1$, τότε

$$\pi(n +_1 m) = \pi(n) +_2 \pi(m), \quad \pi(n \cdot_1 m) = \pi(n) \cdot_2 \pi(m).$$

x5.5. Ας υποθέσουμε ότι τα $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ είναι συστήματα Peano, $\leq_1$, $\leq_2$ είναι οι αντίστοιχες καλές διατάξεις και $\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}_2$ είναι ο κανονικός ισομορφισμός. Δείξε ότι η π σέβεται τη διάταξη, δηλαδή ότι για όλα τα $n, m \in \mathbb{N}_1$,

$$n \leq_1 m \iff \pi(n) \leq_2 \pi(m).$$

x5.6. Κάθε υποσύνολο B ενός διαστήματος $[0, n)$ είναι ισοπληθικό με κάποιο $[0, m)$ όπου $m \leq n$, και επομένως αν το A είναι πεπερασμένο και $B \subseteq A$, τότε και το B είναι πεπερασμένο και $\#(B) \leq \#(A)$.

Κάθε πληθάριθμος είναι σύνολο και τον καλούμε **πεπερασμένο πληθάριθμο** αν είναι πεπερασμένο σύνολο.

x5.7. Δείξε ότι για κάθε πεπερασμένο πληθάριθμο κ,

$$\kappa =_c [0, \#(\kappa)).$$

x5.8. Για όλους τους αριθμούς n, m, $[0, m) =_c [n, n + m)$, και επομένως για όλα τα πεπερασμένα σύνολα A, B, η ένωσή τους είναι πεπερασμένη και

$$\text{αν} \;\; A \cap B = \emptyset, \;\text{τότε}\;\; \#(A \cup B) = \#(A) + \#(B).$$

Ειδικότερα, για όλους τους πεπερασμένους πληθαρίθμους κ, λ,

$$\#(\kappa + \lambda) = \#(\kappa) + \#(\lambda).$$

x5.9. Αν το $\mathcal{E}$ είναι πεπερασμένο σύνολο και κάθε μέλος του είναι επίσης πεπερασμένο σύνολο, τότε και η ένωση $\bigcup \mathcal{E}$ είναι πεπερασμένο σύνολο.

x5.10. Το γινόμενο δύο πεπερασμένων συνόλων A, B είναι πεπερασμένο, και

$$\#(A \times B) = \#(A) \cdot \#(B).$$

Συνεπώς για όλους τους πεπερασμένους πληθαρίθμους κ, λ,

$$\#(\kappa \cdot \lambda) = \#(\kappa) \cdot \#(\lambda).$$

x5.11. Το δυναμοσύνολο κάθε πεπερασμένου συνόλου A είναι πεπερασμένο, και

$$\#(\mathcal{P}(A)) = 2^{\#(A)}.$$

Συνεπώς για κάθε πεπερασμένο πληθάριθμο κ,

$$\#(2^{\kappa}) = 2^{\#(\kappa)}.$$

x5.12. Για όλους τους πεπερασμένους πληθαρίθμους κ, λ,

$$\#(\kappa^{\lambda}) = \#(\kappa)^{\#(\lambda)}.$$

x5.13. Δείξε ότι αν το A είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε κάθε επιμορφισμός $f : A \twoheadrightarrow A$ είναι μονομορφισμός. (Αυτή είναι μια εναλλακτική μορφή της Αρχής του Περιστερεώνα.)

x5.14. Για κάθε πληθάριθμο κ, $2^{\kappa} \neq_c \aleph_0$. (*Πρόσεξε*: δεν έχουμε αποδείξει την Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων **3.1**, κι άρα δεν μπορείς να τη χρησιμοποιήσεις.

x5.15. $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} =_c \aleph_0 \cdot \mathfrak{c} =_c \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} =_c \mathfrak{c}$.

x5.16. $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} =_c 2^{\mathfrak{c}}$.

x5.17. Για κάθε πληθάριθμο $\kappa >_c 1$, αν $\kappa \cdot \kappa =_c \kappa$, τότε $2^{\kappa} =_c \kappa^{\kappa}$.

x5.18. Για κάθε πληθάριθμο κ και κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\kappa^n =_c \kappa^{|[0,n)|},$$

όπου η αριστερή πλευρά ορίζεται από την **5.31** και στη δεξιά έχουμε την εκθετική πράξη της πληθικής αριθμητικής.

x5.19. Για κάθε $n \neq 0$, $\mathfrak{c}^n =_c |\mathfrak{c}^*| =_c \mathfrak{c}$.

x5.20. Θεώρημα Ταυτόχρονης Αναδρομής. Ας είναι τα E_1, E_2 σύνολα, τα $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ στοιχεία, και οι $h_1 : E_1 \times E_2 \to E_1$, $h_2 : E_1 \times E_2 \to E_2$ συναρτήσεις· τότε υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις

$$f_1 : \mathbb{N} \to E_1, \quad f_2 : \mathbb{N} \to E_2$$

που ικανοποιούν τις ταυτότητες

$$\begin{aligned} f_1(0) &= a_1, & f_2(0) &= a_2, \\ f_1(n+1) &= h_1(f_1(n), f_2(n)), & f_2(n+1) &= h_2(f_1(n), f_2(n)). \end{aligned}$$

***x5.21. Θεώρημα Φωλιασμένης Αναδρομής**. Για οποιεσδήποτε τρείς συναρτήσεις

$$g : Y \to E,\ h : E \times \mathbb{N} \times Y \to E,\ \text{και } \pi : \mathbb{N} \times Y \to Y,$$

υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times Y \to E$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$f(0, y) = g(y), \quad f(Sn, y) = h(f(n, \pi(n, y)), n, y).$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Όρισε αναδρομικά συνάρτηση $\phi : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \to Y))$ έτσι ώστε η ζητούμενη συνάρτηση να είναι η $f(n, y) = \mathrm{Second}(\phi(n))(y)$.

x5.22. Όρισε αναδρομικά το *παραγοντικό*

$$f(n) = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n \quad (\text{με } f(0) = 1, \text{ συμβατικά}).$$

x5.23. Όρισε με «κλειστό» τύπο τη συνάρτηση $f : A^* \to A^*$ που ορίζεται με την ακόλουθη αναδρομή λέξεων:

$$f(\langle\ \rangle) = \langle\ \rangle, \quad f(u \star \{x\}) = \langle x \rangle \star f(u).$$

x5.24. Δείξε ότι η συνάρτηση ρ στην απόδειξη του **5.32** είναι αντιστοιχία.

***x5.25.** Κάθε μερική διάταξη $\leq$ σε ένα πεπερασμένο σύνολο P επιδέχεται **γραμμικοποίηση** (linearization), δηλαδή υπάρχει κάποια γραμμική διάταξη $\leq'$ του P τέτοια που $x \leq y \Longrightarrow x \leq' y$.

***x5.26. Το πρόβλημα της προξενήτρας** (the marriage problem). Έστω πεπερασμένο σύνολο B και συνάρτηση $h : B \to \mathcal{P}(G)$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in B$, το $h(x)$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του G, και

$$X \subseteq B \Longrightarrow \#(X) \leq \#(\bigcup \{h(x) \mid x \in X\}), \tag{5-24}$$

ειδικότερα $h(x) \neq \emptyset$ για κάθε $x \in B$. Δείξε ότι υπάρχει κάποιος μονομορφισμός $f : B \rightarrowtail G$ τέτοιος που

$$(\forall x \in B)[f(x) \in h(x)]. \tag{5-25}$$

Δείξε επίσης ότι η υπόθεση (5-24) είναι αναγκαία για την ύπαρξη κάποιας συνάρτησης f που να ικανοποιεί την (5-25). Υπόδειξη. Ξεχώρισε περιπτώσεις, ανάλογα με το αν υπάρχει ή όχι κάποιο σύνολο C με $\emptyset \neq C \subsetneq B$ και τέτοιο ώστε $\#(C) = \#(\bigcup \{h(x) \mid x \in C\})$.

Το πρόβλημα έχει πάρει το όνομά του από την παραδοσιακή ερμηνεία, όπου το B είναι σύνολο αγοριών, το G είναι σύνολο διαθέσιμων κοριτσιών και η h αντιστοιχίζει σε κάθε αγόρι το (πεπερασμένο) σύνολο $h(x)$ των κοριτσιών που ο x αποδέχεται για γάμο. Υπάρχουν πολλές άλλες, πιο χρήσιμες και λιγότερο αντιφεμινιστικές εφαρμογές αυτού του προβλήματος, π.χ. όπου το B είναι σύνολο μαθημάτων, το G είναι σύνολο καθηγητών και η h αντιστοιχίζει σε κάθε μάθημα το σύνολο των καθηγητών που μπορούν να το διδάξουν («το πρόβλημα του προγράμματος»).

Το επόμενο πρόβλημα δικαιώνει μια ακόμη μορφή αναδρομικών ορισμών που είναι χρήσιμη σε εφαρμογές.

x5.27. Πλήρης αναδρομή. Για κάθε $h : E^* \to E$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$f(n) = h(\overline{f}(n)).$$

Όμοια, για κάθε $h : E^* \times \mathbb{N} \to E$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ που ικανοποιεί την ταυτότητα

$$f(n) = h(\overline{f}(n), n).$$

Το επόμενο πρόβλημα δίνει ένα χαρακτηρισμό των άπειρων, απαριθμητών συνόλων κατευθείαν από τη σχέση του «ανήκειν», χωρίς αναφορά στις δευτερογενείς έννοιες των φυσικών αριθμών και των συναρτήσεων.

x5.28. Δείξε την ισοδυναμία:

$$\begin{aligned} A =_c \mathbb{N} \iff & (\exists \mathcal{E})[A = \bigcup \mathcal{E} \,\&\, \emptyset \in \mathcal{E} \,\&\, (\forall u \in \mathcal{E})(\exists ! y \notin u)[u \cup \{y\} \in \mathcal{E}] \\ & \quad \& \, (\forall Z)[[\emptyset \in Z \,\&\, (\forall u \in Z)(\exists ! y \notin u)[u \cup \{y\} \in Z \cap \mathcal{E}]] \Longrightarrow \mathcal{E} \subseteq Z]]. \end{aligned}$$