ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Συνόλων

Ενότητα: Σταθερά σημεία

Γιάννης Μοσχοβάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Σημειώματα

Σημείωμα ιστορικού εκδόσεων έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1. Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη στο σύνδεσμο http://www.math.ucla.edu/ ynm/lectures/g.pdf

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα αδειοδότησης

Διατήρηση σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΤΑΘΕΡΑ ΣΗΜΕΙΑ

Το Θεώρημα Αναδρομής **5.6** έχει κατά κύριο λόγο θεμελιακή σημασία, δικαιολογεί αξιωματικά έναν τρόπο ορισμού συναρτήσεων στους φυσικούς αριθμούς που είναι διαισθητικά προφανής. Από καθαρά μαθηματική άποψη όμως, μπορούμε να θεωρήσουμε το **5.6** ως θεώρημα *ύπαρξης και μοναδικότητας* λύσης για κάθε σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$\begin{aligned} f(0) &= a, \\ f(Sx) &= h(f(x)) \quad (x \in \mathbb{N}), \end{aligned} \tag{6-1}$$

όπου τα $a \in E$ και $h : E \to E$ είναι δεδομένα και η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ είναι *ο άγνωστος*. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε, στο πλαίσιο της θεωρίας μερικών διατάξεων, μια κομψή γενίκευση του Θεωρήματος Αναδρομής, που συνεπάγεται ύπαρξη λύσεων για συναρτησιακά συστήματα εξισώσεων πολύ γενικότερα του (6-1). Το Συνεχες Θεωρημα Ελαχιστου Σταθερου Σημειου **6.21** είναι θεμελιακό για τη *θεωρία υπολογισμού* (computation theory) και είναι το βασικό μαθηματικό στήριγμα της *ερμηνείας προγραμμάτων με σταθερά σημεία* (fixpoint theory of programs). Στο επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι είναι ειδική περίπτωση του πολύ βαθύτερου Θεωρηματος Σταθερου Σημειου του Zermelo, που είναι στενά συνδεδεμένο με τη θεωρία καλών διατάξεων και έχει ποικίλα και σημαντικά συνολοθεωρητικά πορίσματα, π.χ. συνεπάγεται αμέσως την Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων **3.1**. Έτσι εκτός από την καθαρά μαθηματική του σημασία, το Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου μας δίνει και ένα ενδιαφέρον σημείο επαφής της κλασικής συνολοθεωρίας με τη σύγχρονη πληροφορική.

Στην απλούστερή τους απόδοση, τα Θεωρήματα Σταθερού Σημείου είναι κάπως αφηρημένα και φαινομενικά άσχετα με τις εφαρμογές στη λύση συναρτησιακών συστημάτων για τις οποίες τα προορίζουμε. Για να τα καταλάβουμε, θα χρειαστούμε μερικές βασικές έννοιες και απλά αποτελέσματα από τη θεωρία μερικών διατάξεων.

6.1. Μερικά διατεταγμένος χώρος (partially ordered set ή απλούστερα poset) είναι ένα δομημένο σύνολο

$$P = (\mathrm{Field}(P), \leq_P),$$

Διαγραμμα **6.1**. Ένας διακριτός και ένας επίπεδος χώρος.

όπου το $\mathrm{Field}(P)$ είναι κάποιο σύνολο και η $\leq_P$ είναι μερική διάταξη στο $\mathrm{Field}(P)$, δηλαδή αυτοπαθής, μεταβατική και αντισυμμετρική σχέση. Η σχέση $\leq_P$ καθορίζει το P επειδή είναι αυτοπαθής,

$$x \in \mathrm{Field}(P) \iff x \leq_P x,$$

συνεπώς για να ορίσουμε ένα μερικά διατεταγμένο χώρο P αρκεί να ορίσουμε τη μερική διάταξή του $\leq_P$. Στην πράξη όμως, συχνά ισχύει το αντίθετο: η $\leq_P$ είναι προφανής από τα συμφραζόμενα και για να καθορίσουμε το P αρκεί να δώσουμε το πεδίο $\mathrm{Field}(P)$. Τυπικά θα ταυτίζουμε το P με το πεδίο του $\mathrm{Field}(P)$, ακολουθώντας τη γενική τακτική για δομημένα σύνολα που εξηγήσαμε στο **4.30**. Με τον *διατεταγμένο χώρο* $\mathbb{N}$, π.χ. ή και απλούστερα το *χώρο*[12] $\mathbb{N}$, προφανώς εννοούμε το ζεύγος $(\mathbb{N}, \leq)$, όπου η $\leq$ είναι η συνήθης διάταξη στους φυσικούς αριθμούς. *Τα σημεία του χώρου* P είναι τα μέλη του $\mathrm{Field}(P)$, με *υποσύνολο* $I \subseteq P$ εννοούμε υποσύνολο $I \subseteq \mathrm{Field}(P)$ κ.λπ. Κάθε $I \subseteq P$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος, με τον περιορισμό της $\leq_P$ στο I,

$$x \leq_I y \iff_{\text{ορ}} x \leq_P y \,\&\, x \in I \,\&\, y \in I, \tag{6-2}$$

η οποία είναι (εύκολα) μερική διάταξη. Πιο συχνά θα εργαζόμαστε με χώρους που έχουν ελάχιστο στοιχείο, και είναι βολικό να ονομάζουμε όλα αυτά τα ελάχιστα με το ίδιο σύμβολο $\perp$ (που διαβάζεται «πάτος»), όπως ακριβώς χρησιμοποιούμε το 0 για το ουδέτερο της πρόσθεσης κάθε αριθμητικού συστήματος:

$$\perp = \perp_P =_{\text{ορ}} \text{το ελάχιστο στοιχείο του } P \text{ (αν υπάρχει)}. \tag{6-3}$$

Οποιοδήποτε σύνολο A μπορεί να θεωρηθεί ως **διακριτός χώρος** (discrete poset), μερικά διατεταγμένος από τη σχέση ισότητας

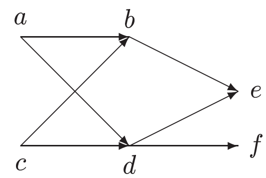
$$x \leq y \iff x = y \quad (x, y \in A).$$

Κάπως πιο περίπλοκοι από τους διακριτούς είναι οι **επίπεδοι χώροι** (flat posets) που έχουν ελάχιστο στοιχείο, το μόνο που είναι συγκρίσιμο με κάποιο άλλο· δηλαδή

$$x \leq_P y \iff x = \perp \vee x = y.$$

Ο απλούστατος χώρος είναι το μονοσύνολο $\{\perp\}$, που είναι διακριτός και επίπεδος. Εκτός από αυτούς τους απλούς χώρους και τον $\mathbb{N}$, υπάρχουν και οι χώροι $\mathbb{Q}$

[12] Στα αγγλικά αντικαθιστούν το άβολα μεγάλο *partially ordered set* με τη φτιαχτή, μαθηματική λέξη «poset». Επειδή μου λείπει το θράσος να κατασκευάζω (συνειδητά) καινούργιες ελληνικές λέξεις, αλλά και κουράζεται κανείς να επαναλαμβάνει συνεχώς «μερικά διατεταγμένος χώρος», «τοπολογικός χώρος» και τα τοιαύτα, συχνά θα λέμε απλώς «χώρος», και το τι χώρος είναι θα πρέπει να καθορίζεται από τα συμφραζόμενα.



Διαγραμμα **6.2**. Ένας πεπερασμένος μερικά διατεταγμένος χώρος.

και $\mathbb{R}$ των ρητών και των πραγματικών αριθμών, τους οποίους δεν έχουμε ακόμη ορίσει αυστηρά από τα αξιώματα. Αυτοί είναι γραμμικοί (ολικά διατεταγμένοι) χώροι. Επιπλέον υπάρχει και μια πλούσια ποικιλία πεπερασμένων χώρων, των οποίων η μελέτη αποτελεί διαφορετικό και ενδιαφέροντα κλάδο των μαθηματικών, αλλά δεν θα πούμε πολλά γι' αυτούς εδώ. Κυρίως θα τους επικαλεστούμε ως αντιπαραδείγματα. Σε διαγράμματα χώρων απεικονίζουμε συμβατικά τη σχέση *$x < y$ τοποθετώντας το y στα δεξιά ή πάνω από το x και ενώνοντας τα x και y με μία γραμμή* (ενδεχομένως με βέλος προς αποφυγή σύγχυσης), που μπορεί να περιέχει και άλλα σημεία, π.χ. $c < e$ στο Διάγραμμα **6.2**.[13]

6.2. Ορισμός. Έστω P μερικά διατεταγμένος χώρος, $S \subseteq P$ και $M \in P$ στοιχείο του P.

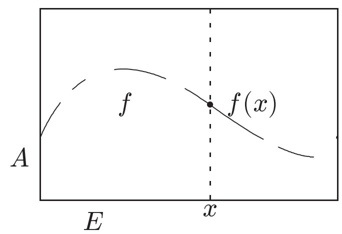
1. Το M είναι ένα **άνω φράγμα** (upper bound) του S, αν είναι μεγαλύτερο-ίσο κάθε μέλους του S, $(\forall x \in S)[x \leq M]$
2. Το M είναι **μέγιστο** (maximum) του S αν είναι άνω φράγμα και μέλος του S, δηλαδή $M \in S \,\&\, (\forall x \in S)[x \leq M]$.
3. Το M είναι **ελάχιστο άνω φράγμα** (supremum, least upper bound) του S αν είναι άνω φράγμα και μικρότερο-ίσο κάθε άνω φράγματος του S,
$$(\forall x \in S)[x \leq M] \,\&\, (\forall M')[(\forall x \in S)[x \leq M'] \Longrightarrow M \leq M'].$$

Αν τα M_1, M_2 είναι και τα δύο ελάχιστα άνω φράγματα του S, τότε $M_1 \leq M_2$ (επειδή το M_2 είναι άνω φράγμα και το M_1 είναι ελάχιστο άνω φράγμα) και συμμετρικά $M_2 \leq M_1$, άρα $M_1 = M_2$· δηλαδή το S έχει το πολύ ένα ελάχιστο άνω φράγμα. Όταν υπάρχει, το ελάχιστο άνω φράγμα ενός συνόλου S συμβολίζεται με

$$\sup S = \text{το ελάχιστο άνω φράγμα του } S. \tag{6-4}$$

Η ονομασία «sup» από το Λατινικό *supremum* (μέγιστο) δικαιολογείται από το εξής απλό αποτέλεσμα:

[13] Μερικοί απεικονίζουν χώρους να μεγαλώνουν *προς τα δεξιά*, άλλοι *προς τα πάνω* και ακόμη μερικοί τους απεικονίζουν να μεγαλώνουν *προς τα κάτω*· απ' όσο ξέρω κανείς δεν απεικονίζει διαγράμματα όπου οι χώροι μεγαλώνουν προς τα αριστερά, και καμία μέθοδος δεν είναι γενικά αποδεκτή.



Διαγραμμα **6.3**. Μια μερική συνάρτηση $f : A \rightharpoonup E$.

6.3. Άσκηση. *Αν το M είναι μέγιστο του S σε κάποιο χώρο P, τότε το M είναι επίσης το ελάχιστο άνω φράγμα του S.*

6.4. Άσκηση. *Στο παράδειγμα του Διαγράμματος* **6.2** *βρείτε υποσύνολα S με τις ακόλουθες ιδιότητες: (1) Το S δεν έχει άνω φράγμα. (2) Το S έχει άνω φράγματα, αλλά δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα. (3) Το S έχει ελάχιστο άνω φράγμα, αλλά δεν έχει μέγιστο στοιχείο.*

6.5. Άσκηση. *Για κάθε χώρο P και $M \in P$, το M είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του κενού $\emptyset$ αν και μόνον αν είναι το ελάχιστο του P, δηλαδή*

$$\perp = \sup \emptyset \tag{6-5}$$

αν υπάρχει το $\perp$ ή το $\sup \emptyset$.

6.6. Άσκηση. *Το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(A)$ κάθε συνόλου A είναι μερικά διατεταγμένο από τη σχέση*

$$X \subseteq_A Y \iff_{\text{ορ}} X \subseteq Y \subseteq A,$$

έτσι που $\perp = \emptyset$ και για κάθε $S \subseteq \mathcal{P}(A)$, η ένωση $\bigcup S$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του S.[14]

Λιγότερο τετριμμένο και πιο χρήσιμο για τους σκοπούς μας εδώ είναι το επόμενο παράδειγμα μερικά διατεταγμένου χώρου.

6.7. Ορισμός. Μερική συνάρτηση (partial function) από το σύνολο A στο σύνολο E καλείται κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του A και τιμές στο E, συμβολικά

$$f : A \rightharpoonup E \iff_{\text{ορ}} \text{Function}(f) \,\&\, \text{Domain}(f) \subseteq A \,\&\, \text{Image}(f) \subseteq E. \tag{6-6}$$

Για παράδειγμα, η $(n \mapsto (n-1))$ είναι μερική συνάρτηση στους φυσικούς αριθμούς ορισμένη μόνον όταν $n \neq 0$, η $(x \mapsto \sqrt{x})$ είναι μερική συνάρτηση στους πραγματικούς αριθμούς με πεδίο ορισμού $\{x \mid x \geq 0\}$ κ.λπ. Με τον ορισμό που δώσαμε στο **5.30**, μια πεπερασμένη ακολουθία $u \in A^*$ είναι μερική συνάρτηση $u : \mathbb{N} \rightharpoonup A$. Επίσης, το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι (τετριμμένα) μερική

[14] Σχολαστικά, η μερική διάταξη του $\mathcal{P}(A)$ είναι ο περιορισμός $\subseteq_A$ της οριστικής συνθήκης $X \subseteq Y$ στο $\mathcal{P}(A)$, και συχνά παραλείπουμε τον δείκτη όταν αναφερόμαστε σε αυτό, βλ. **4.8**.

συνάρτηση (με κενό πεδίο ορισμού!) και κάθε (ολική) συνάρτηση από το A στο E είναι και μερική συνάρτηση, αφού η (6-6) δεν αποκλείει το $\mathrm{Domain}(f) = A$,

$$\emptyset : A \rightharpoonup E, \quad f : A \to E \Longrightarrow f : A \rightharpoonup E.$$

Θα χρησιμοποιούμε συστηματικά τον βολικό συμβολισμό με το μισό βελάκι (πρόσφατα καθιερωμένο στην πληροφορική), ως επίσης και τους εξής κοινούς συμβολισμούς

$$f(x)\downarrow \Longleftrightarrow_{\text{ορ}} x \in \mathrm{Domain}(f), \quad f(x)\uparrow \Longleftrightarrow_{\text{ορ}} x \notin \mathrm{Domain}(f) \tag{6-7}$$

για να υποδείξουμε ότι μια μερική συνάρτηση είναι ή δεν είναι ορισμένη σε κάποιο σημείο· διαβάζουμε το $f(x)\downarrow$ σαν *η $f(x)$ συγκλίνει* ή σαν *η f συγκλίνει στο x*, και το $f(x)\uparrow$ σαν *η $f(x)$ αποκλίνει* ή σαν *η f αποκλίνει στο x*.

6.8. Ορισμός. Για κάθε A και κάθε E, το

$$(A \rightharpoonup E) =_{\text{ορ}} \{f \subseteq A \times E \mid f : A \rightharpoonup E\} \tag{6-8}$$

είναι το σύνολο όλων των μερικών συναρτήσεων από το A στο E, κατ' αναλογία με το συμβολισμό $(A \to E)$ για το σύνολο των (ολικών) συναρτήσεων από το A στο E, βλ. **4.14**. Ο χώρος $(A \rightharpoonup E)$ είναι μερικά διατεταγμένος από τη σχέση $\subseteq$,

$$f \subseteq g \iff (\forall x \in A)[f(x)\downarrow \Longrightarrow [g(x)\downarrow \;\&\; f(x) = g(x)]],$$

με ελάχιστο στοιχείο $\perp = \emptyset$.

6.9. Άσκηση. *Για όλα τα σύνολα A, E,*

$$(A \rightharpoonup E) = \{f \restriction X \mid f : A \to E \,\&\, X \subseteq A\}.$$

Οι περιορισμοί συναρτήσεων ορίστηκαν στην (4-13).

Είναι δυσκολότερο να εντοπίσουμε ελάχιστα άνω φράγματα συνόλων σε αυτούς τους χώρους μερικών συναρτήσεων παρά στα δυναμοσύνολα: αν το υποσύνολο $S \subseteq (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$ περιέχει τις δύο (ολικές) συναρτήσεις $x \mapsto 0$ και $x \mapsto 1$, τότε κάθε άνω φράγμα $f : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ του S θα πρέπει να ικανοποιεί τις αντιφατικές εξισώσεις $f(0) = 0$ και $f(0) = 1$. Από την άλλη μεριά, γραμμικά διατεταγμένα υποσύνολα των χώρων $(A \rightharpoonup E)$ πάντα έχουν ελάχιστο άνω φράγμα, και αυτή τους η ιδιότητα είναι χρήσιμη και άξια ονομασίας.

6.10. Ορισμός. Ένα υποσύνολο $S \subseteq P$ διατεταγμένου χώρου P είναι **αλυσίδα** (chain) αν τα μέλη του S είναι συγκρίσιμα ανά δύο, δηλαδή

$$(\forall x, y \in S)[x \leq y \vee y \leq x].$$

Ο χώρος P είναι **επαγωγικός** (inductive ή chain-complete), αν κάθε αλυσίδα στο P έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

6.11. Άσκηση. *Το κενό σύνολο είναι* (τετριμμένα) *αλυσίδα, επομένως κάθε επαγωγικός χώρος έχει ελάχιστο σημείο $\perp = \sup \emptyset$.*

6.12. Άσκηση. *Κάθε επίπεδος χώρος είναι επαγωγικός· ένας διακριτός χώρος είναι επαγωγικός αν και μόνον αν έχει μόνο ένα στοιχείο, οπότε είναι και επίπεδος.*

6.13. Άσκηση. *Η εικόνα* $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *μιας μη φθίνουσας ακολουθίας*

$$x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ \cdots$$

είναι αλυσίδα· άρα κάθε μη φθίνουσα ακολουθία έχει **όριο** (limit) *σε επαγωγικό χώρο,*

$$\lim_n x_n =_{\mathsf{op}} \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{6-9}$$

6.14. Πρόταση. (1) *Κάθε δυναμοσύνολο* $\mathcal{P}(A)$ *είναι επαγωγικός χώρος.*

(2) *Για όλα τα σύνολα* A, E, *ο χώρος* $(A \rightharpoonup E)$ *των μερικών συναρτήσεων από το* A *στο* E *είναι επαγωγικός.*

(3) *Για κάθε μερικά διατεταγμένο χώρο* P, *το σύνολο*

$$\text{Chains}(P) = \{S \subseteq P \mid S \text{ είναι αλυσίδα}\}$$

των αλυσίδων στο P (μερικά διατεταγμένος από την $\subseteq$) *είναι επαγωγικός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το (1) έπεται άμεσα από την Άσκηση **6.6**. (2) Αν το $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$ είναι αλυσίδα, τότε η ένωση $\bigcup S$ είναι μερική συνάρτηση και προφανώς, $\bigcup S = \sup S$. (3) Με τον ίδιο τρόπο, η ένωση μιας αλυσίδας αλυσίδων είναι (εύκολα) αλυσίδα. $\dashv$

6.15. Άσκηση. *Ούτε ο* $\mathbb{N}$ (με τη συνήθη διάταξη) *ούτε ο πεπερασμένος χώρος του Διαγράμματος* **6.2** *είναι επαγωγικοί.*

6.16. Άσκηση. *Για κάθε* E, *το σύνολο* $P = E^* \cup (\mathbb{N} \to E)$ *των πεπερασμένων και άπειρων ακολουθιών από το* E *είναι επαγωγικός χώρος, με τη μερική διάταξη* $\subseteq$.

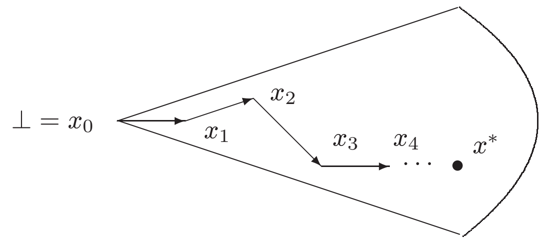
6.17. Άσκηση. *Για όλα τα σύνολα* A, E *ο χώρος*

$$(A \rightarrowtail E) =_{\mathsf{op}} \{f \in (A \rightharpoonup E) \mid \text{η } f \text{ είναι ένα-προς-ένα}\}$$

των **μερικών μονομορφισμών** *από το* A *στο* E (μερικά διατεταγμένος από τη $\subseteq$) *είναι επαγωγικός.*

Σ' αυτούς τους χώρους —και στους υποχώρους τους— βρίσκουν τις σημαντικότερές τους εφαρμογές τα θεωρήματα σταθερού σημείου· όμως στις αποδείξεις θα χρησιμοποιήσουμε μόνο το ότι είναι επαγωγικοί, καθώς υπάρχουν κι άλλα πολλά ενδιαφέροντα παραδείγματα. Μερικά από αυτά περιγράφονται στα προβλήματα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Ήρθε η ώρα να ορίσουμε τις συναρτήσεις στους επαγωγικούς χώρους που έχουν πάντα σταθερά σημεία.



Διαγραμμα **6.4**. Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου.

6.18. Ορισμός. Μια απεικόνιση[15] $\pi : P \to Q$ από ένα χώρο P σε κάποιον άλλο είναι **μονοτονική** (monotone) αν για για όλα τα $x, y \in P$,

$$x \leq_P y \Longrightarrow \pi(x) \leq_Q \pi(y).$$

Μονοτονικές απεικονίσεις δεν είναι απαραίτητα (αυστηρά) αύξουσες με την έννοια του

$$x <_P y \Longrightarrow \pi(x) <_Q \pi(y),$$

π.χ. κάθε σταθερή απεικόνιση είναι μονοτονική.

Παρατηρούμε ότι αν η $\pi : P \to Q$ είναι μονοτονική και το $S \subseteq P$ είναι αλυσίδα, τότε η εικόνα $\pi[S]$ είναι επίσης αλυσίδα· επειδή για όλα τα $x = \pi(u)$, $y = \pi(v)$ με $u, v \in S$, είτε $u \leq v$, που συνεπάγεται $x = \pi(u) \leq \pi(v) = y$, είτε $v \leq u$, που συνεπάγεται $y \leq x$. Συνεπώς ο όρος $\sup \pi[S]$ έχει νόημα στον επόμενο ορισμό.

6.19. Ορισμός. Μια μονοτονική απεικόνιση $\pi : P \to Q$ από έναν επαγωγικό χώρο σε κάποιον άλλο είναι **αριθμήσιμα συνεχής** (countably continuous) αν για κάθε μη κενή, απαριθμητή αλυσίδα $S \subseteq P$,

$$\pi(\sup S) = \sup \pi[S].$$

6.20. Άσκηση. *Μια μονοτονική απεικόνιση $\pi : P \to Q$ από έναν επαγωγικό χώρο σε κάποιον άλλο είναι αριθμήσιμα συνεχής τότε και μόνον αν για κάθε μη φθίνουσα ακολουθία $x_0 \leq_P x_1 \leq_P \ \ldots$ του P,*

$$\pi(\lim_n x_n) = \lim_n \pi(x_n).$$

Εδώ το όριο στα αριστερά υπολογίζεται στον P και αυτό στα δεξιά στον Q.

[15] Συχνά καλούμε την $\pi : P \to Q$ «απεικόνιση» αντί για «συνάρτηση» (που σημαίνει ακριβώς το ίδιο πράγμα), επειδή στις περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν, το P είναι κάποιος συναρτησιακός χώρος $(A \rightharpoonup E)$, και το Q επίσης, επομένως όλα τα αντικείμενα στην εξίσωση $\pi(x) = y$ είναι συναρτήσεις και ζαλίζεται κανείς. Παρατηρήστε επίσης ότι (σχολαστικά) η $\pi : \mathrm{Field}(P) \to \mathrm{Field}(Q)$ είναι απεικόνιση από το πεδίο του P σε αυτό του Q.

6.21. Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου (Continuous Least Fixed Point Theorem). *Κάθε αριθμήσιμα συνεχής, μονοτονική απεικόνιση* $\pi : P \to P$ *από έναν επαγωγικό χώρο στον εαυτό του έχει ακριβώς ένα* **ισχυρά ελάχιστο σταθερό σημείο** (strongly least fixed point) x^*, *που χαρακτηρίζεται από τις δύο ιδιότητες:*

$$\pi(x^*) = x^*, \tag{6-10}$$
$$(\forall y \in P)[\pi(y) \leq y \Longrightarrow x^* \leq y]. \tag{6-11}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η **τροχιά** (orbit) του ελάχιστου $\perp$ από την π ορίζεται με την αναδρομή

$$x_0 = \perp,$$
$$x_{n+1} = \pi(x_n).$$

Προφανώς $x_0 = \perp \leq x_1$, και με τετριμμένη επαγωγή (χρησιμοποιώντας τη μονοτονικότητα της π), για κάθε n, $x_n \leq x_{n+1}$. Έτσι το όριο

$$x^* =_{\text{ορ}} \lim_n x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \tag{6-12}$$

υπάρχει από την **6.13**, και από την αριθμήσιμη συνέχεια της π,

$$\pi(x^*) = \pi(\lim_n x_n) = \lim_n \pi(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x^*.$$

Για να αποδείξουμε τη δεύτερη χαρακτηριστική ιδιότητα του x^*, δεχόμαστε ότι $\pi(y) \leq y$ και δείχνουμε επαγωγικά ότι για κάθε n, $x_n \leq y$. ΒΑΣΗ. $x_0 = \perp \leq y$, τετριμμένα. ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ. Η Επαγωγική Υπόθεση μας δίνει $x_n \leq y$, και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} x_n \leq y &\Longrightarrow \pi(x_n) \leq \pi(y), && \text{(επειδή η } \pi \text{ είναι μονοτονική)},\\ &\Longrightarrow x_{n+1} \leq \pi(y) \leq y, && \text{(από την υπόθεση για το } y). \end{aligned}$$

Άρα το y είναι άνω φράγμα της αλυσίδας $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, και συμπεραίνουμε ότι $x^* = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq y$. ⊣

Για να εφαρμόσουμε το Συνεχές Θεώρημα Σταθερού Σημείου, πρέπει πρώτα να διατυπώσουμε το πρόβλημά μας ως ερώτηση για την ύπαρξη και (μερικές φορές) τη μοναδικότητα λύσεων εξίσωσης της μορφής $\pi(x) = x$, όπου η $\pi : P \to P$ είναι μονοτονική και αριθμήσιμα συνεχής σε κάποιον επαγωγικό χώρο P. Τυπικά αυτό είναι και το πιο δύσκολο μέρος της λύσης: να φέρουμε το πρόβλημα σε μορφή στην οποία εφαρμόζεται το **6.21**. *Δεν είναι αναγκαίο να επαληθεύσουμε ότι η* π *είναι αριθμήσιμα συνεχής*: στο επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι το **6.21** *παραμένει αληθές αν απλώς αφαιρέσουμε την υπόθεση αριθμήσιμης συνέχειας της* π. Οπωσδήποτε, οι περισσότερες εφαρμογές αφορούν απλές μονοτονικές απεικονίσεις σε χώρους μερικών συναρτήσεων για τις οποίες μπορούμε συχνά να αναγνωρίσουμε αμέσως μια πολύ ισχυρότερη φυσική ιδιότητα συνέχειας.

6.22. Ορισμός. Η μερική συνάρτηση $g : A \rightharpoonup E$ είναι **πεπερασμένη** αν έχει πεπερασμένο πεδίο ορισμού, δηλαδή αν είναι πεπερασμένο σύνολο ζευγών.

Η απεικόνιση $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$ από ένα χώρο μερικών συναρτήσεων σε κάποιον άλλο είναι **συνεχής**, αν είναι **μονοτονική** και **συμπαγής**, δηλαδή για κάθε $f : A \rightharpoonup E$, και όλα τα $y \in B$ και $v \in M$,

$$\pi(f)(y) = v \Longrightarrow (\exists f_0 \subseteq f)[\eta\ f_0 \text{ είναι πεπερασμένη} \,\&\, \pi(f_0)(y) = v]. \qquad (6\text{-}13)$$

Ο συμβολισμός δεν βοηθάει, αλλά η έννοια είναι αρκετά απλή: για να υπολογίσουμε την τιμή $\pi(f)(y)$, πρώτα υπολογίζουμε τη μερική συνάρτηση $f' = \pi(f)$ και μετά υπολογίζουμε την τιμή της στο y, $\pi(f)(y) = f'(y)$. Η μονοτονική π είναι συνεχής, αν κάθε (συγκλίνουσα) τιμή $\pi(f)(y)$ της $\pi(f)$ εξαρτάται μόνο από πεπερασμένο πλήθος τιμών της f. Μπορούμε να συνδυάσουμε τις έννοιες της μονοτονικότητας και της συμπάγειας στον ακόλουθο χαρακτηρισμό της συνέχειας απεικονίσεων χώρων μερικών συναρτήσεων, ο οποίος μας επιτρέπει να αναγνωρίζουμε άμεσα τη συνέχειά τους.

6.23. Πρόταση. *Η απεικόνιση $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$ είναι συνεχής αν και μόνον αν ικανοποιεί την* (6-13) *και την αντίστροφή της, δηλαδή αν για κάθε $f : A \rightharpoonup E$, και για όλα τα $y \in B$ και $v \in M$:*

$$\pi(f)(y) = v \iff (\exists f_0 \subseteq f)[\eta\ f_0 \text{ είναι πεπερασμένη} \,\&\, \pi(f_0)(y) = v]. \quad (6\text{-}13^*)$$

Για παράδειγμα, η απεικόνιση $\pi : (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$ που ορίζεται με τον τύπο

$$\pi(f) = (n \mapsto f(n) + f(n^2))$$

είναι συνεχής, επειδή (προφανώς) για κάθε f και n, ισχύει

$$\pi(f)(n) = \pi(f_0)(n),$$

όπου f_0 είναι ο περιορισμός της f στο δισύνολο $\{n, n^2\}$.

Αποδειξη της **6.23**. Αρχικά δεχόμαστε ότι: η π είναι συνεχής, $f : A \rightharpoonup E$, $y \in B$, και $v \in M$. Αν $\pi(f)(y) = b$, τότε από τη συμπάγεια της π, υπάρχει πεπερασμένη $f_0 \subseteq f$ με $\pi(f_0)(y) = v$· κι έτσι, από τη μονοτονικότητα της π, έπεται ότι $\pi(f)(y) = v$.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι η (6-13*) ισχύει για κάθε $f : A \rightharpoonup E$ και όλα τα $y \in B$, $v \in M$. Έτσι έπεται άμεσα η συμπάγεια της π. Για να επαληθεύσουμε ότι η π είναι μονοτονική, δεχόμαστε ότι $f \subseteq g$ και $\pi(f)(y) = v$· από την κατεύθυνση $\Longrightarrow$ της (6-13*), υπάρχει κάποια πεπερασμένη $f_0 \subseteq f$ με $\pi(f_0)(y) = v$. Όμως $f_0 \subseteq g$, κι άρα από την κατεύθυνση $\Longleftarrow$ της (6-13*), $\pi(g)(y) = v$. ⊣

6.24. Άσκηση. *Δείξε ότι η απεικόνιση $\pi : (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$ ορισμένη με τον τύπο*

$$\pi(f) = (n \mapsto \Sigma_{i=0}^{n} f(i))$$

είναι συνεχής. Υπολογίστε την τιμή $\pi(n \mapsto 2n)(2)$.

6.25. Ορισμός. Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από έναν τοπολογικό χώρο σε κάποιον άλλο είναι (τοπολογικά) **συνεχής** (continuous), αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[G]$ κάθε ανοικτού συνόλου στον Y είναι ανοικτό σύνολο στον X. **Τοπολογικοί χώροι** ορίστηκαν στο **4.30**, σαν πρώτο παράδειγμα δομημένων συνόλων.

6.26. Άσκηση. *Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ από έναν τοπολογικό χώρο σε κάποιον άλλο είναι συνεχής τότε και μόνον αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[F]$ κάθε κλειστού συνόλου στον Y είναι κλειστό σύνολο στον X.*

Θα μπορούσε κανείς να υποθέσει ότι οι συνεχείς απεικονίσεις του Ορισμού **6.22** έχουν κάτι κοινό με τις συνεχείς συναρτήσεις της τοπολογίας, και βέβαια δεν θα είχε άδικο: οι έννοιες είναι ισοδύναμες με τον σωστό ορισμό τοπολογίας στους χώρους μερικών διατάξεων, αλλά αυτό το αποτέλεσμα δεν μας χρειάζεται και το αφήνουμε για το Πρόβλημα **x6.21**.

6.27. Περί τοπολογίας γενικά. Η λεγόμενη Γενική Τοπολογία (Τοπολογία Σημειοσυνόλων) είναι για τη συνολοθεωρία σαν το μαϊντανό, μπαίνει λίγο παντού, αλλά δεν υπάρχουν περιώνυμες συνταγές «πιάτων μαϊντανού» που ο επίδοξος Έλληνας μάγειρας πρέπει να μάθει. Πολλές τοπολογικές ιδέες σχετίζονται με τη θεωρία συνόλων, αλλά πολύ σπάνια μπορείς να αποδείξεις ένα ενδιαφέρον θεώρημα για τα σύνολα με χρήση κάποιου σημαντικού αποτελέσματος από την τοπολογία. Για να μη χαθούμε σε παραδρόμια, θα ακολουθήσουμε την πάγια τακτική να δίνουμε τους πιο άμεσους, συνολοθεωρητικά φυσικούς ορισμούς και αποδείξεις για τις έννοιες και τα αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν, και θα αφήσουμε τις σχέσεις με την τοπολογία για τα προβλήματα. Σε μερικές περιπτώσεις, βεβαίως, η πιο φυσική προσπέλαση είναι πράγματι η τοπολογική.

6.28. Λήμμα. *Αν το $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$ είναι μη κενή αλυσίδα σε χώρο μερικών συναρτήσεων και η $f_0 \subseteq \sup S$ είναι πεπερασμένη συνάρτηση, τότε υπάρχει κάποια $g \in S$ τέτοια ώστε $f_0 \subseteq g$.*

Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε επαγωγή στον αριθμό των στοιχείων του πεδίου της f_0:

Βάση. Η κενή $f_0 = \emptyset$ είναι η μερική συνάρτηση που δεν ορίζεται πουθενά. Υπάρχει κάποια $g \in S$ αφού το S δεν είναι κενό, και $\emptyset \subseteq g$.

Επαγωγικό Βήμα. Το πεδίο της f_0 έχει $n+1$ μέλη, άρα

$$f_0 = f_1 \cup \{(x, w)\} \subseteq \sup S,$$

όπου η f_1 είναι πεπερασμένη, μερική συνάρτηση με μόνο n στοιχεία στο πεδίο της, και από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει κάποια $g_1 \in S$ τέτοια ώστε $f_1 \subseteq g_1$. Εφόσον $(x, w) \in \sup S$, πρέπει να υπάρχει κάποια $h' \in S$ τέτοια ώστε $(x, w) \in h'$, και αφού το S είναι αλυσίδα, είτε $g_1 \subseteq h'$ είτε $h' \subseteq g_1$· η g που χρειαζόμαστε είναι η μεγαλύτερη από αυτές τις δύο μερικές συναρτήσεις. ⊣

6.29. Λήμμα. *Κάθε συνεχής απεικόνιση $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$ είναι αριθμήσιμα συνεχής, μάλιστα για κάθε μη κενή* (όχι απαραίτητα απαριθμητή) *αλυσίδα $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$,*

$$\pi(\sup S) = \sup \pi[S].$$

Απόδειξη. Έστω ότι το $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$ είναι μη κενή αλυσίδα με ένωση $f = \sup S$. Αν $g \in S$, τότε $g \leq f$, κι αφού η π είναι μονοτονική έχουμε $\pi(g) \leq \pi(f)$, έτσι που

$$\sup \pi[S] = \sup \{\pi(g) \mid g \in S\} \leq \pi(f).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, πρέπει να δείξουμε ότι αν $\pi(f)(y) = v$, τότε υπάρχει κάποια $g \in S$ τέτοια ώστε $\pi(g)(y) = v$. Από την ισχυρή συνέχεια της π, υπάρχει κάποια πεπερασμένη $f_0 \subseteq f$, τέτοια ώστε $\pi(f_0)(y) = v$· από το προηγούμενο Λήμμα, υπάρχει κάποια $g \in S$ τέτοια ώστε $f_0 \subseteq g$· και με τη μονοτονικότητα της π, αυτό συνεπάγεται ότι $\pi(f_0) \subseteq \pi(g)$. Ειδικότερα, $\pi(f_0)(y) = v$, άρα $\pi(g)(y) = v$ και αυτή είναι η g που χρειαζόμαστε. ⊣

Προφανώς το Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σημείου είναι απλό πόρισμα του Θεωρήματος Αναδρομής στους φυσικούς αριθμούς **5.6**. Επίσης όμως συνεπάγεται το **5.6**, με έναν ευθύ συλλογισμό που αξίζει διερεύνηση, επειδή επεξηγεί τον βασικό τρόπο με τον οποίο εφαρμόζουμε το **6.21**.

6.30. Απόδειξη του Θεωρήματος Αναδρομής από το 6.21. Για κάθε $a \in E$ και κάθε συνάρτηση $h : E \to E$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\pi : (\mathbb{N} \rightharpoonup E) \to (\mathbb{N} \rightharpoonup E)$$

με τον τύπο

$$\pi(f) = f', \text{ όπου } f'(x) = \begin{cases} a, \text{ αν } x = 0, \\ h(f(x-1)), \text{ αν } x > 0, \end{cases}$$

Εδώ η f είναι μερική συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο E και ερμηνεύουμε τον ορισμό με τον φυσικό τρόπο, έτσι που

$$x > 0 \Longrightarrow [f'(x)\downarrow \iff h(f(x-1))\downarrow \iff f(x-1)\downarrow].$$

Σχολαστικά, η απεικόνιση π αντιστοιχίζει ένα σύνολο ζευγών $f' \subseteq (\mathbb{N} \times E)$ σε κάθε $f \in (\mathbb{N} \rightharpoonup E)$ και ορίζεται με την εξίσωση

$$\begin{aligned} \pi(f) = \{(0, a)\} & \\ & \bigcup \{(x, h(w)) \mid x > 0 \,\&\, (x-1, w) \in f\} \quad (f : \mathbb{N} \rightharpoonup E). \end{aligned} \tag{6-14}$$

Από αυτό έπεται ότι για κάθε f και κάθε x,

$$\pi(f)(x) = \pi(f_0)(x),$$

όπου $f_0 = \{(0, a)\}$ αν $x = 0$ και $f_0 = \{(x-1, f(x-1))\}$ αν $x > 0$, κι έτσι η π είναι συνεχής από την Πρόταση **6.23**, κι άρα αριθμήσιμα συνεχής. Έτσι, από την **6.21**, έχει ένα σταθερό σημείο: με άλλα λόγια, υπάρχει μερική συνάρτηση $f^* : \mathbb{N} \rightharpoonup E$ που ικανοποιεί την $f^* = \pi(f^*)$, και αμέσως

$$f^*(0) = a, \tag{6-15}$$

$$f^*(x+1) = h(f^*(x)) \quad (f^*(x)\downarrow). \tag{6-16}$$

Το Θεώρημα **6.21** δεν εγγυάται ότι αυτή η f^* είναι *ολική συνάρτηση*, με πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{N}$, αλλά αυτό επαληθεύεται εύκολα με επαγωγή στο x, χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες (6-15), (6-16). ⊣

Θεωρούμε τώρα μια πιο ενδιαφέρουσα εφαρμογή, όπου δεν είναι τόσο προφανές πώς να ορίσουμε τη συνάρτηση που χρειαζόμαστε κατευθείαν από το Θεώρημα Αναδρομής.

6.31. Πρόταση. *Για κάθε συνάρτηση* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *και κάθε άπειρο σύνολο* $A \subseteq \mathbb{N}$ *φυσικών αριθμών, υπάρχει* (ολική) *συνάρτηση* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *που ικανοποιεί τις ταυτότητες:*

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \in A, \\ h(f(n+1)), & \text{αν } n \notin A. \end{cases} \tag{6-17}$$

Αποδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\pi : (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$$

στον επαγωγικό χώρο όλων των μερικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής στο $\mathbb{N}$, με τον τύπο

$$\pi(f) = f', \text{ όπου } f'(n) = \begin{cases} 0, \text{ αν } n \in A, \\ h(f(n+1)), \text{ αν } n \notin A. \end{cases} \tag{6-18}$$

Λεπτομερέστερα, αυτό σημαίνει ότι θέτουμε

$$\pi(f) = \{(n,0) \mid n \in A\} \cup \{(n, h(w)) \mid n \notin A \,\&\, (n+1, w) \in f\},$$

που συνεπάγεται από τη μορφή της ότι η π είναι συνεχής, άρα αριθμήσιμα συνεχής. Επομένως έχει ένα σταθερό σημείο f που ικανοποιεί την (6-17), και αρκεί να αποδείξουμε ότι αυτή η f είναι ολική. Ας δεχτούμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $f(n)\uparrow$ για κάποιο n. Παρατηρούμε ότι από την (6-17) αυτό συνεπάγεται ότι $n \notin A$, αλλιώς $f(n)\downarrow$, και μάλιστα $f(n) = 0$. Θα δείξουμε με επαγωγή στο i ότι $f(n+i)\uparrow$, που συνεπάγεται με τη σειρά του ότι για κάθε i, $n+i \notin A$, άρα το $A \subseteq [0,n)$ είναι πεπερασμένο, που είναι άτοπο. Βαση. Αν $i = 0$, τότε $f(n+0) = f(n)\uparrow$, από την υπόθεση. Επαγωγικο Βημα. Αν $f(n+i)\uparrow$, τότε από την (6-17), πάλι, $n+i \notin A$. Αυτό όμως συνεπάγεται $f(n+i) = h(f(n+i+1))$, άρα $f(n+i+1)\downarrow \Longrightarrow f(n+i)\downarrow$ (αφού η h είναι ολική), που είναι ενάντιο στην επαγωγική υπόθεση. ⊣

6.32. Άσκηση. *Δείξε λεπτομερειακά τη συνέχεια της* π *σ' αυτήν την απόδειξη.*

Για μια τρίτη τυπική εφαρμογή του Συνεχούς Θεωρήματος Ελάχιστου Σταθερού Σημείου, θεωρούμε τον *αλγόριθμο του Ευκλείδη.*

6.33. Πρόταση. (1) *Υπάρχει ακριβώς μία μερική συνάρτηση* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ *με πεδίο ορισμού* $\{(n,m) \mid n, m \neq 0\}$ *που ικανοποιεί τις εξής ταυτότητες, για όλους τους αριθμούς* $0 < n < m$*:*

$$\begin{aligned} f(m,n) &= f(n,m), \\ f(n,n) &= n, \\ f(n,m) &= f(n, m-n). \end{aligned} \tag{6-19}$$

(2) *Η μοναδική f^* που ικανοποιεί το σύστημα* (6-19) *υπολογίζει τον μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο αριθμών μεγαλύτερων του* 0,

$$\begin{aligned} f^*(n,m) &= \text{μκδ}(n,m) \\ &= \text{ο μέγιστος } k \text{ που διαιρεί ακριβώς} \\ &\quad \text{και τους δύο αριθμούς } n,\ m. \end{aligned} \tag{6-20}$$

Απόδειξη. Σε κάθε μερική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ αντιστοιχίζουμε τη μερική συνάρτηση $f' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ που ορίζεται με τον τύπο

$$f'(n,m) = \begin{cases} f(m,n), & \text{αν } n > m > 0, \\ n, & \text{αν } n = m > 0, \\ f(n, m-n) & \text{αν } 0 < n < m, \end{cases}$$

και θέτουμε

$$\pi(f) = f'.$$

Η απεικόνιση $\pi : ((\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightharpoonup \mathbb{N}) \to ((\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightharpoonup \mathbb{N})$ είναι προφανώς συνεχής. Συνεπώς υπάρχει ελάχιστη μερική συνάρτηση $f^* : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightharpoonup \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\pi(f^*) = f^*,$$

και αυτό είναι (εύκολα) ισοδύναμο με το σύστημα (6-19). Η απόδειξη ότι για όλα τα $n, m \neq 0$

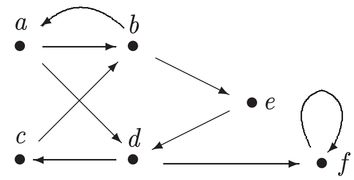
$$f^*(n,m)\downarrow \ \&\ f^*(n,m) = \text{μκδ}(n,m)$$

είναι με επαγωγή στο άθροισμα $n + m$. (Διαχώρισε περιπτώσεις αν $0 < m < n$, $0 < m = n$ ή $0 < n < m$, και χρησιμοποίησε την απλή ιδιότητα των φυσικών αριθμών, ότι *για* $0 < n < m$, *οι κοινοί διαιρέτες των* n, m *είναι ακριβώς οι ίδιοι με τους κοινούς διαιρέτες των* $n, m - n$.) ⊣

Σ' αυτό το παράδειγμα δεν χρειαζόμαστε το Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου για να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης του συστήματος (6-19), αφού μπορούμε να επαληθεύσουμε κατευθείαν ότι η συνάρτηση μκδ είναι λύση. Παρ' όλα αυτά, η Πρόταση είναι σημαντική, επειδή μας δίνει ένα χρήσιμο χαρακτηρισμό της συνάρτησης μκδ που υποδείχνει ένα συγκεκριμένο —και εύκολο— τρόπο υπολογισμού της. Π.χ. χρησιμοποιώντας μόνο τις εξισώσεις του συστήματος, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \text{μκδ}(231,165) &= \text{μκδ}(165,231) = \text{μκδ}(165,66) = \text{μκδ}(66,165) \\ &= \text{μκδ}(66,99) \quad\ = \text{μκδ}(66,33) \ \ = \text{μκδ}(33,66) \\ &= \text{μκδ}(33,33) \quad\ = 33. \end{aligned}$$

Αυτός ο υπολογισμός της τιμής μκδ(231, 165) είναι πολύ απλούστερος του τετριμμένου, όπου ψάχνουμε για τον μέγιστο κοινό διαιρέτη δοκιμάζοντας με τη σειρά όλους τους αριθμούς από τον 165 προχωρώντας προς τα κάτω, μέχρις ότου βρούμε κάποιον κοινό διαιρέτη των 165 και 231. Το φαινόμενο είναι γενικό: ο χαρακτηρισμός μιας συνάρτησης f ως την ελάχιστη λύση συστήματος απλών εξισώσεων συχνά μας δίνει έναν **αλγόριθμο**, μια «συνταγή» για τον «μηχανικό» υπολογισμό των τιμών της f, και αυτός είναι ένας από τους λόγους



Διαγραμμα **6.5**

που το Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου είναι θεμελιακό για την πληροφορική.

Τελειώνουμε μ' ένα απλό αποτέλεσμα για γραφήματα που σχετίζεται με τις ιδέες αυτού του κεφαλαίου, βλ. Προβλήματα **x6.16** και **x6.17**.

6.34. Ορισμός. Γράφημα (graph) είναι ένα δομημένο σύνολο $(G, \rightarrow_G)$, όπου το σύνολο των **ακμών** (edges) $\rightarrow_G \subseteq G \times G$ είναι διμελής σχέση στο σύνολο των **κόμβων** (nodes) G. Η **μεταβατική κλειστότητα** (transitive closure) του G είναι το γράφημα $\overline{G} = (G, \Rightarrow_G)$, όπου

$$\begin{aligned} x \Rightarrow_G y \iff_{\text{ορ}} & \text{ υπάρχει μονοπάτι από το } x \text{ στο } y \text{ στο } G \\ \iff & (\exists z_0, \dots, z_n)[x = z_0 \rightarrow_G z_1 \,\&\, \cdots \,\&\, z_{n-1} \rightarrow_G z_n = y]. \end{aligned}$$

Απεικονίζουμε γραφήματα περίπου όπως και μερικά διατεταγμένους χώρους, αλλά η κατεύθυνση «προς τα δεξιά ή επάνω» δεν έχει καμιά ιδιαίτερη σημασία και χρησιμοποιούμε συστηματικά βέλη αντί για απλές γραμμές: η σχέση $x \rightarrow_G y$ ισχύει αν υπάρχει βέλος από το x στο y, και η $x \Rightarrow_G y$ ισχύει αν μπορούμε να κινηθούμε από το x στο y ακολουθώντας τα βέλη του διαγράμματος. Στο Διάγραμμα **6.5**, $f \rightarrow f$, $a \Rightarrow a$ και $a \Rightarrow c$, αλλά $f \not\Rightarrow d$.

6.35. Πρόταση. *Για κάθε γράφημα G, η σχέση μεταβατικής κλειστότητας $\Rightarrow_G$ ικανοποιεί την ισοδυναμία*

$$x \Rightarrow_G y \iff x \rightarrow_G y \vee (\exists z \in G)[x \rightarrow_G z \,\&\, z \Rightarrow_G y]. \tag{6-21}$$

Αποδειξη. Υποθέτουμε ότι

$$x = z_0 \rightarrow_G z_1 \rightarrow_G z_2 \rightarrow_G \cdots \rightarrow_G z_n = y\cdot$$

αν $n = 1$, τότε αμέσως $x \rightarrow_G y$, και αν $n > 1$, τότε $x \rightarrow_G z_1$ και $z_1 \Rightarrow_G y$ (από τον ορισμό της $\Rightarrow_G$), και το δεξί μέλος της (6-21) συνάγεται θέτοντας $z = z_1$. Η απόδειξη της αντίστροφης συνεπαγωγής διασπάται φυσικά σε δύο περιπτώσεις και είναι εξίσου απλή. ⊣

Προβλήματα για το Κεφάλαιο 6

x6.1. Για κάθε μερική διάταξη $\leq$ στο σύνολο A, η **αντίστροφη σχέση**

$$x \leq' y \iff_{\text{ορ}} y \leq x$$

είναι επίσης μερική διάταξη. Από τους επαγωγικούς χώρους $(A \rightharpoonup E)$ και $\mathcal{P}(A)$, ποιος έχει επαγωγικό, αντίστροφο χώρο;

x6.2. Για κάθε επαγωγική, μερική διάταξη $\leq_E$ στο σύνολο E και για κάθε σύνολο A, ορίζουμε στον συναρτησιακό χώρο $(A \to E)$ τη μερική διάταξη

$$f \leq g \iff_{\text{ορ}} (\forall x \in A)[f(x) \leq_E g(x)] \quad (f, g : A \to E).$$

που συγκρίνει τις συναρτήσεις «κατά σημείο» (pointwise). Δείξε ότι η $\leq$ είναι επαγωγική, μερική διάταξη του $(A \to E)$.

x6.3. Αν οι μερικές διατάξεις $\leq_1$, $\leq_2$ στα αντίστοιχα σύνολα P_1, P_2 είναι επαγωγικές, τότε επαγωγική είναι και η εξής σχέση $\leq$ στο Καρτεσιανό γινόμενο $P_1 \times P_2$:

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \iff_{\text{ορ}} x_1 \leq_1 y_1 \,\&\, x_2 \leq_2 y_2.$$

Μ' αυτή τη μερική διάταξη ο χώρος $P_1 \times P_2$ καλείται το **γινόμενο** των δύο χώρων P_1 και P_2.

x6.4. Θεωρούμε τρεις επαγωγικούς χώρους P_1, P_2 και Q. Μια απεικόνιση $\pi : P_1 \times P_2 \to Q$ είναι **χωριστά μονοτονική** (separately monotone) αν για κάθε $x_1 \in P_1$, η απεικόνιση $(x_2 \mapsto \pi(x_1, x_2))$ στον P_2 είναι μονοτονική, και συμμετρικά, για κάθε $x_2 \in P_2$. Δείξε ότι η π είναι μονοτονική (στο γινόμενο) τότε και μόνον αν είναι χωριστά μονοτονική.

x6.5. Θεωρούμε τρεις επαγωγικούς χώρους P_1, P_2 και Q. Μια απεικόνιση $\pi : P_1 \times P_2 \to Q$ είναι **χωριστά αριθμήσιμα συνεχής** (separately, countably continuous) αν για κάθε $x_1 \in P_1$, η απεικόνιση $(x_2 \mapsto \pi(x_1, x_2))$ στον P_2 είναι αριθμήσιμα συνεχής, και συμμετρικά για κάθε $x_2 \in P_2$. Δείξε ότι η π είναι αριθμήσιμα συνεχής τότε και μόνον αν είναι χωριστά αριθμήσιμα συνεχής.

6.36. Ορισμός. Το στοιχείο M είναι **μεγιστικό** (maximal) του συνόλου S στον μερικά διατεταγμένο χώρο P, αν το M είναι μέλος του S και κανένα μέλος του S δεν είναι μεγαλύτερο,

$$M \in S \,\&\, (\forall x \in S)[M \leq x \Longrightarrow M = x].$$

Το στοιχείο m είναι **ελαχιστικό** (minimal) του S αν είναι μέλος του S και κανένα μέλος του S δεν είναι μικρότερο,

$$m \in S \,\&\, (\forall x \in S)[x \leq m \Longrightarrow x = m].$$

x6.6. Να βρεις στο χώρο του Διαγράμματος **6.2** κάποιο υποσύνολο S που να έχει μεγιστικά στοιχεία αλλά να μην έχει μέγιστο, και κάποιο άλλο με ελαχιστικά στοιχεία, χωρίς ελάχιστο.

***x6.7.** Κάθε πεπερασμένο, μη κενό υποσύνολο μερικά διατεταγμένου χώρου P έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό και ένα ελαχιστικό στοιχείο.

***x6.8.** Ένας πεπερασμένος, μερικά διατεταγμένος χώρος P είναι επαγωγικός αν και μόνον αν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Μια σημαντική έννοια της πληροφορικής είναι αυτή του *ρεύματος*, π.χ. το ρεύμα των ψηφίων σε ένα αρχείο που μεταδίδεται από τον CYBER του Πανεπιστημίου Αθηνών στον υπολογιστή του σπιτιού μου, στο Φάληρο, μέσα από τις τηλεφωνικές γραμμές. Το ρεύμα είναι βασικά ακολουθία, αλλά μπορεί να είναι *άπειρη*, στην ιδανικοποιημένη περίπτωση· *τερματισμένη*, αν έπειτα από ένα συγκεκριμένο στάδιο το ψηφίο EOF (τέλος του αρχείου) φτάνει στο Φάληρο και ο υπολογιστής μου ξέρει ότι έληξε η μετάδοση· ή *ημιτελής*, αν έπειτα από κάποιο στάδιο τα ψηφία πάψουν να έρχονται, χωρίς προειδοποίηση, ίσως επειδή ο CYBER πέθανε ή επειδή η τηλεφωνική σύνδεση διακόπηκε.[16]

6.37. Ορισμός. Για κάθε σύνολο A, διαλέγουμε κάποιο $t \notin A$ (ίσως το αντικείμενο $\mathbf{r}(A)$ της (3-4)) και ορίζουμε τα **ρεύματα** (streams) από το A ως εξής:

$$\text{Streams}(A)$$
$$=_{\text{ορ}} \{\sigma : \mathbb{N} \rightharpoonup A \cup \{t\} \mid (\forall i < j)[\sigma(j)\downarrow \implies [\sigma(i)\downarrow \ \& \, \sigma(i) \neq t]]\}.$$

Το ρεύμα σ είναι **τελειωμένο** (terminated) ή **συγκλίνον** (convergent) αν για κάποιο n, $\sigma(n) = t$, οπότε από τον ορισμό $\text{Domain}(\sigma) = [0, n+1)$· **άπειρο** αν $\text{Domain}(\sigma) = \mathbb{N}$· και **ημιτελές** (stalled ή unterminated) αν το $\text{Domain}(\sigma)$ είναι πεπερασμένο, αρχικό τμήμα του $\mathbb{N}$ αλλά το σ δεν παίρνει την *τερματική τιμή* t. Τα άπειρα και τα ημιτελή ρεύματα μαζί καλούνται **αποκλίνοντα** (divergent).

x6.9. Για κάθε σύνολο A, το σύνολο των ρευμάτων $\text{Streams}(A)$ είναι επαγωγικός χώρος με τη φυσική, μερική διάταξη $\sqsubseteq$, που ορίζεται, όπως και στις λέξεις,

$$\sigma \sqsubseteq \tau \iff_{\text{ορ}} \sigma \subseteq \tau. \tag{6-22}$$

Ποια είναι τα μεγιστικά στοιχεία αυτού του χώρου;

x6.10. Η **παράθεση** (concatenation) $\sigma \star \tau$ δύο ρευμάτων ορίζεται έτσι ώστε αν το σ είναι αποκλίνον, τότε $\sigma \star \tau = \sigma$ και αν το σ είναι συγκλίνον με πεδίο ορισμού $[0, n+1)$, τότε

$$i < n \Longrightarrow (\sigma \star \tau)(i) = \sigma(i), \quad (\sigma \star \tau)(n+i) = \tau(i).$$

Δείξε ότι η $\star$ είναι συνεχής συνάρτηση (δύο μεταβλητών) στο χώρο $\text{Streams}(A)$.

Το πλήρες Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου μπορεί να αποδειχτεί εύκολα για τα δυναμοσύνολα:

* **x6.11.** Έστω μονοτονική απεικόνιση $\pi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ στο δυναμοσύνολο του A. Δείξε ότι το σύνολο

$$A^\star = \bigcap \{X \mid \pi(X) \subseteq X\}$$

είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο της π, και το

$$A_\star = \bigcup \{X \mid X \subseteq \pi(X)\}$$

[16] Για να πούμε την αλήθεια, ο CYBER έχει πεθάνει παντελώς από την πρώτη έκδοση αυτών των Σημειώσεων, αλλά ακόμη και σήμερα, οι σύγχρονοι υπολογιστές και οι σταθερότερες τηλεφωνικές γραμμές μας εγκαταλείπουν μερικές φορές.

είναι το μέγιστο σταθερό σημείο της π.

Τα επόμενα μερικά προβλήματα αφορούν «αλγοριθμικές» εφαρμογές του Συνεχούς Θεωρήματος Ελάχιστου Σταθερού Σημείου.

x6.12. Για κάθε διμελή σχέση $R \subseteq \mathbb{N} \times A$, υπάρχει ελάχιστη μερική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times A \rightharpoonup \mathbb{N}$ που έχει τις ιδιότητες

$$\begin{cases} R(n,x) \implies f(n,x) = n, \\ \neg R(n,x) \implies f(n,x) = f(n+1,x), \end{cases}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} f(n,x)\downarrow &\iff (\exists m \geq n)[R(m,x), \\ f(n,x)\downarrow] &\implies f(n,x) = \text{ο ελάχιστος } m \geq n \text{ τέτοιος ώστε } R(m,x). \end{aligned}$$

x6.13. Για κάθε τριάδα μερικών συναρτήσεων f_0, g, h με πεδία ορισμού και τιμών τέτοια ώστε οι επόμενες ταυτότητες να έχουν νόημα, υπάρχει ελάχιστη μερική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times A \rightharpoonup E$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} f(0,x) &= f_0(x), \\ f(n+1,x) &= h(f(n,g(n,x)),n,x). \end{aligned}$$

x6.14. Δείξε ότι υπάρχει ακριβώς μία (ολική) συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} f(0,n) = f(n,0) &= 0, \\ f(n+1,m+1) &= f(n,m) + 1. \end{aligned}$$

Υπολόγισε την τιμή $f(5,23)$ χρησιμοποιώντας αυτές τις ταυτότητες και «εξήγησε» ποια είναι η τιμή $f(n,m)$, για τυχόντα n,m.

6.38. Ορισμός. Στο σύνολο E^* των λέξεων (πεπερασμένων ακολουθιών) από ένα σύνολο E που ορίσαμε στο **5.30**, ορίζουμε τις μερικές συναρτήσεις

$$\text{head}(u) = u(0), \tag{6-23}$$

$$\text{tail}(u) = \langle u(1), \dots, u(\text{lh}(u)-1)\rangle. \tag{6-24}$$

Παρατηρήστε ότι $\text{head}(u)\downarrow$ αν $\text{lh}(u) > 0$, και $\text{tail}(u)$ είναι πάντα ορισμένη, αλλά μας δίνει την κενή λέξη αν $\text{lh}(u) \leq 1$.

x6.15. Δείξε ότι υπάρχει ακριβώς μία ολική συνάρτηση $r : E^* \to E^*$ τέτοια ώστε

$$r(u) = \begin{cases} u, & \text{αν } \text{lh}(u) \leq 1, \\ r(\text{tail}(u)) \star \langle \text{head}(u)\rangle, & \text{αν } \text{lh}(u) > 1. \end{cases}$$

Υπολόγισε την τιμή $r(\langle a,b,c\rangle)$ και δώσε γενική «περιγραφή» της μορφής της τιμής $r(u)$, για τυχόν u.

x6.16. Για κάθε γράφημα G, η μεταβατική κλειστότητα $\Rightarrow_G$ είναι η ελάχιστη (ως προς την $\subseteq$) μεταβατική σχέση στο σύνολο G που περιέχει το σύνολο ακμών $\to_G$.

x6.17. Για κάθε γράφημα G με σχέση ακμών $\to_G$, η μεταβατική κλειστότητα $\Rightarrow_G$ είναι το κοινό ελάχιστο σταθερό σημείο των εξής μονοτονικών τελεστών στο χώρο $\mathcal{P}(G \times G)$ όλων των διμελών σχέσεων του G:

$$\begin{aligned}
\pi_1(R) &= \{(x,y) \mid x \to_G y \vee (\exists z)[x \to_G z \,\&\, (z,y) \in R]\},\\
\pi_2(R) &= \{(x,y) \mid x \to_G y \vee (\exists z)[(x,z) \in R \,\&\, z \to_G y]\},\\
\pi_3(R) &= \{(x,y) \mid x \to_G y \vee (\exists z)[x \to_G z \to_G y]\\
&\qquad\qquad \vee (\exists z, w)[x \to_G z \,\&\, (z,w) \in R \,\&\, w \to_G y]\}.
\end{aligned}$$

x6.18. Υποθέτουμε ότι οι P_1, P_2 είναι επαγωγικοί χώροι, και οι

$$\begin{aligned}
\pi_1 &: P_1 \times P_2 \to P_1,\\
\pi_2 &: P_1 \times P_2 \to P_2
\end{aligned}$$

είναι μονοτονικές, αριθμήσιμα συνεχείς απεικονίσεις στο γινόμενο $P_1 \times P_2$. Δείξε ότι υπάρχει ακριβώς ένα ζεύγος **ελάχιστων αμοιβαίων σταθερών σημείων** (least, mutual ή simultaneous fixed points) x_1^*, x_2^*, που χαρακτηρίζεται από τις εξής ιδιότητες:

$$\pi_1(x_1^*, x_2^*) = x_1^*, \quad \pi_2(x_1^*, x_2^*) = x_2^*,$$

$$\pi_1(y_1, y_2) \leq_1 y_1 \,\&\, \pi_2(y_1, y_2) \leq_2 y_2 \Longrightarrow x_1^* \leq_1 y_1 \,\&\, x_2^* \leq_2 y_2.$$

Το επόμενο πρόβλημα είναι αλγοριθμική εκδοχή του γνωστού αποτελέσματος της αριθμοθεωρίας, ότι για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς $n, m \neq 0$, υπάρχουν (θετικοί ή αρνητικοί) ακέραιοι α, β τέτοιοι ώστε

$$\mathsf{\mu\kappa\delta}(n,m) = \alpha n + \beta m.$$

Η απόδειξη χρειάζεται μερικές απλές ιδιότητες του συνόλου

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

των ακέραιων αριθμών.

***x6.19.** Υπάρχει ακριβώς ένα ζεύγος μερικών συναρτήσεων

$$\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{Z}, \quad \beta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{Z},$$

με κοινό πεδίο ορισμού $\{(n,m) \mid n, m \neq 0\}$, και οι οποίες ικανοποιούν για όλα τα $n, m, k > 0$ τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{gathered}
\text{αν}\ \ n \neq m,\ \text{τότε}\ \ \alpha(n,m) = \beta(m,n),\\
\alpha(n,n) = 1, \quad \beta(n,n) = 0,\\
\alpha(n, n+k) = \alpha(n,k) - \beta(n,k), \quad \beta(n, n+k) = \beta(n,k).
\end{gathered}$$

Προκύπτει ότι για όλους τους φυσικούς αριθμούς $n, m \neq 0$,

$$\mathsf{\mu\kappa\delta}(n,m) = \alpha(n,m)n + \beta(n,m)m.$$

x6.20. Βρες ακεραίους $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$33 = 231\alpha + 165\beta.$$

Επίσης βρες ακεραίους $\alpha', \beta' \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$1 = 137\alpha' + 997\beta'.$$

6.39. Ορισμός. Για κάθε πεπερασμένη μερική συνάρτηση $g : A \rightharpoonup E$, η **γειτονιά** (neighborhood) που καθορίζεται από την g στο χώρο $(A \rightharpoonup E)$ είναι το σύνολο

$$N(g) =_{\text{op}} \{f : A \rightharpoonup E \mid g \subseteq f\}$$

όλων των επεκτάσεων της g. *Το σύνολο $G \subseteq (A \rightharpoonup E)$ είναι* **ανοικτό στην τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης** (pointwise convergence) *αν*

$$f \in G \Longrightarrow (\exists g, \text{πεπερασμένη})[f \in N(g) \subseteq G].$$

x6.21. Δείξε ότι η οικογένεια των ανοικτών συνόλων στο χώρο $(A \rightharpoonup E)$ κατά τον Ορισμό **6.39** είναι τοπολογία κατά το **4.30**, και μια απεικόνιση

$$\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$$

είναι συνεχής σ' αυτή την τοπολογία κατά τον Ορισμό **6.25** τότε και μόνον αν είναι συνεχής κατά τον **6.22**.

6.40. Ορισμός. Ένα υποσύνολο $G \subseteq P$ επαγωγικού χώρου είναι **Scott ανοικτό** αν (1) το G είναι κλειστό προς τα πάνω, δηλαδή

$$x \in G \,\&\, x \le y \Longrightarrow y \in G,$$

και (2) για κάθε μη κενή αλυσίδα $S \subseteq P$,

$$\sup S \in G \Longrightarrow (\exists x \in S)[x \in G].$$

***x6.22.** Δείξε ότι η οικογένεια των Scott ανοικτών υποσυνόλων επαγωγικού χώρου P είναι τοπολογία.

***x6.23.** Έστω απεικόνιση $\pi : P \to Q$ από έναν επαγωγικό χώρο P σε κάποιον άλλο Q. Δείξε ότι η π είναι συνεχής στις σχετικές τοπολογίες Scott, τότε και μόνον αν είναι μονοτονική και για κάθε μη κενή αλυσίδα $S \subseteq P$,

$$\pi(\sup S) = \sup \pi[S].$$

Υποδειξη. Ίσως να σου φανεί χρήσιμο να αποδείξεις και να χρησιμοποιήσεις το γεγονός ότι για κάθε $c \in P$, το σύνολο $\{x \in P \mid x \le c\}$ είναι Scott κλειστό.

***x6.24.** Έστω απαριθμητό σύνολο A και απεικόνιση $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$. Δείξε ότι η π είναι συνεχής (κατά τον ορισμό **6.22**) τότε και μόνον αν είναι συνεχής σχετικά με τις τοπολογίες Scott στους χώρους $(A \rightharpoonup E)$, $(B \rightharpoonup M)$.

Το Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου συχνά διατυπώνεται για την κλάση των *πλήρων κατά κατεύθυνση* χώρων, ιδιαίτερα σε βιβλία της Πληροφορικής.

6.41. Ορισμός. Ένα υποσύνολο $S \subseteq P$ μερικά διατεταγμένου χώρου P είναι **κατευθυνόμενο** (directed) αν κάθε ζεύγος στοιχείων του S έχει άνω φράγμα στο S, δηλαδή

$$x, y \in S \Longrightarrow (\exists z \in S)[x \leq z \,\&\, y \leq z].$$

Ο χώρος P είναι **πλήρης κατά κατεύθυνση** ή **κατευθυνόμενα πλήρης** αν κάθε κατευθυνόμενο $S \subseteq P$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Ο αγγλικός όρος *directed complete poset* γι' αυτούς τους χώρους συνήθως συντομεύεται με τα αρχικά του, *dcpo*.

x6.25. Κάθε αλυσίδα σε μερικά διατεταγμένο χώρο είναι κατευθυνόμενο σύνολο, επομένως κάθε κατευθυνόμενα πλήρης χώρος είναι επαγωγικός και τα Θεωρήματα Σταθερού Σημείου ισχύουν για κατευθυνόμενα πλήρεις χώρους.

x6.26. Για όλα τα σύνολα A και E, οι χώροι $(A \rightharpoonup E)$ και $(A \rightarrowtail E)$ είναι κατευθυνόμενα πλήρεις.

x6.27. Η απεικόνιση $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$ είναι συνεχής τότε και μόνον αν για κάθε κατευθυνόμενο $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$,

$$\pi(\sup S) = \sup \pi[S].$$

x6.28. Το γινόμενο (**x6.3**) $P_1 \times P_2$ δύο χώρων που είναι πλήρεις κατά κατεύθυνση είναι επίσης πλήρες κατά κατεύθυνση.

* **x6.29.** Κάθε απαριθμητός, επαγωγικός χώρος είναι κατευθυνόμενα πλήρης.

Στην πραγματικότητα οι έννοιες *επαγωγικός* και *κατευθυνόμενα πλήρης* είναι ισοδύναμες· για κάθε απεικόνιση $\pi : P \to Q$ από έναν επαγωγικό χώρο σε κάποιον άλλο, η εξίσωση

$$\pi(\sup S) = \sup \pi[S] \tag{6-25}$$

ισχύει για όλες τις μη κενές αλυσίδες $S \subseteq P$ αν και μόνον αν ισχύει για όλα τα μη κενά κατευθυνόμενα σύνολα $S \subseteq P$· και ο χαρακτηρισμός της Scott συνέχειας στο **x6.24** ισχύει και στην περίπτωση που το A είναι αναπαρίθμητο. Οι αποδείξεις αυτών των αποτελεσμάτων δεν είναι απλές και χρειάζονται το Αξίωμα Επιλογής, βλ. τα Προβλήματα **x9.22** – **x9.25**.