13/11/19

ΘΕΜΑ 1ο Φεβρουάριος 2002

$\Omega = \{1, 2, \ldots, \nu\}$

k, r, j ακέραιοι με $1 \leq j \leq k \leq r$ και $j \leq r \leq j + r - k$

Να βρεθεί:

α) # υποσυνόλων του Ω που να ικανοποιούν ταυτόχρονα 3 ιδιότητες:

(i) περιέχουν ακριβώς k στοιχεία

(ii) περιέχουν τον ακέραιο r

(iii) περιέχουν ακριβώς $j-1$ ακεραίους μικρότερους του r.

Λύση

(i) Η επιλογή γίνεται σε στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή $j-1$ αριθμών από το $\{1, 2, \ldots, r-1\} \to \binom{r-1}{j-1}$ τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή του $r \to 1$ τρόπος

3ο στάδιο: Επιλογή $k-j$ αριθμών από το $\{r+1, \ldots, k\} \to \binom{k-r}{k-j}$ τρόποι

Από Πολλ/κή Αρχή: # υποσυνόλων με τις ιδιότητες (i), (ii), (iii) $= \binom{r-1}{j-1} \cdot 1 \cdot \binom{k-r}{k-j}$

ΘΕΜΑ 1ο ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2005

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 2\nu\}$

Να βρεθούν:

α) # υποσυνόλων του Ω μεγέθους k που περιέχουν ακριβώς 3 περιττούς ($\nu \geq 3$, $3 \leq k \leq \nu+3$)

β) # υποσυνόλων του Ω μεγέθους k που περιέχουν το πολύ έναν από τους αριθμούς $2i-1$ και $2i$ για κάθε $i = 1, \ldots, \nu$ ($1 \leq k \leq \nu$)

$1, 3, \ldots, 2\nu-1 \mid 2, 4, 6, \ldots, 2\nu \rightarrow \Omega$

Λύση

α) η επιλογή γίνεται σε στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή 3 περιττών από το $\{1, 3, \ldots, 2\nu-1\} \rightarrow \binom{\nu}{3}$ τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή $k-3$ αρτίων από το $\{2, 4, 6, \ldots, 2\nu\} \rightarrow \binom{\nu}{k-3}$ τρόποι

Από Πολλ/κη Αρχή: # υποσυνόλων $= \binom{\nu}{3}\binom{\nu}{k-3}$

β) $(1,2 \mid 3,4 \mid 5,6 \mid \ldots \mid 2\nu-1, 2\nu) \to \Omega$

Η επιλογή γίνεται σε στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή k από τις ν δυάδες $\to \binom{\nu}{k}$ τρόπους

2ο στάδιο: Επιλογή αριθμού από κάθε δυάδα $\to \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{k\text{-φορές}} = 2^k$ τρόποι

Από Πολλ/κή Αρχή # υποσυνόλων $= \binom{\nu}{k} 2^k$

Θεμα 1ο Γενάρης 2005

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 2005\}$

Να βρεθεί # υποσυνόλων του Ω που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις συνθήκες:

α. περιέχουν 80 στοιχεία
β. περιέχουν τα στοιχεία 1000 και 2000
γ. περιέχουν το πολύ 10 στοιχεία μικρότερα του 1000
δ. περιέχουν ακριβώς 3 στοιχεία μεγαλύτερα του 2000

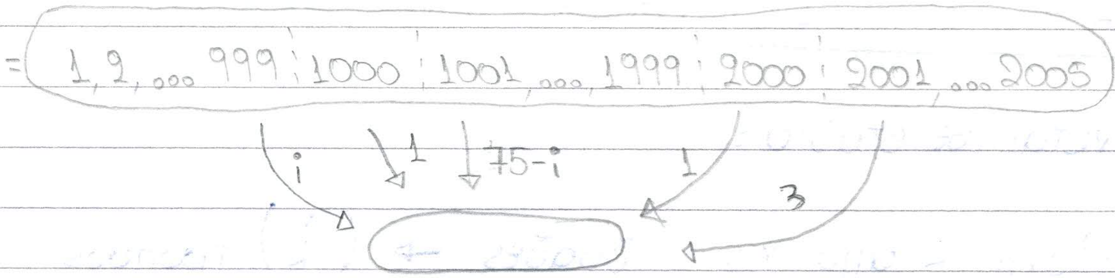
Λύση

συνθήκη (γ)

Το πολύ 10 στοιχεία → 0 ή 1 ή 2 ή ... ή 10 στοιχεία (Αρχή Αθροισματος)

υποσυνόλων του Ω που ικανοποιούν τις: α, β, γ, δ $= \sum_{i=0}^{10}$ $\underbrace{\text{\# υποσυνόλων του } \Omega \text{ που ικανοποιούν τις α, β και δ και περιέχουν ακριβώς } i \text{ στοιχεία μικρότερα του } 1.000}_{A_i}$

Υπολογισμός του A_i



1ο στάδιο: Επιλέγουμε i αριθμούς από το $\{1, ..., 999\} \rightarrow \binom{999}{i}$ τρόποι

2ο στάδιο: Επιλέγουμε τα στοιχεία 1000 και 2000 → 1 τρόπος

3ο στάδιο: Επιλέγουμε 3 στοιχεία από το $\{2001, ..., 2005\} \rightarrow \binom{5}{3}$ τρόποι

4ο στάδιο: Επιλέγουμε 75-i στοιχεία από το $\{1001, ..., 1999\} \rightarrow \binom{999}{75-i}$ τρόποι

$$A_i = \binom{999}{i} \cdot 1 \cdot \binom{5}{3} \binom{999}{75-i}$$

$\#$ υποσυνόλων $= \sum_{i=0}^{10} \binom{999}{i} 1 \binom{5}{3} \binom{999}{75-i}$

ΘΕΜΑ 1º ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2002

$\Omega = \{1, 2, \dots, 2008\}$

Να βρεθούν:

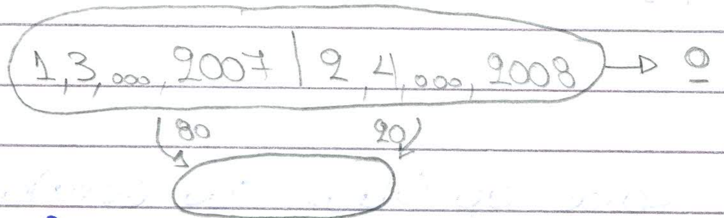
α) # υποσυνόλων του Ω τα οποία περιέχουν ακριβώς 100 στοιχεία από τα οποία 20 είναι άρτιοι.

β) # υποσυνόλων του Ω που περιέχουν 5 στοιχεία μικρότερα ή ίσα του 1000 και οσαδήποτε μεγαλύτερα του 1000.

γ) # μεταθέσεων των στοιχείων του Ω στις οποίες όλα τα πολλ/σια του 5 είναι διαδοχικά.

δ) # μεταθέσεων των στοιχείων του Ω στις οποίες δεν υπάρχουν διαδοχικά πολλ/σια του 5.

Λύση



Η επιλογή γίνεται σε στάδια:

1º στάδιο: Επιλογή 80 περιττών από το $\{1,3,\dots,2007\} \rightarrow \binom{1004}{80}$ τρόποι

2º στάδιο: Επιλογή 20 άρτιων από το $\{2,4,\dots,2008\} \rightarrow \binom{1004}{20}$ τρόποι

Από Πολλ/κή Αρχή # υποσυνόλων $= \binom{1004}{80}\binom{1004}{20}$

b) 1, ..., 1000 ; 2001, ..., 2008 → 0

5

Η επιλογή γίνεται σε στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή 5 στοιχείων από το $\{1, \dots, 1000\} \to \binom{1000}{5}$ τρόποι

2ο στάδιο:

<u>α' τρόπος</u>

Οσαδήποτε στοιχεία → 0 ή 1 ή 2 ή ... ή 1008

$\#$ τρόπων $= \sum_{i=0}^{1008}$ $\#$ υποσυνόλων του $\{1001, \dots, 2008\}$ με i στοιχεία

$$= \sum_{i=0}^{1008} \binom{1008}{i}$$

<u>β' τρόπος</u>

Επιλογή αν θα μπει ή όχι κάθε αριθμός του συνόλου $\{1001, \dots, 2008\} \to 2^{1008}$ τρόποι

Άρα $\#$ υποσυνόλων $= \binom{1000}{5} \cdot 2^{1008}$

γ) $\Omega = \{1, \dots, 2008\}$

Η μετάθεση θα γίνει σε στάδια:

1ο στάδιο: Μεταθέσεις 401 πολλ/σιων του 5 $\rightarrow$ 401! τρόποι

2ο στάδιο: Μεταθέσεις των υπολοίπων 1607 αριθμών $\rightarrow$ 1607! τρόποι

3ο στάδιο: Τοποθέτηση του μπλοκ με τα πολλ/σια του 5 σε μια από τις 1608 θέσεις $\rightarrow$ 1608 τρόποι

Άρα από Πολλ/κή Αρχή $\#$ μεταθέσεων $= 401!\,1607!\,1608 = 401!\,1608!$

δ) Η μετάθεση θα γίνει σε στάδια:

1ο στάδιο: Μετάθεση των 1607 μη πολλ/σιων του 5 $\rightarrow$ 1607! τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή των 401 θέσεων που θα μπουν τα πολλ/σια του 5 από τις 1608 $\rightarrow \binom{1608}{401}$ τρόποι

3ο στάδιο: Τοποθέτηση των 401 πολλ/σιων του 5 $\rightarrow$ 401! τρόποι

Άρα από Πολλ/κή Αρχή $\#$ μεταθέσεων $= \underbrace{1607!\binom{1608}{401}401!}_{(1608)_{401}}$