<u>23/10/12</u>

Διατάξεις - Συνδυασμοί - Μεταθέσεις

1. Ορισμοί

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$

Διάταξη ν ανά k $\equiv (a_1, a_2, \dots, a_k)$ $a_i \in \Omega$
$\equiv$ Διατεταγμένη k-άδα του Ω (Επιλογή + σειρά)

Συνδυασμός ν ανά k $\equiv \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ $a_i \in \Omega$
$\equiv$ Μη διατεταγμένη k-συλλογή του Ω (Επιλογή)

Μετάθεση ν στοιχείων $\equiv (a_1, a_2, \dots, a_\nu)$ $a_i \in \Omega$ (σειρά)

Διατάξεις
- → Απλές $(a_i \neq a_j,\ i \neq j)$
- → Επαναληπτικές

Συνδυασμοί
- → Απλοί $(a_i \neq a_j,\ i \neq j)$
- → Επαναληπτικοί

Μεταθέσεις → Απλές

2. Παράδειγμα

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

Διατάξεις 4 ανά 2

Απλές		Επαναληπτικές
(1 2)	1	(1 1)
(1 3)	2	(2 2)
(1 4)	3	(3 3)
(2 1)	1	(4 4)
(2 3)	4	
(2 4)	5	
(3 1)	2	
(3 2)	4	
(3 4)	6	
(4 1)	3	
(4 2)	5	
(4 3)	6	

Συνδυασμοί 4 ανά 2

Απλοί		Επαναληπτικοί
$\{1, 2\}$	1	$\{1, 1\}$
$\{1, 3\}$	2	$\{2, 2\}$
$\{1, 4\}$	3	$\{3, 3\}$
$\{2, 3\}$	4	$\{4, 4\}$
$\{2, 4\}$	5	
$\{3, 4\}$	6	

(απλών) διατάξεων 4 ανά 2 = 12

επαναληπτικών διατάξεων 4 ανά 2 = 16

απλών συνδυασμών 4 ανά 2 = 6

επαναληπτικών συνδυασμών 4 ανά 2 = 10

Μια απλή διάταξη 4 ανά 2 σχηματίζεται σε 2 στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή στοιχείου για 1η θέση → 4 τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή στοιχείου για 2η θέση → 3 τρόποι

Από Πολλ/κη Αρχή # διατάξεων 3·4 = 12

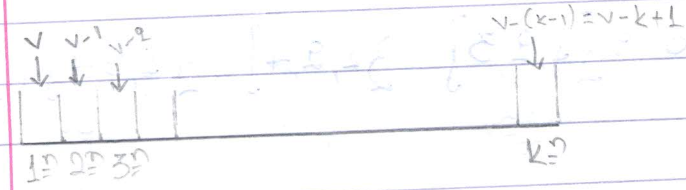
Το ίδιο ισχύει για Επαναληπτικές

επαναληπτικών διατάξεων $= 4 \cdot 4 = 16$

τρόπων στο 2ο στάδιο

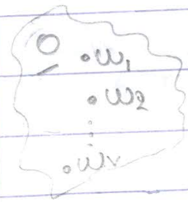
3. Τύποι πλήθους διατάξεων

#απλών διατάξεων ν ανά k = Από Πολλ/κή Αρχή



$$\underbrace{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-k+1)}_{k\text{-παράγοντες}}$$

$$\frac{\nu!}{(\nu-k)!} \overset{''}{=} (\nu)_k \ , \ 1\le k\le \nu$$



$0! = 1$

#επαναληπτικών διατάξεων ν ανά k $= \nu^k \ , \ k\geq 1$

#μεταθέσεων ν στοιχείων = ν!

απλές διατάξεις k=ν

4. Παράδειγμα

$\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\nu = 4$ $k = 3$.

Απλοί συνδυασμοί : $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$.

$\downarrow 3!$ $\downarrow 3!$ $\downarrow 3!$ $\downarrow 3!$

Απλές διατάξεις :

(123)	(124)	...	...
(132)	(142)		
(213)	(214)		
(231)	(241)		
(312)	(412)		
(321)	(421)		

Ισχύει
συνδυασμών 4 ανά 3 $\times 3! =$ # διατάξεων 4 ανά 3

5. Τύπος πλήθους συνδυασμών

απλών συνδυασμών ν ανά k $= \dfrac{\nu!}{k!\,(\nu-k)!} = \dbinom{\nu}{k}$

Απόδειξη

Από 1 συνδυασμό ν ανά k προκύπτουν k! διαφορετικές διατάξεις ν ανά k.

Άρα # συνδυασμών ν ανά k $\times$ k!

$\parallel$

διατάξεων ν ανά k $= \dfrac{\nu!}{(\nu-k)!}$

$\Longrightarrow$ # συνδυασμών ν ανά $k = \dfrac{\nu!}{k!(\nu-k)!}$

6. Πλήθος Επαναληπτικών Συνδυασμών

(Συνέχεια Παραδείγματος)

$\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\nu=4$, $k=3$

Επαναληπτικοί συνδυασμοί:

$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\} \ldots \{1,1,1\}, \{2,2,2\}, \{3,3,3\}, \{4,4,4\}$

Επαναληπτικές διατάξεις:

$(123)\ (132)\ (213)\ (231)\ (321) \longrightarrow 4^3$

ΠΡΟΣΟΧΗ: ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ # επαναληπτικών συνδυασμών ν ανά k

$\times$

$k!$

$\|$

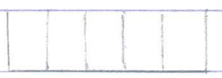
επαναληπτικών διατάξεων ν ανά k

7. <u>Παράδειγμα</u>

$\#$ τρόπων να μπουν

3 "1"
1 "2" στη σειρά
1 "3"

11123
13112
31121
⋮

 → Πρέπει να γεμίσω 5 θέσεις με 3 "1", 1 "2", 1 "3"

<u>1ος Τρόπος</u>

Τα φτιάχνω σε στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή θέσης για τους 3 "1"
↳ $\binom{5}{3}$ τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή θέσης για το "2" → 2 τρόποι

3ο στάδιο: Επιλογή θέσης για το "3" → 1 τρόπος

Από Πολλ/κη Αρχή $\#$ τρόπων $= \binom{5}{3} \cdot 2 \cdot 1$

$= \frac{5!}{3!2!} \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 4 = 20$ τρόποι

2ος Τρόπος

1ο στάδιο: Επιλογή θέσης για το "2" → 5 τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή θέσης για το "3" → 4 τρόποι

3ο στάδιο: Επιλογή θέσης για τους "1" → 1 τρόπος

Από Πολλ/κή Αρχή # τρόπων = 5·4·1 = 20 τρόποι

25/10/12

Μεταθέσεις ν ειδών στοιχείων
Κατανομές σφαιριδίων σε κελιά

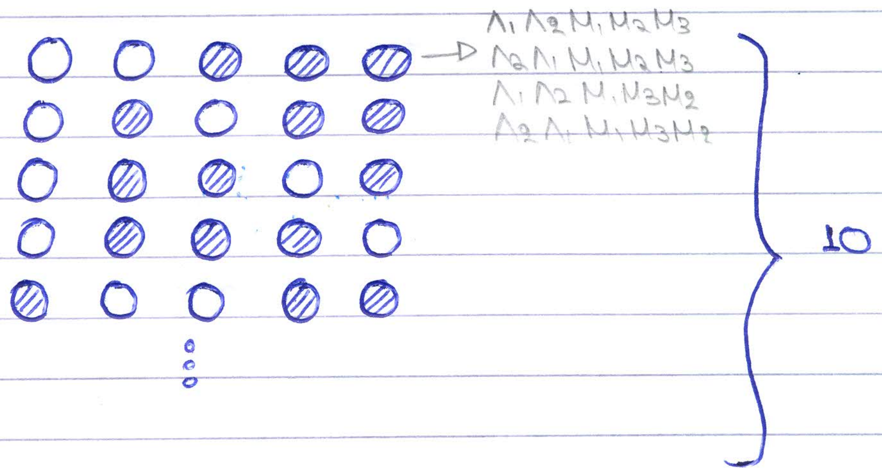
1. Παράδειγμα

$\nu=2$ είδη στοιχείων ○ ⊘

$k_1=2$ $k_2=3$

k_1 στοιχεία είδους 1
k_2 στοιχεία είδους 2

\# μεταθέσεων = ;



Υποθέτω ότι τα 2 ○ έχουν τους αριθμούς 1,2 και τα 3 ⊘ έχουν τους αριθμούς 1,2,3.

▶ Αν αποκαλυφθούν οι αριθμοί θα προκύψουν οι 5! μεταθέσεις διακεκριμένων στοιχείων.

Από κάθε μετάθεση με 2 ○ και 3 ● παίρνω 2! 3! μεταθέσεις 5 διακεκριμένων σφαιριδίων.

Άρα # μεταθέσεων 2 ○, 3 ●

×

2! 3!

||

μεταθέσεων 5 διακεκριμένων στοιχείων = 5!

Άρα # μεταθέσεων 2 ○, 3 ● $= \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 10$

2. <u>Μετάθεση ν ειδών στοιχείων</u>

Έστω ν είδη στοιχείων και θέλουμε να βάλουμε στη σειρά:

k_1 στοιχεία $1^{ου}$ είδους
k_2 στοιχεία $2^{ου}$ είδους
⋮
k_ν στοιχεία $\nu^{ου}$ είδους

Μια τέτοια τοποθέτηση λέγεται μετάθεση ν ειδών στοιχείων.

Από 1 τέτοια μετάθεση παίρνουμε $k_1! \cdot k_2! \cdots k_\nu!$ μεταθέσεις $k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu$ διακεκριμένων στοιχείων.

2 ○   ○⊗⊗⊗⊗⊙⊙○⊙
4 ⊗ $\downarrow$
3 ⊙ $2!4!3!$ μεταθέσεις διακεκριμένων στοιχείων

Άρα # μεταθέσεων ν ειδών στοιχείων που το είδος i εμφανίζεται k_i φορές

$$\times$$

$$k_1!\,k_2! \cdots k_\nu!$$

$$\parallel$$

$$(k_1+k_2+\cdots+k_\nu)!$$

οπότε # μεταθέσεων ν ειδών στοιχείων

$$\parallel$$

$$\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_\nu)!}{k_1!\,k_2! \cdots k_\nu!}$$

3. <u>Παράδειγμα</u>

αναγραμματισμών της λέξης ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ

μεταθέσεων 6 ειδών στοιχείων $= \frac{9!}{1!3!1!2!1!1!}$

Π → 1   Γ → 1
Α → 3   Η → 1
Ρ → 1
Λ → 2

4. Παράδειγμα

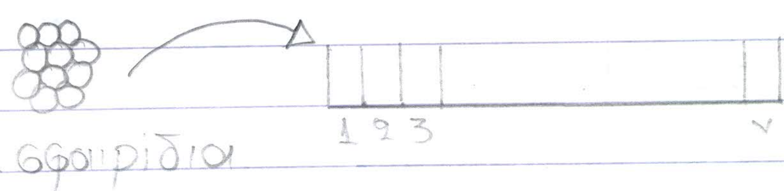
Με πόσους τρόπους μπαίνουν στη σειρά 3Α, 3Β, 3Γ ώστε τα 3Γ να είναι συνεχόμενα.

(π.χ. ΑΒΓΓΓΒΑΑΒΑ)

\# μεταθέσεων 3 ειδών στοιχείων $= \dfrac{(3+3+1)!}{3!\,3!\,1!} = \dfrac{7!}{(3!)^2}$

Α → 3 φορές
Β → 3 φορές
ΓΓΓ → 1 φορά

5. Κατανομές σφαιριδίων σε διακεκριμένα κελιά



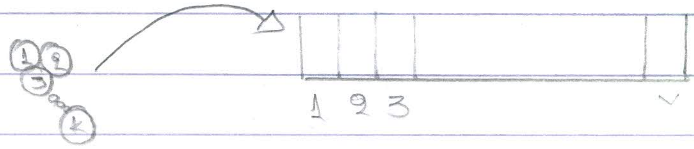
Είδος σφαιριδίων : Διακεκριμένα / όμοια

Χωρητικότητα κελιών : 1 / ∞

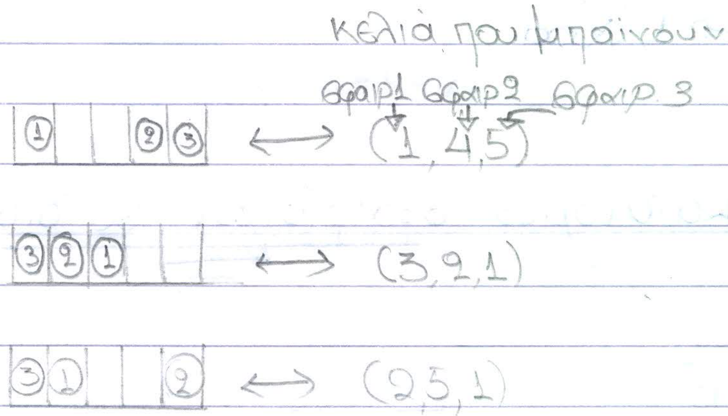
6. Περιπτώσεις

1η Περίπτωση: k διακεκριμένα σφαιρίδια
↓
ν διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας 1.

$1 \le k \le \nu$



π.χ.
$\nu = 5$
$k = 3$



Λύνεται σε στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή κελιού για το σφαιρίδιο 1 → ν τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή κελιού για το σφαιρίδιο 2 → $\nu-1$ τρόποι

⋮

kο στάδιο: Επιλογή κελιού για το σφαιρίδιο k → $\nu-k+1$ τρόποι

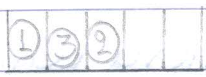
Από Πολ/κή Αρχή # κατανομών $= \nu(\nu-1)\cdot\ldots\cdot(\nu-k+1)$

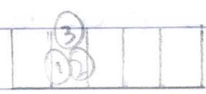
$\shortparallel$

διατάξεων ν ανά k $= (\nu)_k$

$2^{η}$ Περίπτωση: k διακεκριμένα σφαιρίδια $\downarrow$ $ν$ διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας ∞


$\longleftrightarrow (1,1,2)$

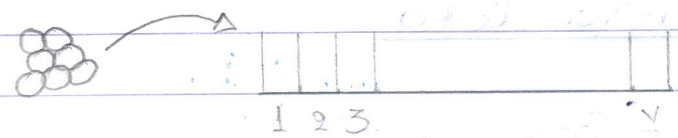

$\longleftrightarrow (1,3,2)$


$\longleftrightarrow (2,2,2)$

Όμοια με την $1^{η}$ περίπτωση έχω

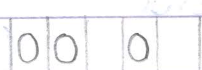
$$\#\text{κατανομών} = \underset{ν \text{ ανά } k}{\#\text{επαναληπτικών διατάξεων}} = ν^k$$

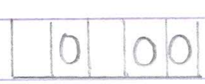
$3^{η}$ Περίπτωση: k όμοια σφαιρίδια $\downarrow$ $ν$ διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας 1

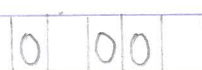


$1 \leq k \leq ν$

(*) π.χ.
$ν=5$
$k=3$


$\longleftrightarrow \{1,2,4\}$


$\longleftrightarrow \{2,4,5\}$


$\longleftrightarrow \{1,3,4\}$

κατανομών k όμοιων σφαιριδίων σε ν διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας 1

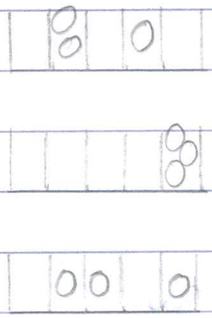
||

συνδυασμών ν ανά k (χωρίς επανάληψη) $= \binom{\nu}{k}$

4η Περίπτωση: k όμοια σφαιρίδια

↓

ν διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας ∞



$\longleftrightarrow \{2,2,4\}$

$\longleftrightarrow \{5,5,5\}$

$\longleftrightarrow \{2,3,5\}$

κατανομών k όμοιων σφαιριδίων σε ν διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας ∞

||

συνδυασμών ν ανά k με επανάληψη $= \left[{\nu \atop k} \right]$

7. <u>Πλήθος κατανομών k σφαιριδίων σε ν διακεκριμένα κελιά.</u>

Είδος σφαιριδίων

Χωρητικότητα κελιών	διακεκριμένα	όμοια	
1	$(\nu)_k = \frac{\nu!}{(\nu-k)!}$	$\binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}$	Χωρίς Επανάληψη
∞	ν^k	$\left[{\nu \atop k} \right]$	Με επανάληψη
	Διατάξεις	Συνδυασμοί	

8. Τύπος πλήθους Επαναληπτικών Συνδυασμών

$\begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix}$ = # κατανομών όμοιων σφαιριδίων σε ν διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας ∞

=

χωρισμοί k σφαιριδίων από ν-1 διαχωριστικά

=

μεταθέσεων 2 ειδών στοιχείων

"0" ⟶ k φορές

"1" ⟶ ν φορές

$$= \frac{(k+\nu-1)!}{k!\,(\nu-1)!} = \binom{\nu+k-1}{k}$$

30/10/12

Διατάξεις-Συνδυασμοί
Βασικές Σχέσεις
Αναγωγικές Σχέσεις

1. Υπενθυμίσεις

$$\#\text{ διατάξεων } \nu \text{ ανά } k = (\nu)_k = \frac{\nu!}{(\nu-k)!}$$

$$\#\text{ συνδυασμών } \nu \text{ ανά } k = \binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}$$

2. Αναγωγική (Αναδρομική) σχέση για $\binom{\nu}{k}$

Τρίγωνο Pascal

$$\binom{\nu}{k} = \binom{\nu-1}{k} + \binom{\nu-1}{k-1} \quad \text{Αναγωγική σχέση} \quad 1 \leq k \leq \nu$$

$$\binom{\nu}{0} = \binom{\nu}{\nu} = 1 \quad \text{Συνοριακές συνθήκες}$$

Απόδειξη

1ος τρόπος - Αλγεβρικές Πράξεις

$$\binom{\nu}{\nu} = \binom{\nu}{0} = \frac{\nu!}{0!(\nu-0)!} = 1$$

$$\binom{\nu}{k} = \binom{\nu-1}{k} + \binom{\nu-1}{k-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{\nu!}^{\,\nu}}{k!(\nu-k)!} = \frac{\cancel{(\nu-1)!}}{k!(\nu-1-k)!} + \frac{\cancel{(\nu-1)!}}{(k-1)!(\nu-k)!} \xLeftrightarrow[\cdot(\nu-1-k)!]{\cdot(k-1)!}$$

$$\frac{\nu}{k(\nu-k)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{\nu-k}$$ που ισχύει.

<u>2ος τρόπος - Συνδυαστικός - Επαγωγικός</u>

$$\binom{\nu}{0} = \#\,\underset{\nu \text{ ανά } 0}{\text{συνδυασμών}} = 1 \quad \left(\begin{array}{l}\text{μόνο}\\ \text{το κενό}\end{array}\right)$$

$$\binom{\nu}{\nu} = \#\,\underset{\nu \text{ ανά } \nu}{\text{συνδυασμών}} = 1 \quad \left(\begin{array}{l}\text{μόνο}\\ \text{όλο το σύνολο}\end{array}\right)$$

$\underline{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$

Σύνολο συνδυασμών του $\underline{\Omega}$ με k στοιχεία $=$ $\underbrace{\text{Σύνολο συνδυασμών του } \underline{\Omega} \text{ με } k \text{ στοιχεία που δεν περιέχουν το } \omega_\nu}_{A}$ $\cup$ $\underbrace{\text{Σύνολο συνδυασμών του } \underline{\Omega} \text{ με } k \text{ στοιχεία που περιέχουν το } \omega_\nu}_{B}$

Προσθετική Αρχή

$\Longrightarrow \binom{\nu}{k} = N(A) + N(B)$

$N(A) = \binom{\nu-1}{k}$ Συνδυασμός του Ω ν ανά k που δεν περιέχει το ω_ν = Συνδυασμός του $\Omega \setminus \{\omega_\nu\}$ ανά k

Επίσης $N(B) = \binom{\nu-1}{k-1}$ Συνδυασμός του Ω ν ανά k που περιέχει το ω_ν = Συνδυασμός του $\Omega \setminus \{\omega_\nu\}$ με k-1 στοιχεία $\cup \{\omega_\nu\}$

3. Τρίγωνο Pascal

ν \ k	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

"1": συνοριακές συνθήκες $\binom{\nu}{0} = \binom{\nu}{\nu} = 1$

"0": $\binom{\nu}{k} = 0$ για $k > \nu$

"↴": $\binom{\nu}{k} = \binom{\nu-1}{k-1} + \binom{\nu-1}{k}$ Αναγωγική Σχέση

Ιδιοτητες

1. καθε γραμμη δινει τους συντελεστες του $(a+b)^{\nu}$

$$(a+b)^2 = \boxed{1}a^2 + \boxed{2}ab + \boxed{1}b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} a^k b^{\nu-k}$$

2. Το αθροισμα των στοιχειων της γραμμης ν ειναι 2^{ν}

3. Η γραμμη ν δινει τα ψηφια του 11^{ν}.

$11^0 = 1$ $\quad$ $11^3 = 1331$

$11^1 = 11$ $\quad$ $11^4 = 14641$

$11^2 = 121$ $\quad$ $11^5 = 161051$

"Οι αριθμοί προκύπτουν διαβάζοντας κάθε γραμμή του τριγώνου Pascal από δεξιά προς τα αριστερά, μεταφέροντας κρατούμενα προς τα αριστερα αν ένα στοιχείο είναι μεγαλύτερο του 9"

$$(10+1)^{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} 10^k$$

4. Κατακόρυφη Αναγωγική σχέση

ν \ k	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	1	4	6	4	1

$$\sum_{j=0}^{\nu} \binom{j}{k} = \binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \binom{2}{k} + \dots + \binom{\nu}{k} = \binom{\nu+1}{k+1}$$

Απόδειξη

$$\binom{\nu+1}{k+1} = \binom{\nu}{k} + \binom{\nu}{k+1}$$

$$= \binom{\nu}{k} + \binom{\nu-1}{k} + \binom{\nu-1}{k+1}$$

$$= \binom{\nu}{k} + \binom{\nu-1}{k} + \binom{\nu-2}{k} + \binom{\nu-2}{k+1}$$

$$= \dots$$

$$= \binom{\nu}{k} + \binom{\nu-1}{k} + \binom{\nu-2}{k} + \dots + \binom{0}{k}$$

5. Διαγώνια αναγωγική σχέση

ν \ k	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	1	4	6	4	1

$$\underbrace{\binom{\nu}{0}+\binom{\nu+1}{1}+\binom{\nu+2}{2}+\dots+\binom{\nu+k}{k}}_{\sum_{i=0}^{k}\binom{\nu+i}{i}}=\binom{\nu+k+1}{k}$$

$$=\binom{\nu+k+1}{k}$$

6. Άθροιση κατά δευτερεύουσες διαγώνιες

ν \ k	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13

Αριθμοί Fibonacci

4. Αναγωγική σχέση για διατάξεις

$(\nu)_k = (\nu-1)_k + k(\nu-1)_{k-1} \qquad 1 \le k \le \nu$

$(\nu)_0 = 1$

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu-1}, \omega_\nu\}$

$(\nu)_\nu = \nu!$

5. Συμμετρική ιδιότητα του $\binom{\nu}{k}$

$\binom{\nu}{k} = \binom{\nu}{\nu-k}$

Υποσύνολα με k στοιχεία — Υποσύνολα με ν-k στοιχεία

$A \xleftrightarrow[\text{"επί"}]{\text{"1-1"}} A^c$ συμπλήρωμα

6. Άσκηση S.O.S.

ν ανδρόγυνα $(A_1, \Gamma_1), (A_2, \Gamma_2), \dots, (A_\nu, \Gamma_\nu)$

2ν άτομα
ν ζευγάρια

k-μελών συμβουλίων στις περιπτώσεις

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

(i) χωρίς περιορισμό

$$\# = \binom{2\nu}{k}$$

(ii) με ακριβώς j άνδρες ($j \in \{0, 1, \ldots, k\}$)

$$\# = \underbrace{\binom{\nu}{j}}_{\substack{\text{επιλογή ανδρών} \\ 1^{\text{ο}} \text{ στάδιο}}} \cdot \underbrace{\binom{\nu}{k-j}}_{\substack{\text{επιλογή γυναικών} \\ 2^{\text{ο}} \text{ στάδιο}}}$$

(iii) με άνδρα πρόεδρο

$$\# = \underbrace{\nu}_{\substack{\text{επιλογή άνδρα} \\ \text{προέδρου}}} \cdot \underbrace{\binom{2\nu-1}{k-1}}_{\substack{\text{επιλογή υπόλοιπων} \\ \text{ατόμων}}}$$

(iv) με πρόεδρο

$$\# = \underbrace{2\nu}_{\text{επιλογή προέδρου}} \cdot \underbrace{\binom{2\nu-1}{k-1}}_{\substack{\text{επιλογή} \\ \text{υπόλοιπων} \\ \text{ατόμων}}} = \underbrace{\binom{2\nu}{k}}_{\substack{\text{επιλογή} \\ \text{ατόμων}}} \cdot \underbrace{k}_{\substack{\text{επιλογή προέδρου} \\ \text{μεταξύ αυτών}}} = \frac{(2\nu)!}{(k-1)!\,(2\nu-k)!}$$

(v) με γυναίκες πρόεδρο, γραμματέα, ταμεία

$$\# = \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdot\binom{2\nu-3}{k-3} = (\nu)_3\binom{2\nu-3}{k-3}$$

1/11/19

Ασκήσεις Διατάξεις-Συνδυασμοί

1. Άσκηση (συνέχεια)

ν Ανδρόγυνα $(A_1, \Gamma_1) \ldots (A_\nu, \Gamma_\nu)$

\# k-μελών συμβουλίων στις περιπτώσεις

(vi) με ακριβώς j άνδρες, χωρίς να επιτρέπονται οι γυναίκες τους.

$$\# = \binom{\nu}{j} \cdot \binom{\nu-j}{k-j}$$ ← 2º στάδιο: επιλογή γυναικών

↑

1º στάδιο: επιλογή ανδρών

(vii) χωρίς άτομα απ' το ίδιο ανδρόγυνο

α' τρόπος

$$\#\ k\text{-μελών συμβουλίων χωρίς άτομα απ' το ίδιο ανδρόγυνο} \overset{\substack{\text{Προσθετική}\\ \text{Αρχή}}}{=} \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\#\ k\text{-μελών συμβουλίων χωρίς άτομα απ' το ίδιο ανδρόγυνο με ακριβώς } j \text{ άνδρες}}_{\overset{(vi)}{=} \binom{\nu}{j}\cdot\binom{\nu-j}{k-j}}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{\nu}{j}\binom{\nu-j}{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \frac{\nu!}{j!(\nu-j)!}\cdot\frac{(\nu-j)!}{(k-j)!(\nu-k)!}$$

$$= \frac{\nu!}{(\nu-k)!}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!\,(k-j)!} = \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}$$

$$= \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} = \binom{\nu}{k}2^k$$

β΄ τροπος

Δουλεύουμε σε στάδια για το σχηματισμό του συμβουλίου:

$1^{\underline{o}}$ στάδιο: Επιλογή k ανδρογύνων από τα ν για να μπει ο Α ή η Γ. $\rightarrow \binom{\nu}{k}$ τρόποι

$2^{\underline{o}}$ στάδιο: Α ή Γ απ' το ανδρόγυνο 1 $\rightarrow$ 2 τρόποι

$3^{\underline{o}}$ στάδιο: Α ή Γ απ' το ανδρόγυνο 2 $\rightarrow$ 2 τρόποι

$\vdots$

$k+1^{\underline{o}}$ στάδιο: Α ή Γ απ' το ανδρόγυνο $k \rightarrow$ 2 τρόποι

$$\# = \binom{\nu}{k} \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{k\text{-φορες}} = \binom{\nu}{k} 2^k$$

γ' τρόπος

Δουλεύουμε σε στάδια για το σχηματισμό του συμβουλίου:

1º στάδιο: Επιλογή 1ου ατόμου → 2ν τρόποι

2º στάδιο: Επιλογή 2ου ατόμου → $2\nu-2$ τρόποι

3º στάδιο: Επιλογή 3ου ατόμου → $2\nu-4$ τρόποι

⋮

kº στάδιο: Επιλογή kου ατόμου → $2\nu-2(k-1)$ τρόποι

$\downarrow$

$2\nu-2k+2$

Από Πολλ/κή Αρχή # συμβουλίων =

$(2\nu)\cdot(2\nu-2)(2\nu-4)\cdot\ldots\cdot(2\nu-2k+2) =$

$= 2^k\nu(\nu-1)\cdot\ldots\cdot(\nu-k+1)$

$= 2^k\cdot\dfrac{\nu!}{(\nu-k)!}$

Άρα η λύση αυτή απαριθμεί "διατεταγμένα" k-μελή συμβούλια.

Επομένως κάθε συμβούλιο έχει μετρηθεί k! φορές

Άρα ο σωστός αριθμός $\# = \dfrac{2^k\frac{\nu!}{(\nu-k)!}}{k!} = 2^k\binom{\nu}{k}$

(viii) με άτομα του ίδιου φύλλου

$\# = 2\binom{\nu}{k}$

7. <u>Άσκηση</u>

ν αγόρια $(A_1, A_2, \ldots, A_\nu)$ $(\nu \leq k+1)$
k κορίτσια $(k_1, k_2, \ldots, k_k)$

\# τοποθετήσεων σε σειρά χωρίς αγόρια σε διαδοχικές θέσεις.

Μια τέτοια τοποθέτηση γίνεται σε στάδια:

1ο στάδιο: Τοποθέτηση των κοριτσιών σε σειρά
$\hookrightarrow k!$ τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή διάταξης ν θέσεων από $k+1$ μεταξύ των κοριτσιών για να τοποθετηθούν τα αγόρια $\longrightarrow$ $(k+1)_\nu$ τρόποι

Από Πολλ/κή Αρχή \# τοποθετήσεων $= k!(k+1)_\nu$

$$= \frac{k!(k+1)!}{(k+1-\nu)!}$$

Εναλλακτικά

1ο στάδιο: κορίτσια στη σειρά → $k!$ τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή κενών θέσεων → $\binom{k+1}{\nu}$ τρόποι

3ο στάδιο: Αγόρια στη σειρά → $\nu!$ τρόποι

Από Πολλ/κή Αρχή # τοποθετήσεων $= k!\binom{k+1}{\nu}\nu!$

τοποθετήσεων $= k!\,(k+1)_\nu$

$$= \frac{k!\,(k+1)!}{(k+1-\nu)!}$$

$$k!\,\underset{1^o}{(k+1)}\;\underset{2^o}{k}\;\underset{3^o}{(k-1)}\cdots\underset{\nu^o}{(k-\nu+2)} = \frac{k!\,(k+1)!}{(k-\nu+1)!}$$

8. Θέμα 1 / Σεπτ. 2012

τοποθετήσεων των $1,2,\ldots,10$ σε σειρά στις περιπτώσεις:

(α) το 3 να βρίσκεται πριν το 5.

(β) το 3 να βρίσκεται πριν το 5 και το 5 πριν το 7.

(γ) το 3 και το 5 να βρίσκονται πριν το 7.

(δ) οι 5 πρώτες θέσεις έχουν περιττούς

(ε) στις 3 πρώτες θέσεις δεν υπάρχουν άρτιοι.

Λύση

(α) - α τρόπος

Η τοποθέτηση γίνεται σε στάδια:

1ο στάδιο: Τοποθέτηση σε σειρά όλων των αριθμών εκτός του 3 και του 5 → 8! τρόποι.

2ο στάδιο: Επιλογή θέσεων για το 3 και το 5 μεταξύ των 9 "κενών" → $\left[{9 \atop 2} \right]$ τρόποι

Από Πολλ/κή Αρχή # τοποθετήσεων $= 8! \left[{9 \atop 2} \right]$

$$= 8! \binom{9+2-1}{2} = 8! \binom{10}{2}$$

$$= \frac{10!}{2}$$

β τρόπος

Η τοποθέτηση γίνεται σε στάδια:

1ο στάδιο: Διαλέγω 2 θέσεις από τις 10 για τα 3 και 5 → $\binom{10}{2}$ τρόποι

2ο στάδιο: Τοποθετώ τα υπόλοιπα σε σειρά → 8! τρόποι

Από Πολλ/κή Αρχή # τοποθετήσεων $= \binom{10}{2} 8!$

$$= \frac{10!}{2}$$

γ' τρόπος

Λόγω συμμετρίας :

\# μεταθέσεων με το 3 πριν το 5 $\longrightarrow a_1$

$\shortparallel$

\# μεταθέσεων με το 5 πριν το 3 $\longrightarrow a_2$

$a_1 + a_2 =$ # όλων των μεταθέσεων $= 10!$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \frac{10!}{2}$$

8/11/19

1. Συνέχεια Προηγούμενης Άσκησης

β) $(10)_7 = \frac{10!}{3!} = \frac{10!}{6} = 7! \left[\frac{8}{3}\right]$

γ) $\frac{10!}{3}$

δ) $5!\,5!$

↑ διάταξη αρτίων

διάταξη περιττών

ε) $(5)_3\, 7!$

9. Άσκηση - Τύπος Cauchy

α. $\binom{r+s}{v} = \sum_{k=0}^{v} \binom{r}{k} \binom{s}{v-k}$ Τύπος Cauchy

$r, s, v \geq 0 \in \mathbb{Z}$

π.χ.

$$\binom{3+5}{2} = \binom{3}{0}\binom{5}{2} + \binom{3}{1}\binom{5}{1} + \binom{3}{2}\binom{5}{0}$$

β. $\binom{2\nu}{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k}^2$

γ. $\binom{r+s+\nu-1}{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{r+k-1}{k} \binom{s+\nu-k-1}{\nu-k}$

Απόδειξη

α. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1}, \ldots, \omega_{r+s}\}$

$\binom{r+s}{\nu} = \#$ συνδυασμών του Ω ανά ν
$\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$
$\sum_{k=0}^{\nu} \#$ συνδυασμών του Ω με ν στοιχεία εκ των οποίων τα k προέρχονται από τα $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$.

Όμως ένας συνδυασμός του Ω ανά ν εκ των οποίων k στοιχεία προέρχονται από τα $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ γίνεται σε 2 στάδια:

1º στάδιο: Επιλογή k στοιχείων από $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$
$\hookrightarrow \binom{r}{k}$ τρόποι

2º στάδιο: Επιλογή $\nu-k$ στοιχείων από $\{\omega_{r+1}, \ldots, \omega_{r+s}\}$
$\hookrightarrow \binom{s}{\nu-k}$ τρόποι

Από Πολλ/κή Αρχή $\#$ συνδυασμών στο άθροισμα
$\shortparallel$
$\binom{r}{k}\binom{s}{\nu-k}$

β. $\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}^2=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\binom{\nu}{k}$

συμμετρική ιδιότητα

$$\overset{\downarrow}{=}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\binom{\nu}{\nu-k}\ \underset{r=s=\nu}{\overset{\text{Τύπος Cauchy}}{=\!=}}\ \binom{\nu+\nu}{\nu}=\binom{2\nu}{\nu}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ο παραπάνω τρόπος είναι μία ΣΤΑΝΤΑΡ τεχνική για υπολογισμό αθροισμάτων με τετράγωνα συνδυασμών $\binom{\nu}{k}^2$.

γ. Ο τύπος Cauchy ισχύει και για επαναληπτικούς συνδυασμούς.

$$\begin{bmatrix} r+s \\ \nu \end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{\nu}\begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ \nu-k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\binom{r+s+\nu-1}{\nu}=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{r+k-1}{k}\binom{s+\nu-k-1}{\nu-k}$$

3. Διαιρέσεις - Διαμερίσεις

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$

▸ Διαίρεση $(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ του Ω είναι μια διατεταγμένη r-άδα υποσυνόλων του με

(i) $A_i \cap A_j = \emptyset$, για $i \neq j$

(ii) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r = \Omega$

▸ Διαμέριση $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ του Ω είναι μια μη-διατεταγμένη r-συλλογή υποσυνόλων του με

(i) $A_i \cap A_j = \emptyset$, για $i \neq j$

(ii) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r = \Omega$

(iii) $A_i \neq \emptyset$, για όλα τα i

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στη διαμέριση δεν έχουμε διάταξη και δεν επιτρέπονται κενά σύνολα.

4. <u>Άσκηση</u>

Έχουμε 26 άτομα $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{26}$

(i) Να βρεθεί το πλήθος των διαιρέσεων $(A_1, A_2, \dots, A_7)$ που

$A_1 \rightarrow 2$ στοιχείων
$A_2 \rightarrow 2$ στοιχείων
$A_3 \rightarrow 2$ στοιχείων
$A_4 \rightarrow 5$ στοιχείων
$A_5 \rightarrow 5$ στοιχείων
$A_6 \rightarrow 5$ στοιχείων
$A_7 \rightarrow 5$ στοιχείων

Γίνεται σε στάδια:

1º στάδιο: $\binom{26}{2}$

2º στάδιο: $\binom{24}{2}$

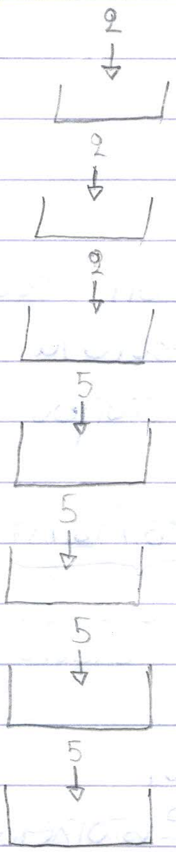
3º στάδιο: $\binom{22}{2}$

4º στάδιο: $\binom{20}{5}$

5º στάδιο: $\binom{15}{5}$

6º στάδιο: $\binom{10}{5}$

7º στάδιο: $\binom{5}{5}$



διαιρέσεων τύπου 2-2-2-5-5-5-5

$$= \binom{26}{2}\binom{24}{2}\binom{22}{2}\binom{20}{5}\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5}$$

$$= \frac{26!}{2!\,24!}\,\frac{24!}{2!\,22!}\,\frac{22!}{2!\,20!}\,\frac{20!}{5!\,15!}\cdots = \frac{26!}{2!\,2!\,2!\,5!\,5!\,5!\,5!}$$

$$= \frac{26!}{(2!)^3(5!)^4}$$

(ii) Να βρεθεί το πλήθος των διαμερίσεων $\{A_1, A_2, \ldots, A_7\}$ σε 3 σύνολα 2 στοιχείων και 4 σύνολα 5 στοιχείων.

Λύση

Από μια διαμέριση του Ω σε 3 σύνολα 2 στοιχείων και σε 4 σύνολα 5 στοιχείων αντιστοιχούν 3! 4! διαιρέσεις τύπου 2-2-2-5-5-5-5

$$\{\underbrace{A_1, A_2, A_3}_{\substack{2\text{ στοιχεία}\\ \text{έκαστο}}}, \underbrace{A_4, A_5, A_6, A_7}_{\substack{5\text{ στοιχεία}\\ \text{έκαστο}}}\} \to \left(\underset{2}{\uparrow}\ \underset{2}{\uparrow}\ \underset{2}{\uparrow}\ ,\ \underset{5}{\uparrow}\ \underset{5}{\uparrow}\ \underset{5}{\uparrow}\ \underset{5}{\uparrow}\right)$$

Άρα
$$\left(\begin{array}{l}\#\text{ διαμερίσεων}\\ \text{σε 3 σύνολα 2 στοιχείων}\\ \text{και 4 σύνολα 5 στοιχείων}\end{array}\right) \times 3!\,4! = \begin{array}{c}\#\text{ διαιρέσεων}\\ \text{τύπου}\\ 2\text{-}2\text{-}2\text{-}5\text{-}5\text{-}5\text{-}5\end{array} = \frac{26!}{(2!)^3(5!)^4}$$

$\Rightarrow$ # διαμερίσεων σε
3 σύνολα 2 στοιχείων
4 σύνολα 5 στοιχείων $= \dfrac{26!}{3!\,4!\,(2!)^3(5!)^4}$

5. Πλήθος διαιρέσεων και διαμερίσεων

διαιρέσεων
ενός συνόλου ν
στοιχείων σε r
υποσύνολα με
k_1 στοιχεία στο 1ο
k_2 στοιχεία στο 2ο
⋮
k στοιχεία στο rο

$$= \binom{k_1+k_2+\dots+k_r}{k_1}\binom{k_2+k_3+\dots+k_r}{k_2}\cdots\binom{k_r}{k_r} = \frac{(k_1+k_2+\dots+k_r)!}{k_1!\,k_2!\cdots k_r!}$$

$\nu = k_1+\dots+k_r$

διαμερίσεων ενός συνόλου ν στοιχείων σε r υποσύνολα με

$r_1 \rightarrow$ 1-σύνολα
$r_2 \rightarrow$ 2-σύνολα
$r_3 \rightarrow$ 3-σύνολα
⋮
$r_\nu \rightarrow$ ν-σύνολα

$$= \frac{\nu!}{r_1!\,r_2!\cdots r_\nu!\,(1!)^{r_1}(2!)^{r_2}\cdots(\nu!)^{r_\nu}}$$

$r_1\cdot 1 + r_2\cdot 2 + \dots r_\nu\cdot \nu = \nu$
$r_1 + r_2 + \dots + r_\nu = r$

6. Άσκηση

100 διακεκριμένα γράμματα σε 1 ταχυδρομείο

\# μοιράσματος

σε 3 κουτιά των 20
2 κουτιά των 10 όμοια κουτιά
και 4 κουτιά των 5.

κουτιά διακεκριμένα

Διαιρέσεις

\# τρόπων μοιράσματος

$$= \frac{100!}{(20!)^3 (10!)^2 (5!)^4}$$

Διαμερίσεις

\# τρόπων μοιράσματος

$$= \frac{100!}{3!\,2!\,4!\,(20!)^3 (10!)^2 (5!)^4}$$

20/11/12

Πλήθος ακεραίων λύσεων γραμμικής εξίσωσης

1. Βασικό Πρόβλημα.

ακέραιων λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_v = k$ (*)
υπό περιορισμούς

("Μοιράζω" το k σε v αριθμούς)

π.χ.
$x_1+x_2+x_3+x_4 = 2$
$k=2$, $v=4$

Άπειρες ακεραίες λύσεις
$(-k, k+2, 0, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$
είναι λύση

$x_1+x_2+x_3+x_4=2$
$x_i \geq 0$, $i=1,2,3,4$

$$\left.\begin{array}{l}(2,0,0,0)\\(1,1,0,0)\\(0,1,0,1)\\\vdots\end{array}\right\} \text{ΠΟΣΕΣ ΛΥΣΕΙΣ;}$$

2. # λύσεων της (*) με $x_i \in \{0,1\}$, $i=1,2,\dots,\nu$

Ισοδύναμο με # κατανομών k ομοίων σφαιριδίων σε ν διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας 1 $= \binom{\nu}{k}$

$x_1+x_2+x_3+x_4=2$

$x_i \in \{0,1\}$, $i=1,2,3,4$

$1+0+1+0=2 \longrightarrow$ |0| |0| |

3. # λύσεων της (*) με $x_i \geq 0$, $i=1,2,\dots,\nu$

Ισοδύναμο με # κατανομών k ομοίων σφαιριδίων σε ν διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας ∞ $= \left[{\nu \atop k}\right]$

$\binom{\nu+k-1}{k}$

4. # ακεραίων λύσεων της (*) με $x_i \geq s_i$, $i=1,2,\dots,\nu$

π.χ.

$x_1+x_2+x_3+x_4=100$

$x_1 \geq 5$

$x_2 \geq 8$

$x_3 \geq 10$

$x_4 \geq 10$

$\Longleftrightarrow$ # κατανομών 100 ομοίων σφαιριδίων σε 4 διακεκριμένα κελιά χωρητικότητας ∞ ώστε στο 1ο να μπουν τουλ. 5 στο 2ο να μπουν τουλ. 8 στο 3ο να μπουν τουλ. 10 και στο 4ο να μπουν τουλ. 10

▶ Αν όλα τα $s_i \geq 0$

$\#$ ακεραίων λύσεων της $(*)$ με $x_i \geq s_i$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$

$$\|$$

$\#$ κατανομών k ομοίων σφαιριδίων σε ν διακεκριμένα κελιά ώστε το κελί i να έχει τουλάχιστον s_i σφαιρίδια : $i = 1, 2, \ldots, \nu$

$$\|$$

$$\left[\begin{matrix} \nu \\ k-(s_1+s_2+\ldots+s_\nu) \end{matrix}\right]$$

▶ Γενικά μπορώ να δουλεύω με αλλαγή μεταβλητής

$\#$ ακεραίων λύσεων της $(*)$, $x_i \geq s_i$

$$\| \quad y_i = x_i - s_i \, , \; i = 1, \ldots, \nu$$

$\#$ ακεραίων λύσεων $y_1 + y_2 + \ldots + y_\nu = k - (s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu)$

$$\| \qquad\qquad y_i \geq 0$$

$$\left[\begin{matrix} \nu \\ k-(s_1+s_2+\ldots+s_\nu) \end{matrix}\right]$$

5. # ακεραίων λύσεων της (*) με $x_i \le m_i$

Προσοχή!: Δεν έχει ανάλογο με κατανομή σφαιριδίων σε κελιά.

$$\begin{array}{c} x_1+x_2+\dots+x_\nu = k \\ x_i \le m_i,\ i=1,2,\dots,\nu \end{array} \overset{}{\underset{y_i=m_i-x_i\ge 0}{\Longleftrightarrow}} \begin{array}{c} m_1-y_1+m_2-y_2+\dots+m_\nu-y_\nu=k \\ y_i\ge 0,\ i=1,2,\dots,\nu \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{c} y_1+y_2+\dots+y_\nu = m_1+m_2+\dots+m_\nu-k \\ y_i \ge 0 \end{array}$$

Άρα,

ακεραίων λύσεων της (*) με $x_i \le m_i$, $i=1,\dots,\nu$

$$=$$

$$\left[\, m_1+m_2+\dots+m_\nu-k \,\right]$$

6. Διατυπώσεις σε σφαιρίδια - κελιά

\# Κατανομών k όμοιων σφαιριδίων σε ν διακεκριμένα κελιά → ώστε το i κελί να έχει τουλάχιστον s_i σφαιρίδια
(λύνεται με $y_i = x_i - s_i$ κ.λ.π.)

$x_1 + x_2 + \dots + x_\nu = k$

$x_i \geq s_i \, , \, i = 1, 2, \dots, \nu$

ώστε το i κελί να έχει το πολύ m_i σφαιρίδια
(Οπωσδήποτε Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού)

(το i κελί να έχει χωρητικότητα m_i)

$x_1 + x_2 + \dots + x_\nu = k$

$0 \leq x_i \leq m_i \, , \, i = 1, 2, \dots, \nu$

(Αμφίπλευροι περιορισμοί)

7. Παρατηρήσεις

\# ακεραίων λύσεων της $x_1 + x_2 + \dots + x_\nu = k$

$\underbrace{s_i \leq x_i \leq m_i}_{\text{Αμφίπλευροι περιορισμοί}} \, , \, i = 1, 2, \dots, \nu$

Λύνεται με Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

8. # ακεραίων λύσεων ανίσωσης $x_1+x_2+\dots+x_\nu \leq k$
$x_i \geq 0$

π.χ.

$x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 8$ $\iff$ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 8$

$x_1 \geq 0$ — $x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 2$ — $x_2 \geq 2$

$x_3 \in \{0,1\}$ — $x_3 \in \{0,1\}$

$x_4 \geq 0$ — $x_4 \geq 0$

$\boxed{x_5 \geq 0}$

▶ Κάθε ανίσωση μετατρέπεται σε εξίσωση με την εισαγωγή μιας νέας μεταβλητής $x_{\nu+1}$ και του περιορισμού $x_{\nu+1} \geq 0$.

9. <u>Παράδειγμα</u>

ακεραίων λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu \leq k$, $x_i \geq 0$, $i=1,2,\dots,\nu$ $= \left[\begin{matrix}\nu+1\\ k\end{matrix}\right]$

$\|$

$\sum_{j=0}^{k}$ # ακεραίων λύσεων της $x_1+x_2+\dots+x_\nu = j$ με $x_i \geq 0$, $i=1,2,\dots,\nu$

$\|$

$$\sum_{j=0}^{k} \left[\begin{matrix}\nu\\ j\end{matrix}\right]$$

ή

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{\nu+j-1}{j} = \binom{\nu+1+k-1}{k} = \binom{\nu+k}{k}$$

διαγώνια αναδρομική σχέση στο τριγ. Pascal

10. Άσκηση - Θέμα 2 / Φεβρουάριος 2002

\# ακεραίων λύσεων $x_1+x_2+\dots+x_{2\nu}+x_{2\nu+1}=k$

$x_i \geq 2$ για i περιττό

$1 \leq i \leq 2\nu-1$

$k \geq 5\nu+4$

$x_i \geq 3$ για i άρτιο

$3 \leq x_{2\nu+1} \leq 4$

Λύση

$y_i = x_i - 2$, i περιττό $1 \leq i \leq 2\nu-1$

$y_i = x_i - 3$, i άρτιο

$y_{2\nu+1} = x_{2\nu+1} - 3$

$$\underbrace{(y_1+2)+(y_2+3)+(y_3+2)+\dots+(y_{2\nu}+3)+(y_{2\nu+1}+3)=k}$$

$$y_1+y_2+\dots+y_{2\nu+1}=k-5\nu-3$$

$, y_i \geq 0$

$i=1,2,\dots,2\nu$

$0 \leq y_{2\nu+1} \leq 1$

$$\|$$

$\sum_{y_{2\nu+1}=0}^{1}$ \# ακεραίων λύσεων της $y_1+y_2+\dots+y_{2\nu}=k-5\nu-3-y_{2\nu+1}$

$y_1,\dots,y_{2\nu} \geq 0$.

$$\|$$

$$\begin{bmatrix} 2\nu \\ k-5\nu-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\nu \\ k-5\nu-4 \end{bmatrix}$$

$$\#\,\text{λύσεων} = \begin{cases} 0 & k \leq 5\nu+2 \\ 1 & k = 5\nu+3 \\ \begin{bmatrix} 2\nu \\ k-5\nu-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\nu \\ k-5\nu-4 \end{bmatrix} & k \geq 5\nu+4 \end{cases}$$