13/12/12

Γεννήτριες Συνδυασμών

1. Βασικό Πρόβλημα

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$

\# συνδυασμών ν ανά κ του Ω όπου
το ω_1 μπορεί να εμφανίζεται r_1 φορές, $r_1 \in A_1$
το ω_2 μπορεί να εμφανίζεται r_2 φορές, $r_2 \in A_2$
⋮
το ω_ν μπορεί να εμφανίζεται r_ν φορές, $r_\nu \in A_\nu$.

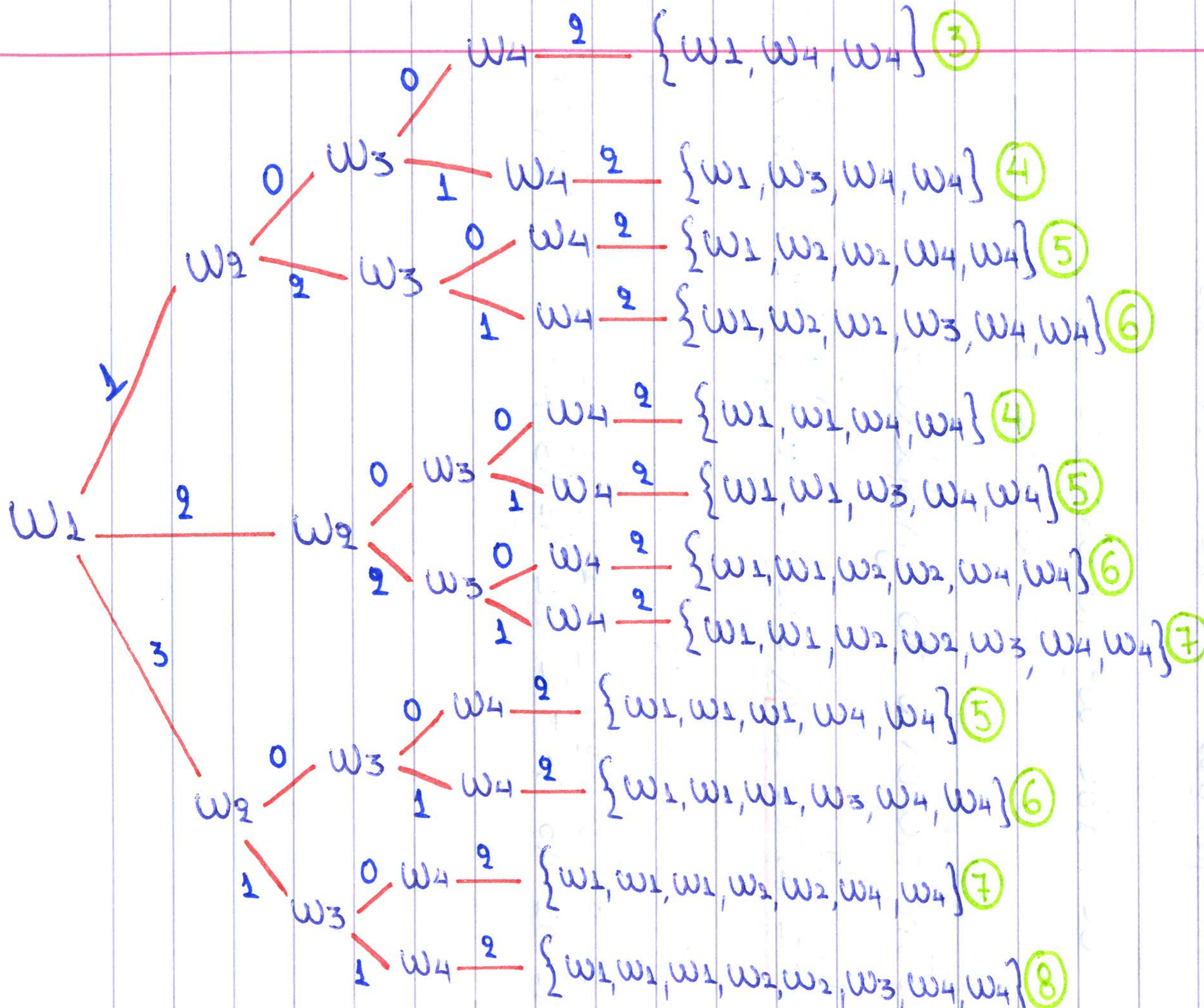
2. Παράδειγμα

\# συνδυασμών 4 ανά κ του $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$
όπου
το ω_1 εμφανίζεται 1 ή 2 ή 3 φορές, $A_1 = \{1, 2, 3\}$

το ω_2 εμφανίζεται 0 ή 2 φορές, $A_2 = \{0, 2\}$

το ω_3 εμφανίζεται το πολύ 1 φορά, $A_3 = \{0, 1\}$

το ω_4 εμφανίζεται ακριβώς 2 φορές, $A_4 = \{2\}$


w1
w2
w3
w4
{w1, w4, w4} 3
{w1, w3, w4, w4} 4
{w1, w2, w2, w4, w4} 5
{w1, w2, w2, w3, w4, w4} 6
{w1, w1, w4, w4} 4
{w1, w1, w3, w4, w4} 5
{w1, w1, w2, w2, w4, w4} 6
{w1, w1, w2, w2, w3, w4, w4} 7
{w1, w1, w1, w4, w4} 5
{w1, w1, w1, w3, w4, w4} 6
{w1, w1, w1, w2, w2, w4, w4} 7
{w1, w1, w1, w2, w2, w3, w4, w4} 8

κ	# συνδυασμών
0	0
1	0
2	0
3	1
4	2
5	3
6	3
7	2
8	1
9	0

Ιδέα 1: Αλγεβροποίηση της διαδικασίας

Δέντρο ≡ Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων

$\omega_j \longleftrightarrow x_j \quad , j=1,2,3,4$

$$(x_1^1+x_1^2+x_1^3)(x_2^0+x_2^2)(x_3^0+x_3^1)\,x_4^2 =$$
$$= x_1^1\cdot x_2^0\cdot x_3^0\cdot x_4^2 + x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^2 + x_1^1 x_2^2 x_3^0 x_4^2 +$$
$$+ \dots + x_1^3 x_2^2 x_3^1 x_4^2$$

Ιδέα 2: Διαχωρισμός των συνδυασμών ανάλογα με το πλήθος των στοιχείων τους

Αντί σε κάθε ω_j να αντιστοιχώ x_j
αντιστοιχώ $t\cdot x_j$.

Δηλαδή παίρνω το γινόμενο:

$$\boxed{\left((t\cdot x_1)^1+(t\cdot x_1)^2+(t\cdot x_1)^3\right)}\ \boxed{\left((t x_2)^0+(t x_2)^2\right)}\ \left((t x_3)^0+(t x_3)^1\right)(t x_4)^2 =$$

Απαριθμήτρια του ω_1 απαριθμήτρια του ω_2

$$= t^3\cdot x_1^1\cdot x_2^0\cdot x_3^0\cdot x_4^2 + t^4\cdot x_1^1\cdot x_2^0 x_3^1 x_4^2 + \dots + t^8\cdot x_1^3 x_2^2 x_3^1 x_4^2$$

Ιδέα 3: Αν δεν με ενδιαφέρει ποιοι είναι αλλά πόσοι είναι τότε θέτω: $x_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$

Τότε ο συντελεστής του t^k θα μου δίνει το # των συνδυασμών ν ανά k.

$$(t^1 + t^2 + t^3)(t^0 + t^2)(t^0 + t^1)t^2 =$$

$$= t^3 + 2t^4 + 3t^5 + 3t^6 + 2t^7 + t^8$$

3. Γενική διαδικασία λύσης του προβλήματος

συνδυασμών ν ανά k με επανάληψη που το ω_j επιτρέπεται να εμφανίζεται r_j φορές, $r_j \in A_j$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$.

ΒΗΜΑ 1

$$\omega_j \leftrightarrow t \cdot x_j \quad , \quad \underbrace{A_j(t, x_j)}_{\text{απαριθμήτρια του } \omega_j} = \sum_{r_j \in A_j} (t\, x_j)^{r_j} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, \nu$$

ΒΗΜΑ 2

$$A_j(t) = A_j(t, 1) \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, \nu$$

ΒΗΜΑ 3

$$A(t) = A_1(t)\, A_2(t) \ldots A_\nu(t)$$, Γεννήτρια Συνδυασμών

ΒΗΜΑ 4

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

→ # συνδυασμών ν ανά κ με τους περιορισμούς.

4. Βασικές Γεννήτριες

- $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$

- $(1+t)^\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} t^k$

- $(1-t)^{-\nu} = \frac{1}{(1-t)^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} \nu \\ k \end{matrix} \right] t^k$

5. Άσκηση - Θέμα 4ο Σεπτέμβριος 2012

a_k = # επαναληπτικών συνδυασμών των $\nu+2$ στοιχείων του $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}\}$ ανά κ όπου:

ω_0 επιτρέπεται περιττό αριθμό

$\omega_{\nu+1}$ επιτρέπεται 1 ή 2 φορές

$\omega_1, \ldots, \omega_\nu$ επιτρέπονται οσεσδήποτε φορές

Λύση

ΒΗΜΑ 1

$$A_0(t,x_0) = (t x_0)^1 + (t\cdot x_0)^3 + (t x_0)^5 + \dots$$
$$A_j(t,x_j) = (t x_j)^0 + (t x_j)^1 + (t x_j)^2 + \dots, \quad j = 1,2,\dots,v.$$

$$A_{v+1}(t,x_{v+1}) = (t x_{v+1})^1 + (t x_{v+1})^2$$

ΒΗΜΑ 2

$$A_0(t) = t^1 + t^3 + t^5 + \dots = t(1 + t^2 + t^4 + t^6 + \dots) = \frac{t}{1-t^2}$$

$$A_j(t) = t^0 + t^1 + t^2 + \dots = \frac{1}{1-t}, \quad j = 1,2,\dots,v$$

$$A_{v+1}(t) = t + t^2$$

ΒΗΜΑ 3

$$A(t) = A_0(t)\, A_1(t)\, A_2(t) \dots A_{v+1}(t) = \frac{t}{1-t^2}\left(\frac{1}{1-t}\right)^v (t+t^2)$$

ΒΗΜΑ 4

$$A(t) = \frac{t}{(1-t)(1+t)} \cdot \frac{1}{(1-t)^v} \cdot t(1+t) = t^2 \cdot \frac{1}{(1-t)^{v+1}} =$$

$$= t^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} v+1 \\ j \end{bmatrix} \cdot t^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} v+1 \\ j \end{bmatrix} t^{j+2} \; {\scriptstyle = k} = \sum_{k=2}^{\infty} \begin{bmatrix} v+1 \\ k-2 \end{bmatrix} t^k = \begin{bmatrix} v+1 \\ 0 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} v+1 \\ 1 \end{bmatrix} t^3 + \dots$$

$$\text{Οπότε: } a_k \begin{cases} 0, & k = 0,1 \\ \begin{bmatrix} v+1 \\ k-2 \end{bmatrix}, & k \geq 2 \end{cases}$$

6. Άσκηση - Θέμα 4ο Σεπτέμβριος 2011

a_k = # συνδυασμών των $2\nu+2$ στοιχείων του
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\nu+2}\}$ όπου

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\nu+1}$ εμφανίζεται το πολύ 1 φορά το καθένα
$\omega_{2\nu+2}$ εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών

α) $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k$

β) $a_k - a_{k-1} = ;$

γ) $a_\nu = ;$

Λύση

ΒΗΜΑ 1

$$A_j(t, x_j) = (t x_j)^0 + (t \cdot x_j)^1, \quad j = 1, 2, \dots, 2\nu+1$$
$$A_{2\nu+2}(t, x_{2\nu+2}) = (t x_{2\nu+2})^0 + (t x_{2\nu+2})^2 + (t x_{2\nu+2})^4 + \dots$$

ΒΗΜΑ 2

$$A_j(t) = 1 + t, \quad j = 1, 2, \dots, 2\nu+1$$
$$A_{2\nu+2}(t) = 1 + t^2 + t^4 + \dots$$

ΒΗΜΑ 3

$$A(t) = (1+t)^{2\nu+1} \frac{1}{1-t^2} = (1+t)^{2\nu+1} \cdot \frac{1}{(1-t)(1+t)}$$

$$\Rightarrow \text{(α)} \quad A(t) = (1+t)^{2\nu} \cdot \frac{1}{1-t}$$

ΒΗΜΑ 4

$$A(t)=\Big(\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\binom{2\nu}{j}}_{b_j}t^j\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\underbrace{1}_{\gamma_j}\cdot t^j\Big)$$

$$a_k=b_0\cdot\gamma_k+b_1\gamma_{k-1}+b_2\gamma_{k-2}+\dots+b_k\gamma_0$$

$$=b_0\cdot 1+b_1\cdot 1+\dots+b_k\cdot 1$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\binom{2\nu}{j}$$

(β) $a_k-a_{k-1}=\sum_{j=0}^{k}\binom{2\nu}{j}-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2\nu}{j}=\binom{2\nu}{k}$

(γ) $a_\nu=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{2\nu}{j}=\binom{2\nu}{0}+\binom{2\nu}{1}+\dots+\binom{2\nu}{\nu}=\dfrac{2^{2\nu}+\binom{2\nu}{\nu}}{2}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Βλέπε μάθημα 29/11/12 το "10. Παράδειγμα".

18/12/12

Γεννήτριες Συνδυασμών και Διατάξεων

1. Παράδειγμα

a_k = # συνδυασμών $\nu=4$ ανά k του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

ω_1 εμφανίζεται 1 ή 2 ή 3 φορές
ω_2 εμφανίζεται 0 ή 2 φορές
ω_3 εμφανίζεται 0 ή 1 φορά
ω_4 εμφανίζεται ακριβώς 2 φορές

b_k = # διατάξεων ...

Λύση

(a) $\omega_1 \longrightarrow \Lambda_1(t, x_1) = (tx_1)^1 + (tx_1)^2 + (tx_1)^3$
$\omega_2 \longrightarrow \Lambda_2(t, x_2) = (tx_2)^0 + (tx_2)^2$
$\omega_3 \longrightarrow \Lambda_3(t, x_3) = (tx_3)^0 + (tx_3)^1$
$\omega_4 \longrightarrow \Lambda_4(t, x_4) = (tx_4)^2$

$\Lambda_1(t, x_1)\Lambda_2(t, x_2)\Lambda_3(t, x_3)\Lambda_4(t, x_4) =$
$= t^3 x_1^1 x_2^0 x_3^0 x_4^2 + t^4 x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^2 + \dots + t^8 x_1^3 x_2^2 x_3^1 x_4^2$

$\updownarrow$ $\{\omega_1 \omega_4 \omega_4\}$
$\updownarrow$ $\{\omega_1 . \omega_3 \omega_4 \omega_4\}$
$\updownarrow$ $\{\omega_1 \omega_1 \omega_1 \omega_2 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_4\}$

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$
τότε ο συντελεστής του t^k
είναι το "# συνδυασμών" δηλαδή το a_k

(β) Αντί των συνηθισμένων απαριθμητριών χρησιμοποιώ τις εκθετικές απαριθμήσεις.

$$w_1 \longrightarrow E_1(t, x_1) = \frac{(tx_1)^1}{1!} + \frac{(tx_1)^2}{2!} + \frac{(tx_1)^3}{3!}$$

$$w_2 \longrightarrow E_2(t, x_2) = \frac{(tx_2)^0}{0!} + \frac{(tx_2)^2}{2!}$$

$$w_3 \longrightarrow E_3(t, x_3) = \frac{(tx_3)^0}{0!} + \frac{(tx_3)^1}{1!}$$

$$w_4 \longrightarrow E_4(t, x_4) = \frac{(tx_4)^2}{2!}$$

$$E_1(t, x_1)\, E_2(t, x_2)\, E_3(t, x_3)\, E_4(t, x_4)$$

$$= \frac{t^3}{3!} \, \frac{3!}{1!0!0!2!} \, x_1^1 x_2^0 x_3^0 x_4^2$$

$$+ \frac{t^4}{4!} \, \frac{4!}{1!0!1!2!} \, x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^2$$

$$+ \dots$$

$$+ \frac{t^8}{8!} \, \frac{8!}{3!2!1!2!} \, x_1^3 x_2^2 x_3^1 x_4^2$$

Αν θέσω $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$

τότε $b_k = \#$ διατάξεων $=$ συντελεστής του $\frac{t^k}{k!}$

2. Γενική διάταξη εύρεσης πλήθους διατάξεων με περιορισμούς

b_k = # διατάξεων ν ανά κ που το w_j εμφανίζεται r_j φορές $r_j \in \Lambda_j$

ΒΗΜΑ 1

$$E_j(t, x_j) = \sum_{r_j \in \Lambda_j} \frac{(t x_j)^{r_j}}{r_j!}, \quad j = 1, 2, \ldots, \nu$$ → Διαφορά από συνδυασμούς

ΒΗΜΑ 2

$$E_j(t) = E_j(t, 1), \quad j = 1, 2, \ldots, \nu$$

ΒΗΜΑ 3

$$E(t) = E_1(t) E_2(t) \ldots E_\nu(t)$$ γεννήτρια διατάξεων

ΒΗΜΑ 4

→ διαφορά από συνδυασμούς

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \quad e_k k! = b_k = \# \text{ διατάξεων ν ανά κ}$$

3. Βασικές Γεννήτριες

(i) $$\sum_{j=0}^{\infty} t^j = \frac{1}{(1-t)} = (1-t)^{-1}, \quad |t| < 1$$

(ii) $$\sum_{j=0}^{\nu \text{ ή } \infty} \binom{\nu}{j} t^j = (1+t)^\nu$$

(iii) $$\sum_{j=0}^{\infty} \left[\nu \atop j \right] t^j = (1-t)^{-\nu}, \quad |t| < 1$$

(iv) $$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} = e^t$$

4. Άσκηση - Θέμα 4ο Μάρτιος 2019

a_k = επαναληπτικές διατάξεις $\nu+1$ στοιχείων του $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\nu\}$ ανά k

$\omega_0 \longrightarrow$ άρτιο αριθμό φορών

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu \longrightarrow$ χωρίς περιορισμό

(α) $E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!}$

(β) $a_k = ;$

Λύση

ΒΗΜΑ 1

$$E_0(t, x_0) = \frac{(tx_0)^0}{0!} + \frac{(tx_0)^2}{2!} + \frac{(tx_0)^4}{4!} + \ldots$$

$$E_j(t, x_j) = \frac{(tx_j)^0}{0!} + \frac{(tx_j)^1}{1!} + \frac{(tx_j)^2}{2!} + \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots$$

ΒΗΜΑ 2

$$E_0(t) = \frac{t^0}{0!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots$$

$$= \sum_{\substack{r=0 \\ r: \text{άρτιος}}}^{\infty} \frac{t^r}{r!} =: S_a$$

$$S_\pi = \sum_{\substack{r=0 \\ r: \text{περιττός}}}^{\infty} \frac{t^r}{r!}$$

$$\left.\begin{aligned} S_a + S_\pi &= e^t \\ S_a - S_\pi &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{t^r}{r!} = e^{-t} \end{aligned}\right\} S_a = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$E_0(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad E_j(t) = e^t, \quad j = 1, 2, \ldots$$

ΒΗΜΑ 3

$$E(t)=E_0(t)E_1(t)\dots E_\nu(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot e^{\nu t}$$

ΒΗΜΑ 4

$$E(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot e^{\nu t}$$

$$=\frac{1}{2}e^{(\nu+1)t}+\frac{1}{2}e^{(\nu-1)t}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+1)^k\frac{t^k}{k!}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(\nu-1)^k\frac{t^k}{k!}$$

$$\Rightarrow a_k=\frac{1}{2}(\nu+1)^k+\frac{1}{2}(\nu-1)^k \quad , k=0,1,2,\dots$$

5. Άσκηση- Θέμα 4ο Φεβρουάριος 2011

(α) $a_k=$ # διατάξεων με επανάληψη του $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{\nu+2}\}$ ανά κ.

→ Εκθετική

$\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_\nu \rightarrow \boxed{\text{χωρίς περιορισμούς}}$

$\omega_{\nu+1},\omega_{\nu+2} \rightarrow$ τουλάχιστον 1 φορά το καθένα

$$E(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{t^k}{k!}=;$$

$a_k=;$

ΒΗΜΑ 1

ΒΗΜΑ 2

ΒΗΜΑ 3 ...

$$E(t) = \underbrace{e^t \cdot e^t \cdot e^t \cdot \ldots \cdot e^t}_{\nu \text{ φορές}} \underbrace{(e^t-1)(e^t-1)}_{2 \text{ φορές}}$$

$$= e^{\nu t}(e^t-1)^2$$

$$= e^{\nu t}\left((e^t)^2 - 2e^t \cdot 1 + 1^2\right) = e^{\nu t}(e^{2t} - 2e^t + 1)$$

$$= e^{(\nu+2)t} - 2e^{t(\nu+1)} + e^{\nu t}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\nu+2)^k \frac{t^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{\infty} (\nu+1)^k \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \frac{t^k}{k!}$$

$$\Rightarrow a_k = (\nu+2)^k - 2(\nu+1)^k + \nu^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

(β) # συνδυασμών 3 ανά 100 με επαναλήψεις των $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

$\omega_1 \longrightarrow$ Το πολύ 1 φορά $\rightarrow (1+t)$

$\omega_2 \longrightarrow$ άρτιο πλήθος φορών $\longrightarrow \dfrac{1}{1-t^2}$

$\omega_3 \longrightarrow$ χωρίς περιορισμό $\rightarrow \dfrac{1}{1-t}$

$$A(t) = (1+t)\frac{1}{1-t^2}\,\frac{1}{1-t}$$

$$= (1+t)\frac{1}{(1+t)(1-t)} \cdot \frac{1}{1-t} = (1-t)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 2 \\ k \end{bmatrix} t^k$$

ζητούμενων συνδυασμών = συντελεστής του t^{100}

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 100 \end{bmatrix} = \binom{2+100-1}{100} = \binom{101}{100} = 101$$

6. Άσκηση - Θέμα 4ο Σεπτέμβριος 2010

(α) a_k = # διατάξεων με επαναλήψεις

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}\}$ ανά κ

$\omega_1, \ldots, \omega_\nu \rightarrow$ χωρίς περιορισμό

$\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2} \rightarrow$ 0 ή 2 φορές

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} = ;$$

$$a_k = ;$$

Λύση

$$E(t) = \underbrace{e^t \cdot e^t \cdot \ldots \cdot e^t}_{\nu \text{ φορές}} \left(\frac{t^0}{0!} + \frac{t^2}{2!}\right)^2$$

$$= e^{\nu t}\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^2$$

$$= e^{\nu t}\left(1 + t^2 + \frac{t^4}{4}\right)$$

$$= e^{\nu t} + e^{\nu t} t^2 + \frac{1}{4} e^{\nu t} t^4$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \frac{t^k}{k!} + \sum_{j=0}^{\infty} \nu^j \frac{t^{j+2}}{j!} + \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{\infty} \nu^j \frac{t^{j+4}}{j!}$$

αλλαγή μεταβλητής

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=2}^{\infty} k! \frac{\nu^{k-2}}{(k-2)!} \frac{t^k}{k!} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{k!\, \nu^{k-4}}{4(k-4)!} \cdot \frac{t^k}{k!}$$

$$\Rightarrow a_k = \begin{cases} \nu^k, & k = 0, 1 \\ \nu^k + \dfrac{k!\, \nu^{k-2}}{(k-2)!}, & k = 2, 3 \\ \nu^k + \dfrac{k!\, \nu^{k-2}}{(k-2)!} + \dfrac{k!\, \nu^{k-4}}{4(k-4)!}, & k \geq 4. \end{cases}$$