9/10/19

Συνδυαστική I

||

Απαρίθμηση σχηματισμών

||

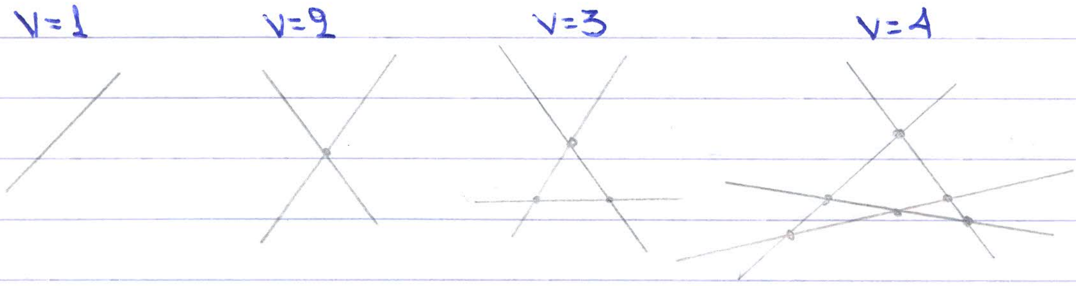
Με πόσους τρόπους μπορώ να...

||

Πόσα αντικείμενα υπάρχουν με την ιδιότητα...

Πρόβλημα 1

ν ευθείες σε γενική θέση → δεν υπάρχουν παρ/λες και ανά 3 δεν περνούν από το ίδιο σημείο



Ερωτήσεις

I. Πόσα σημεία ορίζουν;

II. Πόσα ευθυγρ. τμήματα ορίζονται σε αυτές;

III. Πόσα χωρία ορίζουν;

II.

Πόσα ευθυγρ. τμήματα ορίζονται σε ν τεμνόμενες ευθείες σε γενική θέση $= b_\nu$

1ος Τρόπος Αναδρομικός

$\nu=1 \to 0$

$\nu=2 \to 0$

$\nu=3 \to 3$ (+3)

$\nu=4 \to 8$ (+5)

$\nu=5 \to 15$ (+7)

(1 για κάθε μία από αυτές)

→ # νέων ευθ τμημάτων που ορίζει η ν-οστή ευθεία στις αρχικές (ν-1) ευθείες.

$$b_\nu = b_{\nu-1} + \nu-2 + \nu-1$$

↳ # ευθ. τμημάτων πάνω στη ν-οστή ευθεία

↳ # ευθ τμημάτων με ν-1 ευθείες

$$= b_{\nu-1} + 2\nu - 3 \quad , \nu \geq 3$$

Από τα σχήματα

ν	b_ν
1	0
2	0
3	3
4	8
5	15

$b_2 = b_1 + 1$

$b_3 = b_2 + 3$

$b_4 = b_3 + 5$

$b_5 = b_4 + 7$

Για ακριβή τύπο

$$\begin{aligned} b_\nu &= b_{\nu-1} + 2\nu - 3 \\ &= b_{\nu-2} + (2\nu-5) + (2\nu-3) \\ &= b_{\nu-3} + (2\nu-7) + (2\nu-5) + (2\nu-3) \\ &= \underbrace{b_2}_{0} + 3 + 5 + 7 + \dots + (2\nu-3) \end{aligned}$$

$=0+3+5+7+\ldots+2\nu-3$ Ακριβής τύπος σε μορφή αθροίσματος

$$b_\nu = 3+5+7+\ldots+2\nu-3$$
$$=(2\cdot1+1)+(2\cdot2+1)+(2\cdot3+1)+\ldots+(2(\nu-2)+1)$$
$$=(\nu-2)+2(1+2+3+\ldots+\nu-2)$$
$$=(\nu-2)+\cancel{2}\frac{(\nu-2)(\nu-1)}{\cancel{2}}$$
$$=(\nu-2)\nu \quad , \nu\geq 2$$

2ος Τρόπος Αντιστοιχίες

Ευθύγραμμο τμήμα = Ζεύγος διαδοχικών σημείων στην ίδια ευθεία.

Κάθε ευθεία τέμνεται από τις άλλες σε $\nu-1$ σημεία που ορίζουν $\nu-2$ ευθύγραμμα τμήματα πάνω στην ευθεία.

Άρα οι ν ευθείες περιέχουν $\nu(\nu-2)$ τμήματα.

4/10/19

1. Πρόβλημα 1

Πλήθος μεταθέσεων ενός συνόλου ν στοιχείων.

$\{1, 2, \ldots, \nu\}$

a_ν = # τοποθετήσεων των ν στοιχείων σε σειρά.

1ος Τρόπος - Αναδρομικός

$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	
1	12	123	
		132	
	21	312	...
		213	
		231	
		321	

▶ Έστω ότι έχουμε τις $a_{\nu-1}$ μεταθέσεις των στοιχείων $1, 2, \ldots, \nu-1$. Από κάθε τέτοια παίρνω ν μεταθέσεις των στοιχείων $1, 2, \ldots, \nu$. διότι το "ν" μπορεί να μπει σε ν θέσεις (στις $\nu-2$ θέσεις μεταξύ των $\nu-1$ στοιχείων ή στις άκρες).
Οι νέες μεταθέσεις είναι όλες διαφορετικές

Άρα $a_\nu = \nu \cdot a_{\nu-1}$, $\nu \geq 2$ (Αναδρομικός Τύπος)

$a_1 = 1$

$$a_\nu = \nu \cdot a_{\nu-1} = \nu(\nu-1)a_{\nu-2}$$
$$= \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots 2a_1$$
$$= \nu(\nu-1)\cdots 1$$
$$= \nu!$$

2ος Τρόπος - (Άμεσος) - Πολλ/κή Αρχή

Μια μετάθεση ν στοιχείων γίνεται σε ν στάδια.

π.χ.
$\nu = 4$

1ο στάδιο	2ο στάδιο	3ο στάδιο	4ο στάδιο
(4 επιλογές)	(3 επιλογές)	(2 επιλογές)	(1 επιλογή)

1ο στάδιο: Επιλογή στοιχείου για την 1η θέση
↳ ν τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή στοιχείου για την 2η θέση
↳ $(\nu-1)$ τρόποι

3ο στάδιο: Επιλογή στοιχείου για την 3η θέση
↳ $(\nu-2)$ τρόποι

⋮

νο στάδιο: Επιλογή στοιχείου για την νη θέση
↳ 1 τρόπος

μεταθέσεις ν στοιχείων $= \nu(\nu-1)\cdot(\nu-2)\cdots 1 = \nu!$

2. Πολλ/κή Αρχή

Αν κάποιος συνδυαστικός σχηματισμός μπορεί να φτιαχτεί σε ν στάδια και στο στάδιο i έχω k_i επιλογές, ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ από το τι επέλεξα στα προηγούμενα στάδια τότε το συνολικό πλήθος των συνδυαστικών σχηματισμών είναι $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_\nu$

3. Πρόβλημα 2

Πλήθος υποσυνόλων, συνόλου με ν στοιχεία.

$\{1, 2, \ldots, \nu\}$

$a_\nu = \#$ υποσυνόλων του $\{1, 2, \ldots, \nu\}$

$\emptyset$ $\quad \nu = 0 \quad$ $\emptyset$

$\{1\}$ $\quad \nu = 1 \quad$ $\emptyset \quad \{1\}$

$\{1,2\}$ $\quad \nu = 2 \quad$ $\emptyset \quad \{1\} \quad \{2\} \quad \{1,2\}$

$\{1,2,3\}$ $\quad \nu = 3 \quad$ $\emptyset \quad \{1\} \quad \{2\} \quad \{1,2\} \quad \{3\} \quad \{1,3\} \quad \{2,3\} \quad \{1,2,3\}$.

1ος Τρόπος - Αναδρομικός

$a_\nu = \#$ υποσυνόλων του $\{1,2,\dots,\nu\}$

$\#$ υποσυνόλων του $\{1,2,\dots,\nu\}$ που δεν περιέχουν το ν
$=$
$a_{\nu-1}$

$\#$ υποσυνόλων του $\{1,2,\dots,\nu\}$ που περιέχουν το ν.
$=$
$a_{\nu-1}$

διότι ένα υποσύνολο του $\{1,2,\dots,\nu\}$ που περιέχει το ν προκύπτει επισυνάπτοντας το "ν" σε ένα υποσύνολο του $\{1,2,\dots,\nu-1\}$

$\Rightarrow a_\nu = 2a_{\nu-1}$, $\nu \geq 1$ (Αναδρομικός τύπος)

$a_0 = 1$ Αρχική συνθήκη

$$a_\nu = 2a_{\nu-1} = 2\cdot 2\,a_{\nu-2} = 2\cdot 2\cdot 2\,a_{\nu-3} = 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2\,a_0 = 2^\nu$$

2^{os} Τρόπος - Αντιστοιχία + Πολ/κή Αρχή.

π.χ.
$\nu = 3$

Υποσύνολο του $\{1,2,3\}$		Διατ. 3-άδες με 0 κ' 1
	$\xleftrightarrow{1-1}$	$1,2,3$
$\emptyset$	$\longleftrightarrow$	$(0,0,0)$
$\{1\}$	$\longleftrightarrow$	$(1,0,0)$
$\{2\}$	$\longleftrightarrow$	$(0,1,0)$
$\{3\}$	$\longleftrightarrow$	$(0,0,1)$
$\{1,2\}$	$\longleftrightarrow$	$(1,1,0)$
$\{1,3\}$	$\longleftrightarrow$	$(1,0,1)$
$\{2,3\}$	$\longleftrightarrow$	$(0,1,1)$
$\{1,2,3\}$	$\longleftrightarrow$	$(1,1,1)$

a_ν = # υποσυνόλων του $\{1,2,\ldots,\nu\}$ = # διατεταγμένων ν-άδων με 0 κ' 1.

Μια διατεταγμένη ν-άδα με 0,1 φτιάχνεται σε στάδια:

1^o στάδιο: Επιλογή στοιχείου $1^{ης}$ θέσης (0 ή 1)
↳ 2 τρόποι

2^o στάδιο: Επιλογή στοιχείου $2^{ης}$ θέσης (0 ή 1)
↳ 2 τρόποι

⋮

$ν^o$ στάδιο: Επιλογή στοιχείου $ν^{ης}$ θέσης (0 ή 1)
↳ 2 τρόποι

4. <u>Άσκηση</u>

Με πόσους τρόπους μπαίνουν 30 αγόρια και 10 κορίτσια στη σειρά:

(i) χωρίς περιορισμό
(ii) όλα τα αγόρια στο τέλος
(iii) στις πρώτες 3 θέσεις αγόρια
(iv) τα αγόρια να είναι συνεχόμενα

<u>Λύση</u>

$A_1, A_2, \ldots, A_{30}, K_1, K_2, \ldots, K_{10}$

(i) Η τοποθέτηση γίνεται σε 40 στάδια.

1^o στάδιο: Επιλογή ατόμου για $1^η$ θέση → 40 τρόποι

2^o στάδιο: Επιλογή ατόμου για $2^η$ θέση → 39 τρόποι

⋮

40^{o} στάδιο: Επιλογή ατόμου για $40^{η}$ θέση → 1 τρόπος

Από Πολ/κή Αρχή = $40!$

(ii) Η τοποθέτηση γίνεται σε στάδια

1^{o} στάδιο: Τοποθέτηση των 10 κοριτσιών στις 10 πρώτες θέσεις σε σειρά → $10!$ τρόποι

2^{o} στάδιο: Τοποθέτηση των 30 αγοριών στο τέλος σε σειρά → $30!$ τρόποι

Από Πολ/κή Αρχή = $10! \cdot 30!$

(iii) Η τοποθέτηση γίνεται σε στάδια

1^{o} στάδιο: Επιλογή αγοριού για $1^{η}$ θέση → 30 τρόποι

2^{o} στάδιο: Επιλογή αγοριού για θέση → 29 τρόποι

3^{o} στάδιο: Επιλογή αγοριού για $3^{η}$ θέση → 28 τρόποι

4^{o} στάδιο: Επιλογή ανθρώπου για $4^{η}$ θέση → 37 τρόποι

⋮

$40^{\text{ο}}$ στάδιο: Επιλογή ανθρώπου για $40^{\text{η}}$ θέση → 1 τρόπος

Από Πολ/κή Αρχή $= 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 37!$

(iv) Μια τέτοια τοποθέτηση γίνεται σε στάδια:

$1^{\text{ο}}$ στάδιο: Επιλογή αριθμού θέσεων πριν αρχίσω να βάζω τα αγόρια → 11 τρόποι
$(0, 1, 2, \ldots, 10)$

$2^{\text{ο}}$ στάδιο: Τοποθέτηση των αγοριών σε σειρά → $30!$ τρόποι

$3^{\text{ο}}$ στάδιο: Τοποθέτηση των κοριτσιών σε σειρά → $10!$ τρόποι

Από Πολ/κή Αρχή $= 11 \cdot 30! \cdot 10! = 11! \cdot 30!$

16/10/12

Οι αρχές απαρίθμησης

1. Αρχές

(i) Πολλαπλασιαστική

(ii) Προσθετική

(iii) Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

(iv) Περιστεροφωλιάς (Dirichlet)

2. Πολλ/κή

Όταν ένα συνδυαστικό αντικείμενο δημιουργείται σε στάδια, τότε το # των αντικειμένων

$$
\begin{aligned}
&\# \text{ τρόπων (στάδιο 1)} \\
&\times \\
&\# \text{ τρόπων (στάδιο 2)} \\
&\times \\
&\vdots \\
&\times \\
&\# \text{ τρόπων (τελευταίο στάδιο)}
\end{aligned}
$$

3. Παράδειγμα

Έστω 200 άτομα

3-μελών επιτροπών με Πρόεδρο-Γραμματέα-Ταμία.

Η επιτροπή γίνεται σε 3 στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή προέδρου → 200 τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή γραμματέα → 199 τρόποι

3ο στάδιο: Επιλογή ταμία → 198 τρόποι

Από Πολλ/κή Αρχή # επιτροπών $= 200 \cdot 199 \cdot 198$

4. Παράδειγμα

4-ψηφίων περιττών αριθμών

Ένας τέτοιος αριθμός γίνεται σε 4 στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή 1ου ψηφίου από αριστερά → 9 τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή 2ου ψηφίου από αριστερά → 10 τρόποι

3ο στάδιο: Επιλογή 3ου ψηφίου από αριστερα → 10 τρόποι

4ο στάδιο: Επιλογή 4ου ψηφίου από αριστερά → 5 τρόποι

Από Πολλ/κή Αρχή # αριθμών $= 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5$

Το $1^{ο}$ ψηφίο όχι 0

Περιορισμοί

4-ψήφιων περιττών αριθμών με διαφορετικά ψηφία

Ένας τέτοιος αριθμός γίνεται σε 4 στάδια.

$1^{ο}$ στάδιο: Επιλογή τελευταίου ψηφίου → 5 τρόποι

$2^{ο}$ στάδιο: Επιλογή προ-τελευταίου ψηφίου → 9 τρόποι

$3^{ο}$ στάδιο: Επιλογή $2^{ου}$ ψηφίου → 8 τρόποι

$4^{ο}$ στάδιο: Επιλογή $1^{ου}$ ψηφίου → 7 ή 6 τρόποι
(ανάλογα αν έχει χρησιμοποιηθεί το 0)

Δεν μπορεί να βγει με Πολλ/κή Αρχή με αυτή τη διάταξη.

Όμως

$1^{ο}$ στάδιο: Επιλογή τελευταίου ψηφίου → 5 τρόποι

$2^{ο}$ στάδιο: Επιλογή $1^{ου}$ ψηφίου → 8 τρόποι
(όχι 0, όχι το τελευταίο ψηφίο)

$3^{ο}$ στάδιο: Επιλογή $2^{ου}$ ψηφίου → 8 τρόποι
(όχι $1^{ο}$, όχι τελευταίο ψηφίο)

$4^{ο}$ στάδιο: Επιλογή $3^{ου}$ ψηφίου → 7 τρόποι

Από Πολλ/κή Αρχή # αριθμών $= 5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7$

▶ Ξεκινάμε από τους πιο δύσκολους περιορισμούς.

5. Προσθετική Αρχή

$A \cap B = \emptyset$

στοιχείων του $A \cup B$ = # στοιχείων του A
+
στοιχείων του B
$\parallel$

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B)$$

6. Παράδειγμα

4-ψήφιων άρτιων αριθμών με διαφορετικά ψηφία.

Σύνολο 4-ψήφιων άρτιων αριθμών με διαφορετικά ψηφία. = $\underbrace{\text{Σύνολο 4-ψήφιων άρτιων αριθμών με διαφορετικά ψηφία που τελειώνουν σε 0.}}_{A}$ $\cup$ $\underbrace{\text{Σύνολο 4-ψήφιων άρτιων αριθμών με διαφορετικά ψηφία που δεν τελειώνουν σε 0.}}_{B}$

Ενας αριθμός του Α φτιάχνεται σε 4 στάδια:

$1^ο$ στάδιο: Επιλογή τελευταίου ψηφίου → 1 τρόπος

$2^ο$ στάδιο: Επιλογή $1^{ου}$ ψηφίου → 9 τρόποι

$3^ο$ στάδιο: Επιλογή $2^{ου}$ ψηφίου → 8 τρόποι

$4^ο$ στάδιο: Επιλογή $3^{ου}$ ψηφίου → 7 τρόποι

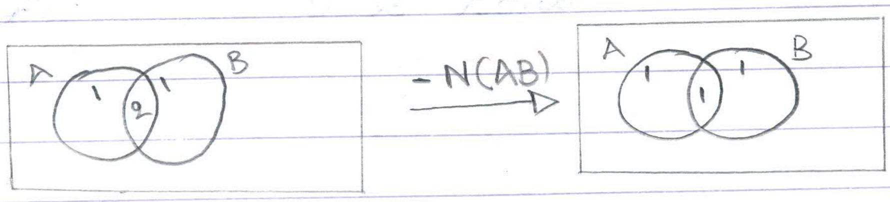
Από Πολλ/κη Αρχή $N(A) = 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

Ομοια για το Β, $N(B) = \underset{\text{τελευταίο}}{4} \cdot \overset{1^ο}{8} \cdot \underset{2^ο}{8} \cdot \overset{3^ο}{7}$

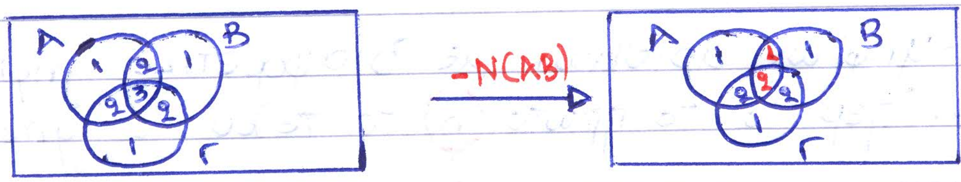
Από Προσθετική Αρχή $N(A \cup B) = N(A) + N(B) =$
$= 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7$

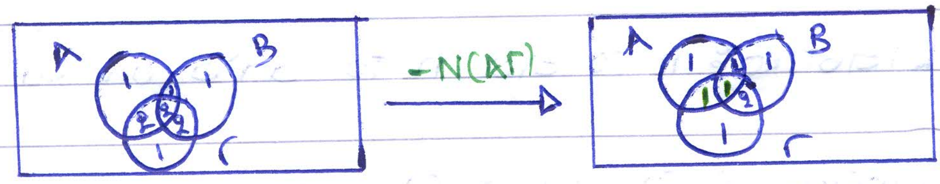
7. Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού

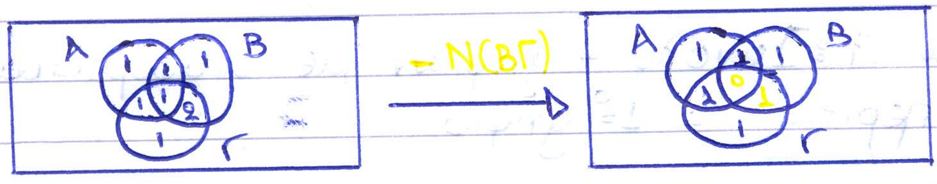
$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(\overset{\text{ΤΟΜΗ}}{AB})$

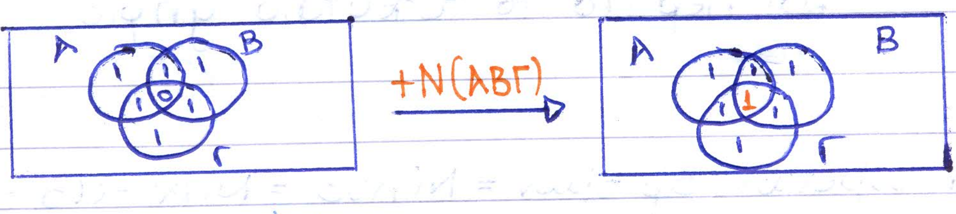


$N(A \cup B \cup \Gamma) = N(A) + N(B) + N(\Gamma) - N(AB) - N(A\Gamma) - N(B\Gamma) + N(AB\Gamma)$









Σημείωση: Τα νούμερα μέσα στα χωρία δείχνουν πόσες φορές έχει μετρηθεί κάθε στοιχείο τους.

8. Παράδειγμα

\# 4-ψηφίων αριθμών με διαφορετικά ψηφία που έχουν περιττό το πρώτο ή το τελευταίο ψηφίο.

δεν είναι αποκλειστικό, είναι εγκλειστικό

Αποκλειστικό: ή το ένα ή το άλλο, όχι και τα 2.

Εγκλειστικό: ή το ένα ή το άλλο ή και τα 2.

Εστω Α: Σύνολο 4-ψήφιων με διαφορετικά ψηφία και περιττό το $1^{ο}$ ψηφίο.

Β: Σύνολο 4-ψήφιων με διαφορετικά ψηφία και περιττό το τελευταίο ψηφίο.

\# ζητούμενων αριθμών $= N(A\cup B) = N(A) + (B) - N(AB)$

Ενας αριθμός του Α φτιάχνεται σε στάδια:

$1^{ο}$ στάδιο: Επιλογή $1^{ου}$ ψηφίου $\rightarrow$ 5 τρόποι

$2^{ο}$ στάδιο: Επιλογή $2^{ου}$ ψηφίου $\rightarrow$ 9 τρόποι

$3^{ο}$ στάδιο: Επιλογή ψηφίου $\rightarrow$ 8 τρόποι

$4^{ο}$ στάδιο: Επιλογή $4^{ου}$ ψηφίου $\rightarrow$ 7 τρόποι

Από Πολλ/κή Αρχή $N(A) = 5\cdot 9\cdot 8\cdot 7$

Όμοια B, $N(B) = \underset{\text{τελευταίο}}{5} \cdot \overset{1^o}{8} \cdot \underset{2^o}{8} \cdot \overset{3^o}{7}$

και

$N(A B) = \underset{1^o}{5} \cdot \overset{\text{τελευταίο}}{4} \cdot \underset{2^o}{8} \cdot \overset{3^o}{7}$

Τελικά το ζητούμενο πλήθος $= 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 + 5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 - 5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7$

9. Αρχή Περιστεροφωλιάς

Αν μοιράσουμε $\nu \cdot k + 1$ αντικείμενα σε ν κελιά, τότε υπάρχει τουλάχιστον 1 κελί με τουλάχιστον $k+1$ αντικείμενα.

π.χ. Αν δώσω $\overset{\nu \cdot k+1}{1001}$ καραμέλες σε $\overset{\nu}{50}$ παιδιά, τότε θα υπάρχει τουλάχιστον 1 παιδί που θα πάρει τουλάχιστον $\underset{k+1}{21}$ καραμέλες.