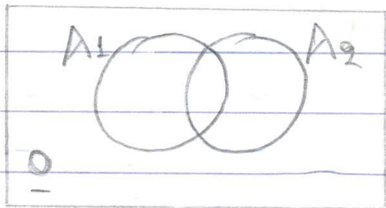
4/12/12

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

1. Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού για ν=2 σύνολα



ΤΟΜΗ

$$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 A_2)$$

$$N(A_1' A_2') = N((A_1 \cup A_2)') = N(\Omega) - N(A_1 \cup A_2)$$

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

$$= N(\Omega) - N(A_1) - N(A_2) + N(A_1 A_2)$$

Απόδειξη (1)

ξένα

$$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1 \cup A_2 A_1') = N(A_1) + N(A_2 A_1') \quad (1)$$

$$\Rightarrow N(A_2 A_1') = N(A_2) - N(A_2 A_1) \quad (2) \qquad , N(A_2) = N(A_2 A_1) + N(A_2 A_1')$$

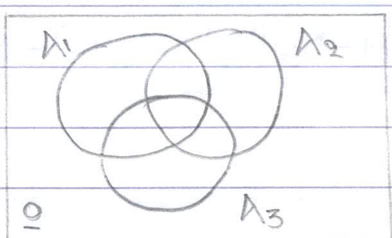
Από (1) κ' (2) $\Rightarrow$ Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Απόδειξη (2)

Κάθε στοιχείο του Ω πόσες φορές μετριέται στο:

Περιπτώσεις	$N(A_1 \cup A_2)$		$N(A_1)$	+	$N(A_2)$	-	$N(A_1A_2)$
$\omega \in A_1A_2$	1	=	1	+	1	-	1
$\omega \in A_1A_2'$	1	=	1	+	0	-	0
$\omega \in A_1'A_2$	1	=	0	+	1	-	0
$\omega \in A_1'A_2'$	0	=	0	+	0	-	0

2. Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού για ν=3 σύνολα



$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \underbrace{\boxed{N(A_1)+N(A_2)+N(A_3)}}_{S_1} - \underbrace{\boxed{N(A_1A_2)-N(A_1A_3)-N(A_2A_3)}}_{S_2} + \underbrace{\boxed{N(A_1A_2A_3)}}_{S_3}$$

Απόδειξη (1)

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1) + N(A_2A_3) - N\big(\overbrace{A_1(A_2 \cup A_3)}^{A_1A_2 \cup A_1A_3}\big)$$

$$= N(A_1)+N(A_2)+N(A_3)-N(A_2A_3)-N(A_1A_3)-N(A_1A_2)+N(A_1A_2A_3)$$

Απόδειξη (2)

Πόσες φορές μετριέται κάθε ωϵΩ στα δύο μέλη της αρχής Εγκλεισμού - Αποκλεισμού.

Περιπτώσεις	$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$		S_1	-	S_2	+	S_3
ανήκει σε 0 από τα A_1, A_2, A_3	0	=	0	-	0	+	0
ανήκει σε 1	1	=	1	-	0	+	0
ανήκει σε 2	1	=	2	-	1	+	0
ανήκει σε 3	1	=	3	-	3	+	1

3. Γενική Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu) = S_{\nu,1} - S_{\nu,2} + S_{\nu,3} - S_{\nu,4} + S_{\nu,5} \cdots + (-1)^{\nu-1} S_{\nu,\nu}$$

$$= \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r-1} S_{\nu,r}$$

$S_{\nu,1} = N(A_1) + N(A_2) + \cdots + N(A_\nu) \rightarrow \nu$ όροι

$S_{\nu,2} = N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + \cdots + N(A_{\nu-1}A_\nu) \rightarrow \binom{\nu}{2}$ όροι

$S_{\nu,3} = \cdots \rightarrow \binom{\nu}{3}$ όροι

Γενικά

$$S_{\nu,r} = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \ldots, \nu\}} N(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_r})$$

4. Πόρισμα

$$N(A_1' A_2' \ldots A_\nu') = N((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r)') = N(\Omega) - \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r-1} S_{\nu,r}' = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r S_{\nu,r}'$$

όπου $S_{\nu,0} = N(\Omega)$

5. Απόδειξη της Αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

1η: Επαγωγή

2η: Απαρίθμηση της συνεισφοράς κάθε στοιχείου του $\omega \in \Omega$ στα 2 μέλη.

Περιπτώσεις	$N(A_1 \cup \ldots \cup A_r)$		$S_1' - S_2 + S_3 - S_4 \ldots (-1)^{\nu-1} S_{\nu,\nu}$
Ανήκει σε 0 σύνολα	0	=	$0 - 0 + 0 - 0 \quad 0$
σε 1	1	=	$1 - 0 + 0 - 0 \quad 0$
σε 2	1	=	$2 - 1 + 0 - 0$
σε 3	1	=	$3 - 3 + 1 - 0$
σε 4	1	=	$4 - \binom{4}{2} + \binom{4}{3} - \binom{4}{4}$
⋮			
σε r	1	=	$r - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \binom{r}{4} +$

$$r - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \binom{r}{4} \ldots = \sum_{j=1}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{j-1} = -\sum_{j=1}^{r} \binom{r}{j} (-1)^j$$

$$= -\left(\sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^j - \binom{r}{0} (-1)^0\right) = -\left((1+(-1))^r - 1\right) = 1$$

6. Άσκηση / Θέμα 3ο Φεβρουάριος 2002

a = # αριθμών του $\{1,2,\dots,2002\}$ που διαιρούνται με τουλάχιστον 1 από τους 6, 10, 15.

b = # αριθμών του $\{1,2,\dots,2002\}$ που διαιρούνται με ακριβώς 2 από τους 6, 10, 15.

Λύση

Έστω $\Omega = \{1,2,\dots,2002\}$

$$A_1 = \{x \in \Omega : 6 \mid x\}$$

$$A_2 = \{x \in \Omega : 10 \mid x\}$$

$$A_3 = \{x \in \Omega : 15 \mid x\}$$

$$a = N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - N(A_1A_2) - N(A_1A_3) - N(A_2A_3) + N(A_1A_2A_3)$$

$$= \left\lfloor \frac{2002}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2002}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2002}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2002}{\text{εκπ}(6,10)} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2002}{\text{εκπ}(6,15)} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2002}{\text{εκπ}(10,15)} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2002}{\text{εκπ}(6,10,15)} \right\rfloor$$

$B = N(A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3) - N(A_1A_2A_3)$

$= N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) - 3N(A_1A_2A_3)$

$= \left\lfloor \frac{2002}{\text{εκπ}(6,10)} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2002}{\text{εκπ}(6,15)} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2002}{\text{εκπ}(10,15)} \right\rfloor - 3\left\lfloor \frac{2002}{\text{εκπ}(6,10,15)} \right\rfloor = 0$.

7. Άσκηση / Θέμα 3 Σεπτέμβριος 2001

100 φοιτητές εξετάστηκαν σε 3 θέματα $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$

100 φοιτητές γνωρίζουν τουλάχιστον 1 θέμα.
70 φοιτητές γνωρίζουν τουλάχιστον 2 θέματα
10 φοιτητές γνωρίζουν 3 θέματα

Καθένα από τα τρία θέματα το γνωρίζει ο ίδιος αριθμός φοιτητών.

$\downarrow$

$N(A_1) = N(A_2) = N(A_3)$

φοιτητών που δεν γνωρίζουν το Θ_1.

$\downarrow$

$N(A_1') = ;$

Λύση

Έστω A_i = # φοιτητών που γνωρίζουν το Θ_i, $i = 1,2,3$

Ω = όλοι οι φοιτητές

$N(\Omega) = 100$
$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 100$
$N(A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3) = 70$
$N(A_1A_2A_3) = 10$

Από Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 100$

$\parallel$

$\boxed{N(A_1)+N(A_2)+N(A_3)} - (N(A_1A_2)+N(A_1A_3)+N(A_2A_3)) + \underset{10}{\boxed{N(A_1A_2A_3)}}$

$\downarrow$

$3N(A_1)$

$\Rightarrow 3N(A_1) - (N(A_1A_2)+N(A_1A_3)+N(A_2A_3)) = 90 \quad (*)$

Από Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

$70 = N(A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3)$

$\quad = N(A_1A_2)+N(A_1A_3)+N(A_2A_3) - 2\boxed{N(A_1A_2A_3)} = 10$

$\Rightarrow N(A_1A_2)+N(A_1A_3)+N(A_2A_3) = 90 \quad (**)$

Από $(*)$ και $(**)$ $\Rightarrow N(A_1) = 60$

$N(A_1') = N(\Omega) - N(A_1) = 100 - 60 = 40$

$\Rightarrow N(A_1') = 40$

Εναλλακτική λύση

\# λυμένων θεμάτων από τους 100 φοιτητές

$\parallel$

$10 \times 3 \Rightarrow$ λυμένα θέματα στους φοιτητές με 3 θέματα λυμένα

$+$

$60 \times 2 \Rightarrow$ λυμένα θέματα στους φοιτητές με 2 θέματα λυμένα

$+$

$30 \times 1 \Rightarrow$ λυμένα θέματα στους φοιτητές με 1 θέμα λυμένα

$\Rightarrow$ 180 λυμένα θέματα

$\shortparallel$

3 · λυμένα θέματα $Θ_1$

$\Rightarrow$ 60 λυμένα $Θ_1$ $\Rightarrow$ 40 άλυτα θέματα $\Rightarrow$ 40 φοιτητές