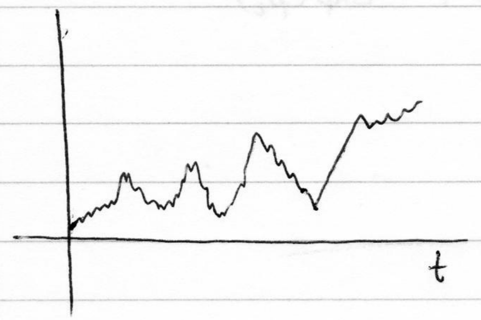
Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου

$$\mathbb{Q}=\begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \\ q_{i0} & q_{i1} & -q_i & \cdots \end{pmatrix}$$

<u>Ορισμός:</u> Μία ΜΑΣΧ ονομάζεται <u>κανονική</u> αν $\sum_{j\in S} P(X(t)=j\,|\,X(0)=i)=1$ $\forall\, i\in S,\ \forall\, t<\infty$

$\Updownarrow$

Με πιθ. 1 γίνεται πεπερασμένος αριθμός μεταβάσεων σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα



πιθανότητα μετάβασης

<u>Λήμμα 1</u>: Έστω $P_{ij}(t)=P(X(t)=j\,|\,X(0)=i)$. Τότε:

α) $\lim_{t\to 0}\frac{1-P_{ii}(t)}{t}=q_i \iff P_{ii}(t)=1-q_i t+o(t)$

β) $\lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)}{t}=q_{ij},\ i\neq j \iff P_{ij}(t)=q_{ij}t+\varepsilon_{ij}(t)$ τ.ω. $\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon_{ij}(t)}{t}=0$

$/\!/\ q_{ij}t+o(t)$

Γενικά

$f(t)=o(g(t)),\ t\to a \iff \lim_{t\to a}\frac{f(t)}{g(t)}=0$

$\boxed{\varepsilon_{ij}(t)=o(t)}$

$\Downarrow$

συμβολισμός

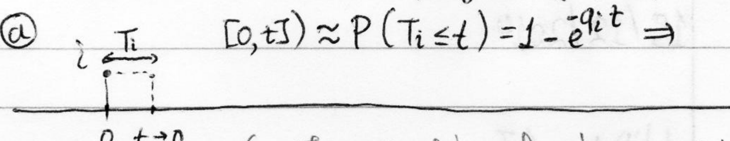
$\lim_{t\to 0}P_{ij}(t)=0 \quad i\neq j$ (η πιθ. μετά από ένα απειροστό του χρόνου από το i να πάμε στο j τείνει στο 0: το πιθανότερο είναι ότι δεν θα έχουμε προλάβει να μετακινηθούμε)

$\lim_{t\to 0}P_{ii}(t)=1$

$\downarrow$

η πιθ. μετά από ένα απειροστό του χρόνου από το i να μένουμε στο i τείνει στο 1

ⓐ



$1-P_{ii}(t)=P($έχει γίνει τουλ. μία μετάβαση στο $[0,t])\approx P(T_i\le t)=1-e^{-q_i t}\Rightarrow$

(το T_i ακολουθεί εκθετική κατανομή!)

l'hospital

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{1-P_{ii}(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-e^{-q_i t}}{t} = q_i$$

(β) $0 \;\text{—}\; t$ $\quad \dfrac{P_{ij}(t)}{t} \approx q_i P_{ij} = q_{ij}$

$$\sum_{j\neq i} P_{ij}(t) = 1 - P_{ii}(t) \qquad P_{ij}(t) \approx q_{ij}\, t$$

Συνάρτηση Πιθανότητας Μεταβάσεων

$$P_{ij}(t) = P(X(t)=j \mid X(0)=i) \qquad P_{ii}'(0^+) = -q_i$$

$$\lim_{t\to 0} P_{ii}(t) = 1 = P_{ii}(0)$$

$$\lim_{t\to 0} P_{ij}(t) = 0 = P_{ij}(0) \quad i\neq j$$

Λήμμα

$$P_{ii}(t) = 1 - q_i t + o(t)$$

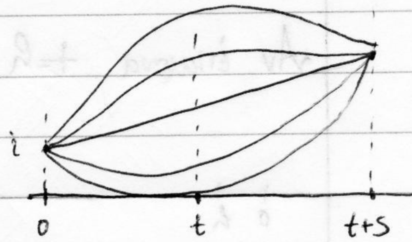
$$(t\to 0)$$

$$P_{ij}(t) = q_{ij} t + o(t)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)}{t} = P_{ij}'(0^+)$$

Λήμμα 2 (Chapman - Kolmogorov Equetions)

$$P_{ij}(t+s) = P(X(t+s)=j \mid X(0)=i) =$$
$$= \sum_{k\in S} P_{ik}(t) P_{kj}(s)$$



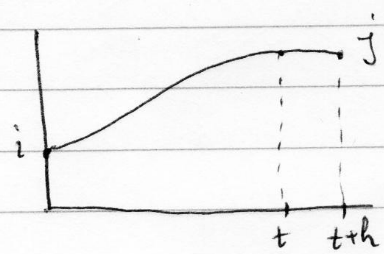
$$\Rightarrow \boxed{P_{ij}(t+s) = \sum_{k\in S} P_{ik}(t) P_{kj}(s)} \quad \forall\, i,j\in S,\ \forall\, t,s\geq 0$$

Διακριτή περίπτωση

$$P_{ij}^{(n+k)} = \sum_{\ell} P_{i\ell}^{(n)} P_{\ell j}^{(k)}$$

$$\mathbb{P}^{(n)} \overset{\Downarrow}{=} \mathbb{P}^{n}$$

Έστω $s = h \to 0$



$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k} P_{ik}(t)\cdot P_{kj}(h) = P_{ij}(t)\cdot P_{jj}(h) + \sum_{k\neq j} P_{ik}(t) P_{ij}(h)$$

$$\Rightarrow P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = P_{ij}(t)\cdot\left(P_{jj}^{(h)-1}\right) + \sum_{k\neq j} P_{ik}(t) P_{kj}(h)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)}{h} = P_{ij}(t) \lim_{h\to 0} \frac{P_{jj}^{(h)-1}}{h} + \sum_{i\neq j} P_{ik}(t) \lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(t)}{h}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{ij}'(t) = -P_{ij}(t)\, q_j + \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)\, q_{kj}} \quad \forall\, i,j \in S$$

$$P_{ij}'(t) = -q_j P_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} q_{kj} P_{ik}(t)$$

η διάσταση του πίνακα είναι ο χώρος καταστάσεων S, άρα ο πίνακας ενδέχεται να είναι και άπειρος.

$\Updownarrow$

προδρομικές

$$\boxed{\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\cdot \mathbb{Q}}$$

όπου $\mathbb{P}(t) = \left(P_{ij}(t)\right)_{i,j\in S}$

<u>Αρχικές Συνθήκες</u>

$\mathbb{P}(0) = I$

$$\left(\begin{array}{l} P_{ii}(0) = 1 \\ P_{ij}(0) = 0 \quad \forall i\neq j \end{array}\right)$$

Ch-Kolm $s=k$ $(t, t+h)$ $\uparrow$

Αν έπαιρνα $t=h$ (h,s)

0 h h+t

$$P_{ij}'(t) = -q_i P_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} q_{ik} P_{kj}(t)$$

$$\boxed{\mathbb{P}'(t) = \mathbb{Q}\cdot \mathbb{P}(t)}$$

αναδρομικές

22/12/2014

<u>Μάθημα 18</u>

$P_{ij}(t) = P[X(t)=j \mid X(0)=i]$ συνάρτηση πιθ. μετάβασης

<u>Προδρομικές εξισώσεις</u>

$$\boxed{P'_{ij}(t) = -q_j P_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} q_{kj} P_{ik}(t), \; i\in S}$$

Αρχικές συνθήκες $P_{ij}(0) = \begin{cases} 0 & ,i\neq j \\ 1 & ,i=j \end{cases}$

$[0,t-h]\ [t-h,t] \qquad [0,h],[h,t]$

$$\boxed{P'_{ij}(t) = -q_i P_{ij}(t) + \sum_{k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t), \; i\in S}$$

<u>Παράδειγμα:</u> Διαδικασία Poisson (λ)

$$⓪ \xrightarrow{\lambda} ① \xrightarrow{\lambda} ② \rightarrow \dots$$

Το λ είναι ο μέσος αριθμός συμβάντων ανά μονάδα χρόνου!

$q_{i,i+1} = \lambda \qquad i=0,1,2,\dots$
$q_{ik} = 0 \qquad i\neq k$
$q_i = -\sum_{j\neq i} q_{ij} = -\lambda$

(Poisson) $P'_{ij}(t) = -\lambda P_{ij}(t) + \lambda P_{i+1,j}(t)$

$$\boxed{P_{ij}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & , j\geq i \\ 0 & , j<i \end{cases}}$$

Διαδικασία Poisson (λ).

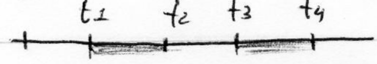
$\{N(t), t\geq 0\}$, $N(t)$ = αριθμός συμβάντων στο διάστημα $[0,t]$

1) $\forall t$, $N(t) \sim$ Poisson(λt)

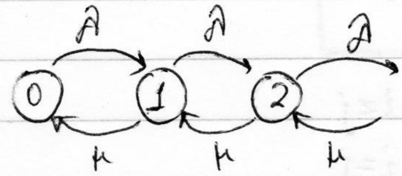
αρχή

2) Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών συμβάντων ~ $Exp(\lambda)$

3) $\forall\ t_1 < t_2 < t_3 < t_4$



$N(t_4) - N(t_3)$ και $N(t_2) - N(t_1)$



$P_{ij}(t) = \ldots$ (πολύπλοκο ^o_x :-O) ← ö

$P_{ij}(t) = P[X(t) = j \mid X(0) = i]$

Αν δίνεται (εκτός του Q) και η αρχική κατανομή,

$P_i(0) = P(X(0) = i),\ i \in S$

δηλ. $\underline{P}(0) = (P_0(0), P_1(0), \ldots)$

Έστω $\underline{P}(t) = (P_0(t), P_1(t), \ldots)$ όπου $P_j(t) = P(X(t) = j),\ j \in S$

κάνοντας δέσμευση ως προς $X(0) = i,\ i \in S$

$P_j(t) = \sum_{i \in S} P(X(0) = i) \cdot P(X(t) = j \mid X(0) = i) =$

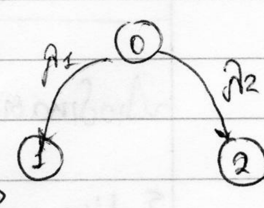
$= \sum_{i \in S} P_i(0) \cdot P_{ij}(t) \Rightarrow \underline{P}(t) = \underline{P}(0) \cdot \mathbb{P}(t)$

$\mathbb{P}'(t) = \ldots$

$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$

$S_{ij} = \min\{t : X(t) = j \mid X(0) = i\}$ χρόνος πρώτης επίσκεψης στην $j / X(0) = i$

$F_{ij}(t) = P(S_{ij} \le t)$, $f_{ij} = F_{ij}(\infty) = P(S_{ij} < \infty)$ (≤ 1)



Για $i = j$

$S_{jj} = \min\{t : X(t) = j,\ \exists\ s < t : X(s) \ne j \mid X(0) = j\}$

χρόνος πρώτης επανόδου στην $j \mid X(0) = j$

$F_{jj}(t) = P(S_{ii} \le t)$, $f_{jj} = F_{jj}(\infty) = P(S_{jj} < \infty)$

Αν $\boxed{\begin{array}{l} f_{jj}=1 \Rightarrow j \text{ επαναληπτική} \\ f_{jj}<1 \Rightarrow j \text{ παροδική} \end{array}}$

Έστω $\sigma_j = E(S_{jj})$

Αν j παροδική $\Rightarrow \sigma_j = \infty$

Αν j επαναληπτική $\nearrow \sigma_j < \infty$ θετ. επαναληπτική

$\searrow \sigma_j = \infty$ μηδ. επαναληπτική

$T_0 \sim Exp(\lambda)$

$T_1 \sim Exp(\mu)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

Θεώρημα:

Αν j παροδική ή μηδ. επαναληπτική

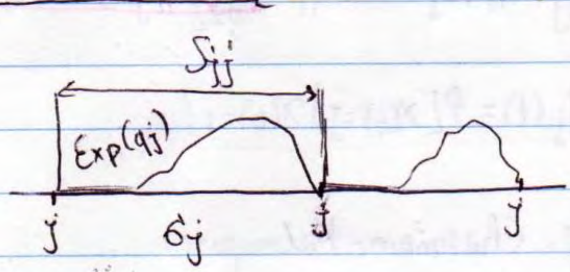
$$\lim_{t\to\infty} P_{jj}(t) = 0$$

Αν j θετ. επαναληπτική

$$\lim_{t\to\infty} P_{jj}(t) = \frac{1/q_j}{\sigma_j} = \boxed{\frac{1}{q_j\sigma_j} = \lim_{t\to\infty} P_{jj}(t)}$$

[Σε διακριτή περίπτωση $\lim P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\nu_j}$]

% χρόνου στη j (εκτός από οριακή πιθανότητα)



07/01/2015 Καλή χρονιά ☺

Μάθημα 19

Μαρκοβιανή αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου

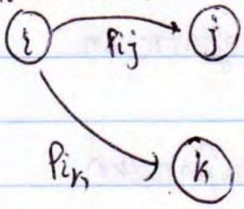
$\{X(t), t \geq 0\}$ $S = \{0,1,2,\dots\}$

1) Έστω T_j ο χρόνος παραμονής στην κατάσταση j

$T_j \sim Exp(q_j)$

Όταν γίνει η μετάβαση, $i \to j$ με πιθ. P_{ij}

$T_i \sim Exp(q_i)$ $\quad i \neq j$



Στο συνεχή χρόνο, αντίθετα με το διακριτό, όταν λέμε μετάβαση από μία κατάσταση σε άλλη ΔΕΝ συμπεριλαμβάνουμε την επιστροφή στην κατάσταση που βρισκόμασταν

2) Αν $X(t)=i$

$\forall j \neq i \quad T_{ij} \sim Exp(q_{ij})$

T_{ij} ανεξ. $\forall j \neq i$

$$\boxed{T_i = \min_{j \neq i} T_{ij}}$$

Αν $\min_{j \neq i} T_{ij} = T_{ik} \Rightarrow$ νέα κατάσταση $= k$

- $\boxed{q_{ij} = q_i P_{ij}}$ $\quad$ • $\boxed{q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}}$ $\quad$ • $\boxed{P_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}}$

$P_{ij}(t) = P[X(t)=j \mid X(0)=i]$

Εξ. Chapman-Kolmogorov

$$\boxed{P_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t) P_{kj}(s) \quad \forall \; t,s \geq 0}$$

<u>Προδρομικές Εξισώσεις</u>: $P'_{ij}(t) = -q_j P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t), i \in S$

$\Updownarrow$

<u>Αναδρομικές Εξισώσεις</u>: $P'_{ij}(t) = -q_i P_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t), i \in S$

Ισοδύναμα συστήματα εξισώσεων!

Οριακές συνθήκες: $P_{ij}(0)=\begin{cases}0 & ,\ i\neq j\\ 1 & ,\ i=j\end{cases}$

<u>Μεταβατική Κατανομή</u>

Αν $P_i(0)=P(X(0)=i),\ i\in S$

$\underline{P}(0)=(P_0(0),P_1(0),\dots)$ αρχική κατανομή

$P_j(t)=P(X(t)=j)$

$P_j(t)=\sum_{i\in S}P_i(0)P_{ij}(t)$

$P_j'(t)=-q_jP_i(t)+\sum_{k\neq j}P_k(t)q_{kj}\quad \forall j\in S$

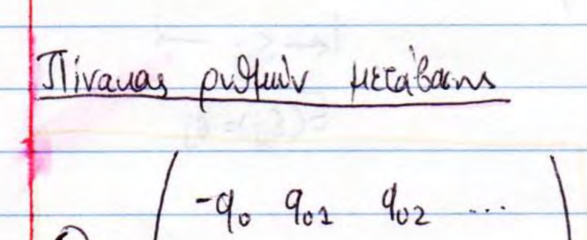
$P_j(0)$ = αρχική συνθήκη

<u>Πίνακας ρυθμών μετάβασης</u>

$$Q=\begin{pmatrix}-q_0 & q_{01} & q_{02} & \dots\\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \dots\\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & \dots\\ \vdots & & & \ddots\end{pmatrix}$$

$P'(t)=P(t)\cdot Q=Q\cdot P(t)$

<u>Ασυμπτωτική συμπεριφορά ($t\to\infty$)</u>



ανεξάρτητες & ισόνομες
(Μαρκοβιανή Ιδιότητα)

σημαίνει ότι έχουν την ίδια κατανομή, γκούχου

S_{jj} = χρόνος επανόδου στη j

S_{ij} = χρόνος πρώτης μετάβασης $i\to j$

$S_{jj}^{(1)}, S_{jj}^{(2)}\dots$ α.ι.τ.μ

$F_{ij}(t)=P(S_{ij}\leq t)$

$F_{jj}(t)=P(S_{jj}\leq t)$

$f_{jj}=\lim_{t\to\infty}F_{jj}(t)=F_{jj}(\infty)$

$$f_{jj} = \lim_{t\to\infty} F_{jj}(t) = F_{jj}(\infty) \begin{cases} =1, \ j = \text{επαναληπτική} \begin{cases} \xrightarrow{\sigma<\infty} \text{θετικά επαναληπτική} \\ \xrightarrow{\sigma=\infty} \text{μηδενικά επαναληπτική} \end{cases} \\ <1, \ j = \text{παροδική} \end{cases}$$

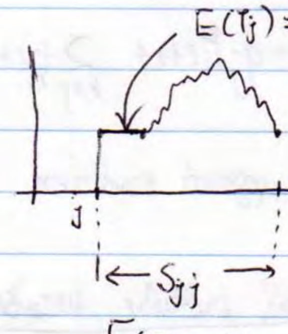
$\sigma_j = E(S_{jj})$

⊛ Περιοδικότητα ΔΕΝ υπάρχει στο συνεχή χρόνο

Θεώρημα:

Αν j είναι παροδική ή μηδενικά επαναληπτική:

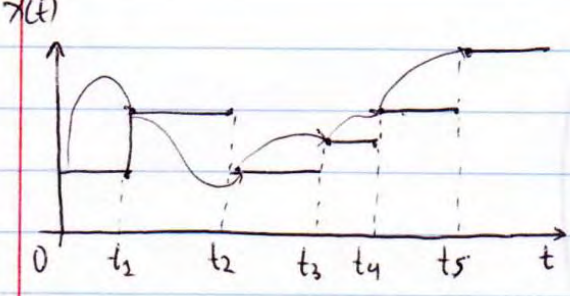
$\lim_{t\to\infty} P_{jj}(t) = 0$



$E(S_{jj}) = \sigma_j$

Αν j είναι θετικά επαναληπτική

$\lim_{t\to\infty} P_{jj}(t) = \frac{1}{q\sigma} > 0 \quad \left(= \frac{1/q}{\sigma} \right)$



$0 < t_1 < t_2 < t_3 \dots$, διαδοχικές στιγμές μεταβάσεων

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Έστω } X_n = X(t_n^+) \quad \{X_n, n=1,2,\dots\} \text{ ΜΑΔΧ} \\ P_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \frac{q_{ij}}{q_i} \end{array}}$$

Εμφυτευμένη διαδικασία διακριτού χρόνου

• Μια κατάσταση j είναι παροδική (επαναληπτική) στη $\{X(t), t\geq 0\}$ αν και μόνο αν είναι παροδική (επαναληπτική) στη $\{X_n, n=1,2,\dots\}$.

• Η j είναι προσιτή από την i $(i\to j)$ αν $\exists\, t>0: P_{ij}(t)>0$.

Αν $i\to j \Rightarrow f_{ij}>0$, $f_{ij} = \lim_{t\to\infty} P(S_{ij}\leq t) = \lim_{t\to\infty} F_{ij}(t)$

i επικοινωνεί j, $i \longleftrightarrow j$: $i \to j$
$j \to i$

09/01/2015

Μάθημα 20

Αδιαχώριστες ΜΑΣΧ

• Αν παροδική ή μηδενικά επαναληπτική $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} P_j(t) = 0 \quad \forall j \in S$

• Αν θετικά επαναληπτική $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} P_j(t) = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = P_j = \frac{1}{q_j 6_j} = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^T 1(X(t)=j)\,dt}{T}$

$P_j(t) = \sum_{i\in S} P_i(0) P_{ij}(t)$ (% χρόνου όπου $X(t)=j$, στο $[0,T]$)

Αναδρομικές εξισώσεις: $P_{ij}'(t) = -q_i P_{ij}(t) + \sum_{k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t)$ (*)

Προδρομικές εξισώσεις: $P_{ij}'(t) = -q_j P_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} P_{ik}(t) q_{kj}$ (*)(*)

Αν $\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = P_j \quad \forall j, i$

$\lim_{t\to\infty} P_{ij}'(t) = 0$

$$(*) \overset{\lim}{\Rightarrow} 0 = -q_i P_j + \sum_{k\neq i} q_{ik} P_j = P_j \underbrace{\left(-q_i + \sum_{k\neq i} q_{ik}\right)}_{=0}$$

που βγαίνει $0=0$, άρα μία ταυτότητα, οπότε η σχέση αυτή μου είναι άχρηστη (έχει τετριμμένη λύση)

$$(*)(*) \overset{\lim}{\Rightarrow} 0 = -q_j P_j + \sum_{k\neq j} P_k q_{kj} \quad \forall j \Leftrightarrow \boxed{P_j q_j = \sum_{k\neq j} P_k q_{kj}, \ j\in S}$$

εξισώσεις ισορροπίας

$$\boxed{\sum_{j\in S} P_j = 1}$$

Εξίσωση κανονικοποίησης

μοναδική λύση (**)

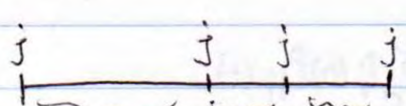
Θεώρημα: Αδιαχώριστη ΜΑΣΧ θετικά επαναληπτική εάν το σύστημα εξισώσεων (**) έχει μοναδική θετική λύση $\{P_j > 0,\ j \in S\}$

Η $\underline{P}$ είναι <u>στάσιμη</u> αν $\underline{P}(0) = \underline{P} \Rightarrow \underline{P}(t) = \underline{P}\ \forall t$

<u>Εξισώσεις Ισορροπίας</u>

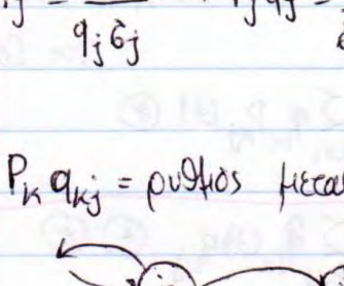
$$\boxed{\begin{aligned} & P_j q_j = \sum_{k \neq j} P_k q_{kj}, \quad j \in S \\ & \sum_{j \in S} P_j = 1 \end{aligned}}$$

$P_j = \dfrac{1}{q_j \sigma_j} \rightarrow P_j q_j = \dfrac{1}{\sigma_j}$



αυτή $E(S_{jj}) = \sigma_j$

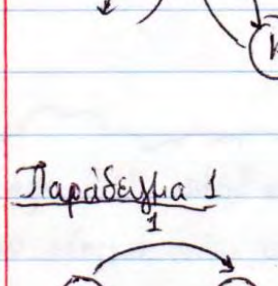
$P_k q_{kj}$ = ρυθμός μεταβάσεων $k \rightarrow j$ ανά μονάδα χρόνου.



$q_j = \sum_{l \neq j} q_{jl}$ ο συνολικός ρυθμός εξόδου (αθροίζω τους ρυθμούς εξόδου στις διάφορες καταστάσεις)

$\boxed{\text{συνολικός ρυθμός εξόδου = συνολικός ρυθμός εισόδου}}$

<u>Παράδειγμα 1</u>



αδιαχώριστη, πεπερασμένη $\}\rightarrow$ Θ.Ε.

Οριακή Κατανομή $(P_0, P_1, P_2, P_3) = \underline{P}$

$0: P_0 (q_{01} + q_{02}) = P_1 q_{10} + P_2 q_{20} + P_3 q_{30} \Rightarrow P_0 \cdot 3 = P_1 \cdot 5 + P_2 \cdot 0 +$
$+ P_3 \cdot 1$

$1: P_1 \cdot 5 = P_0 \cdot 1$

$2: P_2 \cdot 4 = P_0 \cdot 2 + P_3 \cdot 2$

$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$

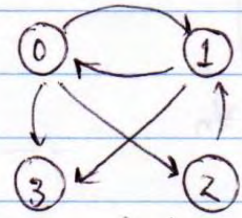
$$Q = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \dots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \dots \\ & & & \end{pmatrix}$$

Εξ. ισορροπίας (j) $\sum_{k \neq j} P_k \, q_{kj} - P_j \, q_j = 0 =$

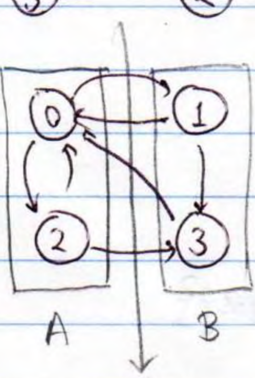
$$= P_0 q_{0j} + P_1 q_{1j} + \dots - q_j P_j + q_{j+1} P_{j+1} + \dots = 0 \Rightarrow \underline{P} \overset{j \text{ στήλη}}{\left[\quad \right]} = 0 \ \forall j$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \underline{P} \cdot Q = 0 \\ \sum_{j \in S} P_j = 1 \end{array}}$$

(Στο διακριτό χρόνο, $\underline{\Pi} = \underline{\Pi} \cdot \mathbb{P}$, $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$)



Εξ.0



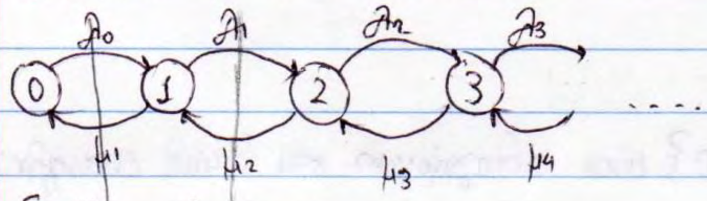
$\subset S$

μέσος ρυθμός μετάβασης $A \to B$ =
μέσος ρυθμός μετάβασης $B \to A$

$$P_0 q_{01} + P_2 q_{23} = P_1 q_{10} + P_3 q_{30}$$

Παράδειγμα 2

Διαδικασία Γεννήσεων - Θανάτων



$S = \mathbb{N}_0$ αδιαχώριστη

0-1 $P_0\lambda_0 = P_1\mu_1$
1-2 $P_1\lambda_1 = P_2\mu_2$
$P_2\lambda_2 = P_3\mu_3$
$\vdots$
$P_n\lambda_n = P_{n+1}\mu_{n+1}$

$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

$P_1 = P_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1}$

$P_2 = P_1 \frac{\lambda_1}{\mu_2} = P_0 \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}$

$P_3 = P_2 \frac{\lambda_2}{\mu_3} = P_0 \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}$

$\vdots$

$P_n = P_0 \underbrace{\boxed{\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}}}_{C_n}$

$P_n = P_0 C_n \ , n=0,1,2,\dots$

$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n = 1$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} C_n < \infty \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\Sigma C_n} > 0$

$\Rightarrow \boxed{P_n = \frac{C_n}{\Sigma C_n} > 0 \ \forall n} \rightarrow$ Θ.Ε.

(ii) $\Sigma C_n = \infty \Rightarrow P_n = 0 \ \forall n$

14/01/2015

<u>Μάθημα 21</u>

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ

Q = πίνακας ρυθμών μετάβασης $\Rightarrow \{q_{ij}, i \neq j\}$

Εμφυτευμένη ΜΑΔΧ $\{X_n, n=1,2\dots\}$ όπου $X_n = X(t_n^+)$
και t_n = η χρονική στιγμή n-οστής μετάβασης

$P_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}, i \neq j$

Έστω ότι η $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι αδιαχώριστη και θετικά επαναληπτική.
Τότε { (1) και η εμφυτευμένη αδιαχώριστη και θετικά επαναληπτική
(2) και οι δύο έχουν μοναδικές στάσιμες κατανομές.

Έστω $\{P_j, j \in S\}$ η στάσιμη κατανομή της $\{X(t), t \geq 0\}$
Έστω $\{\pi_j, j \in S\}$ η στάσιμη κατανομή της εμφυτευμένης

$P_j = \lim_{t \to \infty} \{$ποσοστό χρόνου στην κατάσταση j στο $[0,t]\}$

$\pi_j = \lim_{n \to \infty} \{$ποσοστό μεταβάσεων προς ή από την κατάσταση j στις n πρώτες μεταβάσεις$\}$

Για τις εξισώσεις συνεχούς χρόνου $\boxed{P_j q_j = \sum_{i \neq j} P_i q_{ij}}$

Ισοδύναμα συστήματα εξισώσεων

$$\sum_{j \in S} P_j = 1$$

Εμφυτευμένη $\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i P_{ij} = \sum_{i \neq j} \pi_i P_{ij} = \sum_{i \neq j} \pi_i \frac{q_{ij}}{q_i} = \sum_{i \neq j} \frac{\pi_i}{q_i} q_{ij}$

$P_{ii} = 0 \ \forall i$ $\quad \sum \pi_j = 1$ $\quad \Rightarrow \boxed{\frac{\pi_j}{q_j} q_j = \sum_{i \neq j} \frac{\pi_i}{q_i} q_{ij}}$

Δεν έχουμε στην εμφυτευμένη μεταβάσεις στον εαυτό μας

Αν θέσω $x_j = \frac{\pi_j}{q_j}$

Γενικά $P_j = c x_j \quad c \in \mathbb{R}$

Επίσης $\sum P_j = 1 \Rightarrow c \sum \frac{\pi_j}{q_j} = 1$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\sum_{j \in S} \pi_j / q_j} \Rightarrow \boxed{P_j = \frac{\pi_j / q_j}{\sum_{j \in S} \pi_j / q_j}}$$

Οι δύο στάσιμες κατανομές συνδέονται ως εξής:

$$P_j = \frac{\pi_j / q_j}{\sum_{j \in S} \pi_j / q_j}, \quad \pi_j = \frac{P_j q_j}{\sum_{j \in S} P_j q_j}$$

Παράδειγμα:

πχ

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

$q_0 = \lambda \quad q_{01} = \lambda$
$q_1 = \mu \quad q_{10} = \mu$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$P_{01} = \frac{q_{01}}{q_0} = 1 \qquad P_{10} = \frac{q_{10}}{q_1} = 1$$

Εμφυτ.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "1"] & 1 \arrow[l, bend left, "1"] \end{tikzcd}$$

Εδώ έχουμε πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος!!!

$$\boxed{\pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{\pi_0/q_0}{\frac{\pi_0}{q_0} + \frac{\pi_1}{q_1}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mu}} = \boxed{\frac{\mu}{\lambda+\mu} = P_0}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}}$$

Άσκηση 1

Πλατεία ταξί

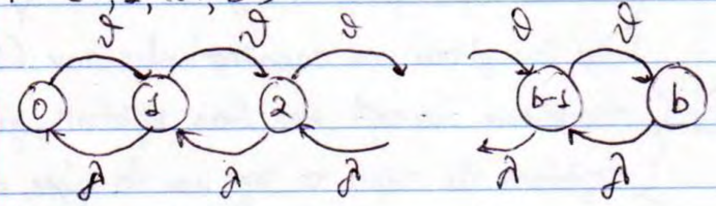
Πελάτες φτάνουν στην πλατεία για ταξί, οι χρόνοι μεταξύ αφίξεων πελατών $\sim Exp(\lambda)$
Υποθέτουμε ότι η πλατεία έχει χωρητικότητα b (δηλ. μπορούν να περιμένουν μέχρι b ταξί στην πλατεία)
Χρόνοι μεταξύ αφίξεων ταξί ~ Εκθετική κατανομή με παράμετρο θ.
Ζητούνται:
(1) Μοντέλο ΜΑΣΧ, διάγραμμα μεταβάσεων
(2) Αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική
(3) Ποσοστό χρόνου χωρίς ταξί.

Υποθέτουμε ότι ο πελάτης αν δεν βρει ταξί φεύγει, άρα τα ταξί που έρχονται σίγουρα δεν βρίσκουν πελάτες να περιμένουν.

(1)

$\{X(t), t \geq 0\}$ $X(t)$ = αριθμός ταξί στην πιάτσα τη στιγμή t

$S = \{0, 1, \ldots, b\}$



Άσκηση: Να βρούμε τον Q.

(2) Αδιαχώριστη, Πεπερασμένη $\Rightarrow$ Θετικά επαναληπτική (άρα έχει και μοναδική στάσιμη κατανομή)

(3) Στάσιμη Κατανομή

$$P_0 \vartheta = P_1 \cdot \lambda \Rightarrow P_1 = P_0 \cdot \frac{\vartheta}{\lambda}$$

$$P_1 \vartheta = P_2 \lambda \Rightarrow P_2 = P_1 \frac{\vartheta}{\lambda}$$

$$P_n = P_0 \left(\frac{\vartheta}{\lambda}\right)^n, \quad n = 0, 1, \ldots, b$$

$$\sum_{n=0}^{b} P_n = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{n=0}^{b} \left(\frac{\vartheta}{\lambda}\right)^n = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 \frac{1 - \left(\frac{\vartheta}{\lambda}\right)^{b+1}}{1 - \frac{\vartheta}{\lambda}} = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{P_n = \frac{\left(\frac{\vartheta}{\lambda}\right)^n \left[1 - \frac{\vartheta}{\lambda}\right]}{1 - \left(\frac{\vartheta}{\lambda}\right)^{b+1}}, \quad n = 0, 1, \ldots b}$$

% χρόνου χωρίς ταξί

$$\boxed{P_0 = \frac{1 - \vartheta/\lambda}{1 - \left(\frac{\vartheta}{\lambda}\right)^{b+1}}}$$

Άσκηση 2

(Συνέχεια της 1)

Έστω ότι και οι πελάτες περιμένουν, ο χώρος αναμονής των πελατών είναι a ατόμων

Θα μπορούσαμε να θέσουμε $X(t) = (i, j)$

i = αριθμός πελατών που περιμένουν $\quad i \in \{0, \ldots, a\}$

j = αριθμός ταξί $\quad j \in \{0, \ldots, b\}$

S

$$\begin{array}{ccc} (0,0) & \dots & (a,b) \\ (1,0) & \dots & (1,b) \\ \vdots & & \vdots \\ (0,0) & \dots & (a,b) \end{array}$$

← Αυτές οι καταστάσεις δεν θα παρατηρηθούν!

π.χ. δεν γίνεται να παρατηρήσουμε την (1,2), να περιμένουν δύο ταξί και ένας πελάτης, γιατί, ο ένας πελάτης θα πάρει το ταξί και θα φύγει, άρα θα μείνει ένα ταξί να περιμένει!

Εναλλακτική:

$X(t) \in \{-a, \dots, b\}$

$X(t) = -i < 0$, i πελάτες

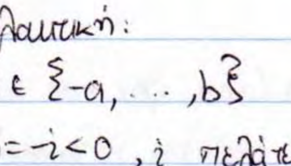
$X(t) = j > 0$, j ταξί

ή θα περιμένουν πελάτες ή θα περιμένουν ταξί!

16/01/2015

Μάθημα 22

Άσκηση 1



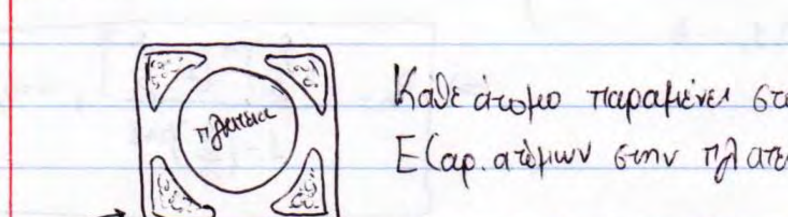
πολίτες διαδικασία Poisson(λ)

Κάθε άτομο παραμένει στο χώρο χρόνο $\sim Exp(\mu)$

E(αρ. ατόμων στην πλατεία σε στάσιμη κατανομή) = ?

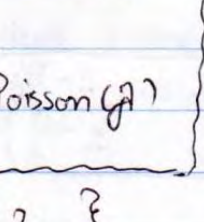
$\{X(t), t \geq 0\}$ όπου $X(t)$ = αρ. ατόμων στην πλατεία τη στιγμή t

$S = \{0, 1, 2, \dots\}$



$n \cdot \mu$ (ο ελάχιστος χρόνος να φύγει κάποιος από αυτούς)

$X(t) = n$:



Γεγονότα: ① Έρχεται ένα νέο άτομο (με ρυθμό λ) $\rightarrow n+1$

② Φεύγει ένα άτομο $\rightarrow n-1$

ή ② φεύγει ο A_1 $(\mu) \to (n-1)$

φεύγει ο A_2 $(\mu) \to (n-1)$

⋮

φεύγει ο A_n $(\mu) \to (n-1)$

Με λίγα λόγια, ένα καινούριο άτομο έρχεται με ρυθμό λ.
Όμως από τα ήδη υπάρχοντα άτομα μπορεί να φύγει το οποιοδήποτε
(ο A_1, ο A_2 ή ο A_3 κλπ) με ρυθμό μ το καθένα.
Άρα ο ελάχιστος χρόνος να φύγει κάποιος από τους $A_1, \dots, A_n$ είναι $n \cdot \mu$

Εξισώσεις Ισορροπίας

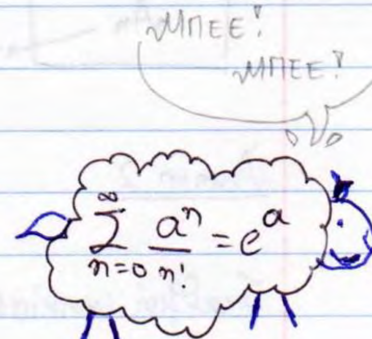
$$P_0 \lambda = P_1 \cdot \mu \Rightarrow p_1 = P_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_1 \lambda = P_2 \, 2\mu \Rightarrow P_2 = P_0 \cdot \frac{\lambda^2}{2\mu^2}$$

$$P_2 \lambda = P_3 \, 3\mu \Rightarrow P_3 = P_0 \cdot \frac{\lambda^3}{2 \cdot 3 \cdot \mu^3}$$

⋮

γενικά $P_n = P_0 \dfrac{\lambda^n}{n! \, \mu^n}$



Προβατάκι by Γιώργο :)

Κανονικοποίηση

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_0 \frac{\lambda^n}{n! \, \mu^n} = 1 \Rightarrow P_0 \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}_{< \infty \ \forall \lambda, \mu} = 1$$

$$\Rightarrow P_0 = e^{-(\lambda/\mu)} > 0 \Rightarrow \boxed{P_n = e^{-\lambda/\mu} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}, \ n = 0, 1, 2, \dots (>0)} \Rightarrow \text{Θ.Ε.}$$

$$\lim_{t \to \infty} E(X(t)) = ?$$

$$P_n = ? = \lim_{t \to \infty} P(X(t) = n) = e^{-\lambda/\mu} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \Rightarrow X(t) \xrightarrow{\infty} \text{Poisson}(\lambda/\mu)$$

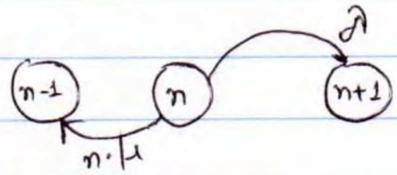
$$\Rightarrow E(X(t)) \to \lambda/\mu$$

Π.χ. $\lambda = 100/min = 6000/hr$

Κάθε άτομο μένει κατά μέσο όρο 2 ώρες, $E(\underbrace{\text{χρόνος παραμονής}}_{Exp(\mu)}) = 2hr = \frac{1}{\mu}$

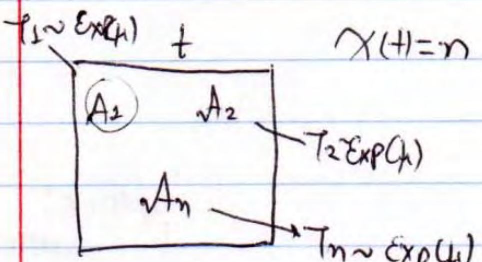
$\Rightarrow \mu = \frac{1}{2}$

$E(X(t)) \to \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6000}{1/2} = 12000$



Η εκθετική έχει την αμνήμονη ιδιότητα!

$X(t) = n$



Άσκηση 2

Σταθμοί ενοικίασης A, B

2 αυτοκίνητα ενός τύπου

Πελάτες στην πόλη A (Poisson (λA))

Πελάτες στην πόλη B (Poisson (λB))

Χρόνος ενοικιάσεων $\sim Exp(\mu)$

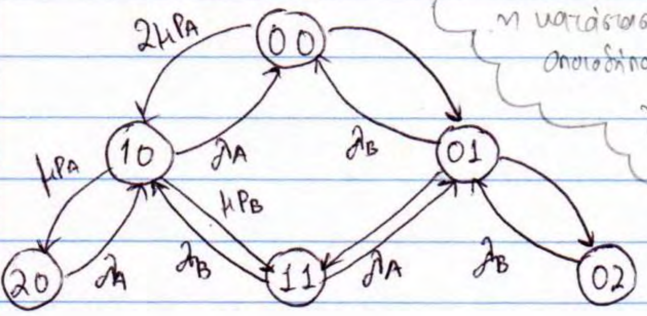
Επιστροφή αυτοκινήτων → A με πιθ. P_A → B με πιθ P_B $\Big\}$ $P_A + P_B = 1$

ⓐ MAΣX, διάγραμμα ρυθμοί

ⓑ Για $\lambda_A = \lambda_B = \lambda$, $P_A = P_B = \frac{1}{2}$ να βρεθεί η στάσιμη κατανομή και το % χρόνου που είναι ενοικιασμένα 0, 1, ή 2 αυτοκίνητα.

ⓐ $X(t) = (i, j)$ i = αριθ. αυτοκ. A, j = αριθ. αυτοκ. B $i + j \le 2$

$2-i-j =$ αρ. ενοικιασμένων



έχω δύο αυτοκίνητα στο δρόμο: η κατάσταση θα αλλάζει όταν οποιοδήποτε από τα 2 θα επιστραφεί, γι'αυτό γίνεται με ρυθμό 2μ! (δες και την άσκ. 1, με την. πλατεία :)

$(20) \to (10) \quad q_{20,10} = \lambda_A$

$(10) \to (20) \quad q_{10,20} =$;

T_{10} = χρόνος παραμονής στην $(1,0)$

$T_{10} \sim Exp(q_{10})$

$q_{10} = ?$

$P_{10,20} = P(10 \to 20$ όταν γίνει μετάβαση$) = P($επιστροφή πριν την ενοικίαση$) \cdot P($επιστροφή στην A | επιστροφή πριν την ενοικίαση$)$

$= \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$

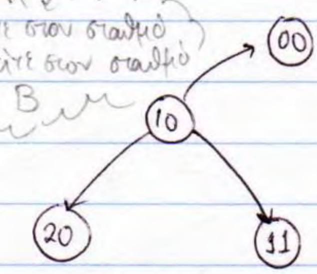
$= P_A$

Γεγονότα που αλλάζουν κατάσταση

① Ενοικίαση στην A $\sim Exp(\lambda)$

② Επιστροφή $\quad Exp(\mu)$

είτε στον σταθμό A, είτε στον σταθμό B



$$\boxed{q_{10,20} = (\lambda_A + \mu) \cdot \frac{\mu}{\lambda_A + \mu} \cdot P_A = \mu \cdot P_A}$$

$$P_{10,20} = \frac{q_{10,20}}{q_{10}}$$